前　　言

组合数学源远流长，但在远古时代这类问题往往联系着数的神秘主义出现，例如：

1．我国«易·系辞上»中说“河出图，洛出书，圣人则之。”，宋朝理学家朱熹在«周易本义»一书中指出，河图为图 0.1 形式所示。用现代术语来说，这不过是一个简单的 3 阶魔方(见本书题 10.3)

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

但二、三千年前却作为祥瑞。

2．据说古代印度婆罗门教寺庙内的僧侣们玩着一种称为“河内宝塔问题”的游戏，他们认为如果一场游戏能玩到结束，就意味着世界末日的来临。游戏的器具是在一块黄铜平板上装三根金钢石细柱，在一根细柱上放有 64 个大小不等环形金盘，大的在下小的在上。问题是若一次只能移动一个盘，并且不允许大盘放在小盘上，如何把这64个金盘从一根柱上全部移到另一根柱上？

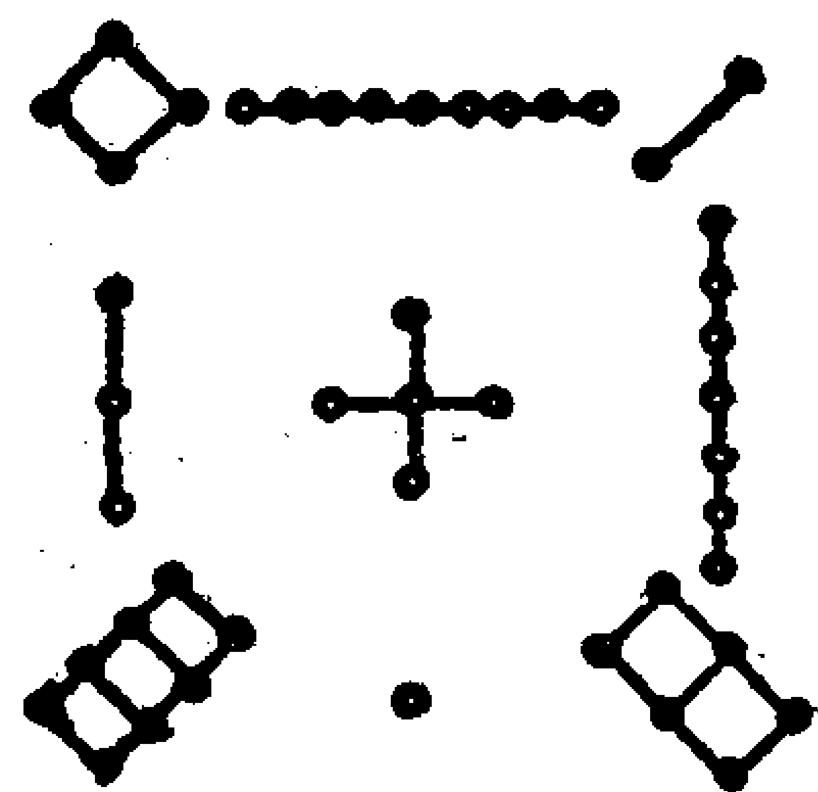


图 0.1

这是一个简单的解递推关系式问题。诚然，一个人若用手工移动，几辈子也完不成，但描述出它的解法过程，现在却是容易的事(见本书题 5.35)。

及至近代，组合数学虽有所发展，但仍以消遣性的数学游戏形式在民间流传，或以智力测验性的形式被一些学者研究。例如：

1．欧洲民间流传着“结婚问题”。说的是某社团中有许多未婚青年妇女和男士，妇女们都渴望结婚，但也不愿随便嫁给任一个人，实际上她们心中都有一张可接收为配偶的男士名单，问该社团中每个青年妇女都嫁给可接受的男士，这可能吗？（即本书第九章相异代表系问题）。

2．1850年，Rev. Thomas 和 P. Kirkman 提出下述“Kirkman 女生问题”：一位女教师带着她的15个女学生散步。女生排成5行，每行3人。所以每个女生有两个同伴。若计划散步7天，使得没有一个女生和她同班同学在同一行中超过一次，这可能吗？（见本书题10.34）。

组合数学被系统地研究，并有惊人的发展是近几十年的事，特别是电子计算机出现以后的事。一方面组合数学中过去需要成年累月才能计算出来的问题，现在借助于计算机1～2分钟就可解决。使得过去仅以游戏形式出现的组合分析技术进入了严肃的理论和应用范围。另一方面，计算机技术广泛应用，面临着复杂繁多的计算任务，使传统的以微积分和微分方程为中心的模拟数学理论鞭长莫及，这促使了离散数学，包括组合数学的迅速发展。现在组合数学已成为一门内容丰富、有自己特色的严谨的科学，并仍在蓬勃发展之中。

组合数学对计算机科学技术人员至关重要，它是计算机科学和工程某些分支的基础，特别和计算机科学理论关系更为密切，我们知道计算机科学的核心是算法研究，而组合算法是算法的主要内容。没有组合数学的基础，就无法深入研究算法和分析算法。此外，组合学的思想和技术也在社会科学、生物学等其

它领域得到日益广泛的应用，就是传统上应用模拟数学的物理和力学范围，许多场合也为组合数学所取代。值得一提的是，组合数学中的许多问题很能推动人们去思索，它们的解法也常常是机智和精巧的，因此，它也是一门提高思维分析能力的极好课程。

本书含有对进入组合数学来说最为基本的概念和方法，和对计算机专业最为需要的组合思想和算法。它们大多环绕着计数问题、存在性问题、组合设计问题和最优化问题给出。组合数学中较高深内容，如组合矩阵论、复杂的区组设计等，没有列入。对原属组合数学范围、现已独立成为一个数学分支的内容，或习惯上已归入其它学科范围的内容，如图论、线性规划等也未列入。

每章都由两部分构成，一是内容提要。纲要性地介绍本章内容，使读者对它们有一个清晰的轮廓。许多重要定理，在题解中都有证明，这样就使得有经验的教师，可利用本书作教材；自学者也可仅应用本书钻研这些内容而毋需其它教材。二是题解及评注。主要介绍解题方法，简短的评注是提请读者注意问题的某些特点及某些事项。全书共十一章，包含504个问题的详细解答。第一章也可在其它各章学完后再读。

本书第一、三、七、九章由王元元编写，第二、四、十、十一章是由王庆瑞编写，第五、六章由黄纪麟编写，第八章由李振国编写。方世昌同志审阅校订了全书内容并参加了部分章节的编写。在本书编写过程中，还得到南京大学张克民教授的指导和帮助，在此表示谢意。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

1986年11月于南京

目　　录

第一章　组合学问题解法入门

内容提要

本章是全书的一个导论，旨在对组合学问题求解方法作一点介绍。

1-1　什么是组合学

组合学是数学的一个分支，它研究事物在给定模式下的配置，研究这种配置的存在性，所有可能配置的计数和分类，以及配置的各种性质。组合学在计算机科学中有着极其广泛的应用。

1-2　组合学基本解题方法

组合学问题求解方法层出不穷、千变万化，很难给出一个纲领式的概括。本书将通过大量问题的求解向读者展示组合学的基本解题方法。这些方法大致可以分为两类。一类是从组合学基本概念、基本原理出发解题的所谓常规方法，例如，利用容斥原理、二项式定理、Polya 定理解计数问题；解递推关系式的特征根方法、生成函数方法；解存在性问题的鸽笼原理、相异代表系定理等等。这类方法通常比较容易掌握，读者将在以后各章里分别读到并学会它们，因此本章只提供若干例子作为索引。另一类方法则不同，它们通常与问题所涉及的组合学概念无关，而对多种问题均可使用。例如：

1．数学归纳法。

2．一一对应技术。它的应用是多方面的，在组合学中最常见的是利用它将问题的模式转化为一种已经解决的问题模式。

因此，一一对应技术的此种应用也可称为模式化归方法。

3．数论方法，特别是利用整数的奇偶性、整除性等数论性质进行分析推理的方法。

4．殊途同归方法，即从不同角度讨论计数问题以建立组合等式。

本章将对组合学的这两类基本解题方法给出一些实例作为导引。尤其因后一类方法运用范围甚广，而它们的正确使用又需要一定的技巧，我们将在下文给出较多数目的例题，以期较深刻地揭示这些方法的要领，从而使读者在以后各章问题的阅读中能自如地运用它们。

题解及评注

1.1 证明　有 n 个元素的集合，其子集恰为 2^n 个。

证　对 n 归纳。

当 $n=0$ 时，该集合为一空集，它只有一个子集(自身)，而 $1=2^0$，故命题真。

设 $n=k$ 时命题成立。现证 $n=k+1$ 时命题也成立。先从该集中取出一个元素，例如 a，于是据归纳假设，有 2^k 个不含 a 的子集。我们知道该集的全体子集可以分为两类：一类为不含 a 的子集(已知 2^k 个)，另一类为含 a 的子集。后者也是 2^k 个，因为含 a 的子集与不含 a 的子集是一一对应的(前者中去掉 a 便是后者之一；反之，后者中加进 a 便是前者之一)。因此该集的子集总数应是 $2^k+2^k=2^{k+1}$ 个。这就是说，命题在 $n=k+1$ 时亦真。根据归纳原理，对一切 n 原命题成立。

评注　这是应用**第一数学归纳法**的一个例子。第一数学归纳法在初等数学中常用于自然数性质的证明，其实它也可用于

其它对象的借助于自然数来刻划的性质的证明(如本例)。更有甚者,可以说它适用于一切“象自然数”的集合,这种集合具有以下性质:集合中有基础元素(或最小元素),而其它元素均可从它出发,相继用同一操作(类似于自然数的后继运算)来生成。

1.2 证明 任何大于1的整数或者自身为一质数,或者可以写作若干个质数的乘积。

证 对整数n归纳。

$n=2$时它自身为一质数。

设对一切小于n大于1的整数命题真,欲证n满足本命题。若n为一质数,显然真。否则n有因子i, j, 使$n=i\cdot j$, $1<i$, $j<n$。据归纳假设,i, j或为质数,或可写成若干质数的乘积,不妨设$i=i_1\cdot i_2\cdot\cdots\cdot i_l$, $j=j_1\cdot j_2\cdot\cdots\cdot j_h$, 其中$l\geq1$, $h\geq1$, 且$i_1, i_2, \cdots, i_l, j_1, j_2, \cdots, j_h$均为质数。因此

$$n=i\cdot j=i_1\cdot i_2\cdot\cdots\cdot i_l\cdot j_1\cdot j_2\cdot\cdots\cdot j_h$$

即n可写成若干质数的乘积。命题归纳证得。

评注 本题运用了**第二数学归纳法**,而用第一归纳法就很难如愿以偿。由于第二数学归纳法采用较强的归纳假设,因而应用起来有其独到之处。第二数学归纳法还有更广的适用范围,它适用于一切良序集合。

1.3 下列结论和归纳证明都是错误的,请指出其错误所在。

结论 任何数目(n个)的一群人都具有相同的身高,进而有结论:所有的人一般高。

证 当$n=1$时结论显然成立。

设任何$k(k<n)$个人均一般高。现证n个人也一般高。将n个人分成两组G_1, G_2, 而使其中一人,例如m先生,同时在两个组中,且每一组的人数均小于n, 这是可以做到的(*)。据归纳假设,G_1中人都同m先生一般高,G_2中人也都同m先生一

般高，因此，所有 n 个人都一般高。

解 错误原因是断言(*)对 $n=2$ 时不能成立。

评注 注意，应用归纳法时，不仅基础步骤的证明要正确，并且归纳步骤的证明也要正确，两者缺一不可。特别是在归纳过程中所引用的性质（象本例中的性质(*)）必须对归纳变元(上述 n)的一切可能值(除基础步骤中 n 所取值外)均成立。

***1.4** 求证 $n\geqslant 3$ 时 $n^{n+1}\geqslant(n+1)^n$。

证 我们证明一个更一般的结论：

当 $u\geqslant n\geqslant 3$ 时 $\quad nu^n\geqslant(u+1)^n$

在该结论中命 $u=n$ 便得原命题。把 u 看作任意的，对 n 作归纳。当 $n=3$ 时我们有(注意：此时 $u\geqslant 3$)

$$3u^3=u^3+2u\cdot u^2\geqslant u^3+3u^2+3u+1=(u+1)^3$$

现设 $nu^n\geqslant(u+1)^n$。而

$$\begin{aligned}(n+1)u^{n+1}&=(nu+u)u^n\geqslant(u+1)n\cdot u^n\\&\geqslant(u+1)(u+1)^n(\text{归纳假设})\\&=(u+1)^{n+1}\end{aligned}$$

归纳完成，原命题得证。

评注 这种归纳证明方法可称为**拆裂法**，因为它的特点是：用新变元将处于两种不同地位的同一变元(本题中处于底数及指数地位的变元 n) 区分开来。这是一种较高级的归纳证明技巧。

归纳法并不限于对一个变元进行，还可以对多个变元联列归纳，例如，欲证性质 $P(m, n)$对一切自然数 m, n 成立，那么只需证明

(1) $P(1, 1)$成立。

(2) 若 $P(m-1, n)$, $P(m, n-1)$成立，则 $P(m, n)$ 成立。

1.5 有 101 个人参加乒乓球淘汰赛(每一轮比赛在参加人

数是奇数时，让一人轮空），共需进行多少场比赛方可决出优胜者（一场比赛指两人的一次对垒）。

解 由于一场比赛对应一个被淘汰者，并且反之也真，那么比赛场数与被汰者人数应当是相等的。由于优胜者只有一人，全部被淘汰者是100人，因此要进行100场比赛方可决出优胜者。

评注 本题使用了一一对应技术。若不用这一技术，而对每轮比赛的场数逐步进行计算，其笨拙是可以想象的：第一轮赛50场，赛后留下50名优胜者和一名轮空者；第二轮赛25场，赛后留下25名优胜者和一名轮空者；第三轮赛13场；第四轮赛6场；第五轮赛3场；第六轮赛2场，第七轮赛1场，共计

$$50+25+13+6+3+2+1=100(\text{场})$$

下面题1.6～1.11都是一一对应技术应用的例题。在这些例题中，一一对应技术都用于模式化归。

1.6 将八个“车”放在 8×8 的国际象棋棋盘上，如果它们两两均不能“互吃”，那么称八个车处于一个“安全状态”。问共有多少种不同的安全状态。

解 八个车处于安全状态当且仅当它们处在不同的八行和八列上。我们可以用1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8的一个排列 a_1, a_2, …, a_8 对应于一个安全状态，使 a_i 表示第 i 行的第 a_i 格上放置一个车。这种对应显然是一一的，因此安全状态的总数恰等于这八个数的排列总数 $8!=40320$。

评注 本题当然可以用乘法原则直接求解，即第一行车有8种放置方式，第二行则有7种，……，而最后一行只有一种放法。因此放置成安全状态的放法共计 $8\cdot 7\cdot\cdots\cdot 1=40320$ 种。这里使用一一对应来解这么个简单的问题，目的在于介绍模式化归的意义和方式。

1.7 从 k 个元素 1, 2, …, k 中取 r 个元素，允许各个元素重复选取。证明共有 $C(k-1+r,\ r)$ $\left(\text{即}\binom{k-1+r}{r}\right)$种不同的选取样本。

证 设 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r$ 是取自 1, 2, …, k 的一种选取样本，并设$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r$。令

$$b_i=a_i+i-1\quad(1\leqslant i\leqslant r)$$

从而 $b_1=a_1,\ b_2=a_2+1,\ b_3=a_3+2,\ \cdots,\ b_r=a_r+r-1$。显然

$$1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_r\leqslant k+r-1$$

即 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r$ 是取自 $k+r-1$ 个元素 1, 2, …, k, $k+1$, …, $k+r-1$ 的一个样本。反之，对任一这样的选取样本 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r$，总可作出取自 1, 2, …, k 的一个选取样本 $a_1=b_1,\ a_2=b_2-1,\ \cdots,\ a_r=b_r-r+1$。这就说，两种选取方式的选取样本是一一对应的，也就是说，从 k 个元素里允许重复地选取 r 个元素的选取样本总数等同于从 $k+r-1$ 个元素里选取 r 个不同元素的选取样本总数 $C(k+r-1,\ r)$。

评注 这是重复组合计数公式的一种推导方法。由于用了一一对应的技术，推导显得简明优美。其它推导方法见第二章。

1.8 设集合 A 有 n 个元素，证明集合 A 上的偏函数（即部分函数）共计$(n+1)^n$个。

证 我们知道集合 A 到集合 B 的函数（全函数）个数是$|B|^{|A|}$(建议读者证明这个结论，这里$|A|$，$|B|$表示集合 A, B 中元素的个数)。现设

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\},\ B=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b\}$$

以下建立 A 上偏函数与 A 到 B 的函数之间的一一对应。

对任一 A 上偏函数 f，定义函数 g: $A\to B$，有

$$\begin{cases} g(x)=f(x), & \text{当 } f(x) \text{ 有定义时} \\ g(x)=b, & \text{当 } f(x) \text{ 没有定义时} \end{cases}$$

反之，对任一函数 $g: A\to B$，定义 A 上偏函数 f，

$$\begin{cases} f(x)=g(x), & \text{当 } g(x)\neq b \text{ 时} \\ f(x) \text{ 无定义}, & \text{当 } g(x)=b \text{ 时} \end{cases}$$

不难理解，对应是一一的，因此 A 上偏函数的个数等于 A 到 B 的函数个数，即 $|B|^{|A|}=(n+1)^n$ 个。

评注 利用本题的术语，题 1.4 可以表述为一个典型的组合学命题。若集合 A，B 满足：$|A|=n$，$|B|=n+1$，$n\geqslant 3$，那么 A 上偏函数的个数不多于从集合 B 到集合 A 的函数（即以 B 为定义域，A 的子集为值域的函数）个数。因为据本题结论，A 上偏函数的个数恰等于从集合 A 到集合 B 的函数个数。

1.9 称 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$ 为正整数 n 的一个**剖分**，如果 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是正整数，$n=m_1+m_2+\cdots+m_k$ 并且 $n\geqslant m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_k>0$。这里，$m_i$ 称为剖分中的一项，k 称为剖分的**项数**。不同剖分的个数称为**剖分数**。

(1) 证明：把 n 分拆成不多于 k 项的剖分数，等于把 n 分拆成最大项不大于 k 的剖分数。

(2) 证明：把 n 分拆成最大项为 k 的剖分数等于把 n 分拆成 k 项的剖分数。

证 (1) 显然每一项数不多于 k 的 n 的剖分，对应于一个形如图 1.1 的图象，当我们将该图象翻转成图 1.2 中的图象时，它表示另一个剖分。不难看出，这后一剖分的每一 m_i（即图象中每一行的方格数）都不大于 k，因为原剖分项数不大于 k，而该项数是后一剖分的最大项。反之，给定各项 $m_i\leqslant k$ 的剖分，可作出形如图 1.2 中的图象，若将它翻转成图 1.1 中的形式，便可得到一个相应的项数不多于 k 的剖分。上述对应的一一性是直观

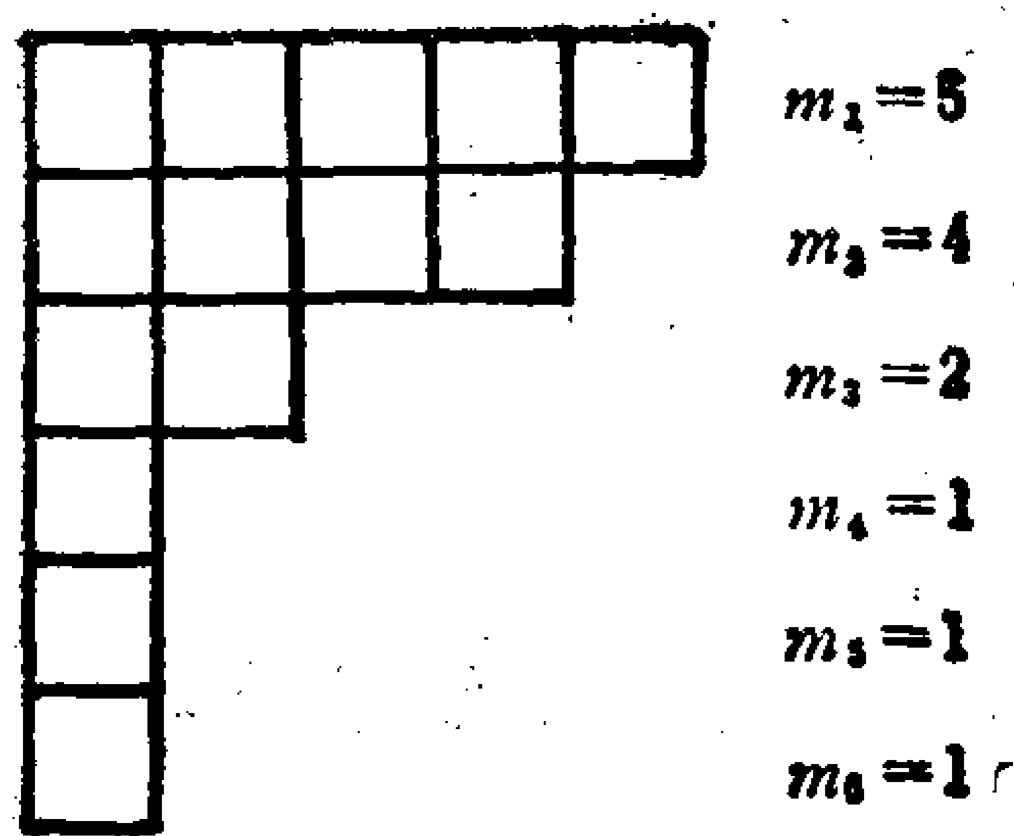


图 1.1

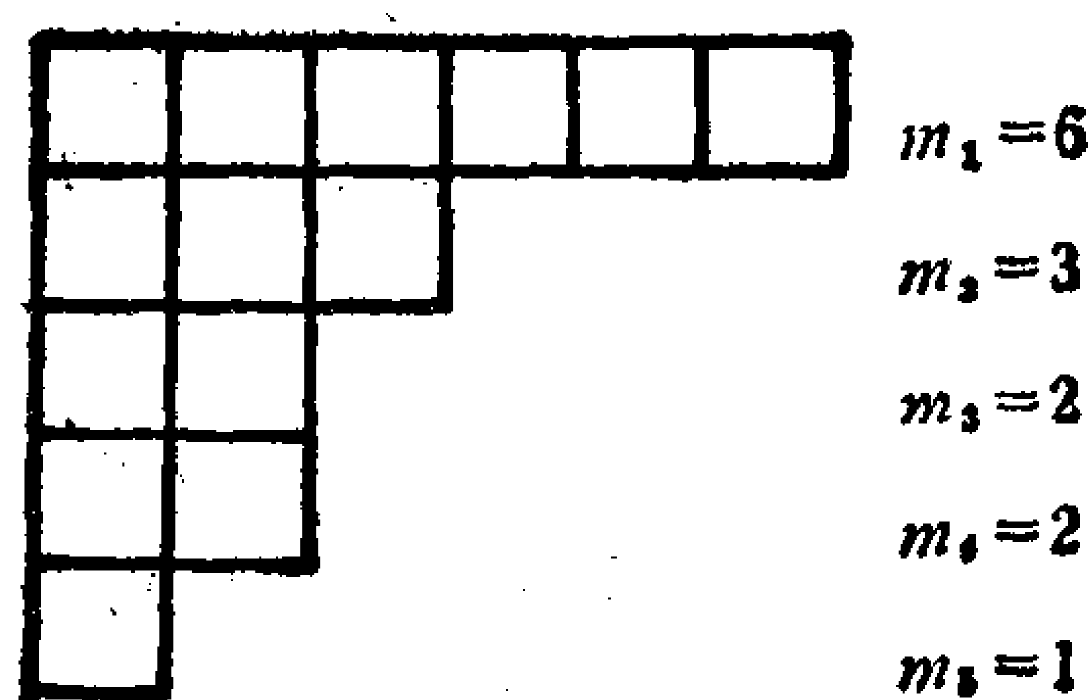


图 1.2

的，因此命题(1)得证。

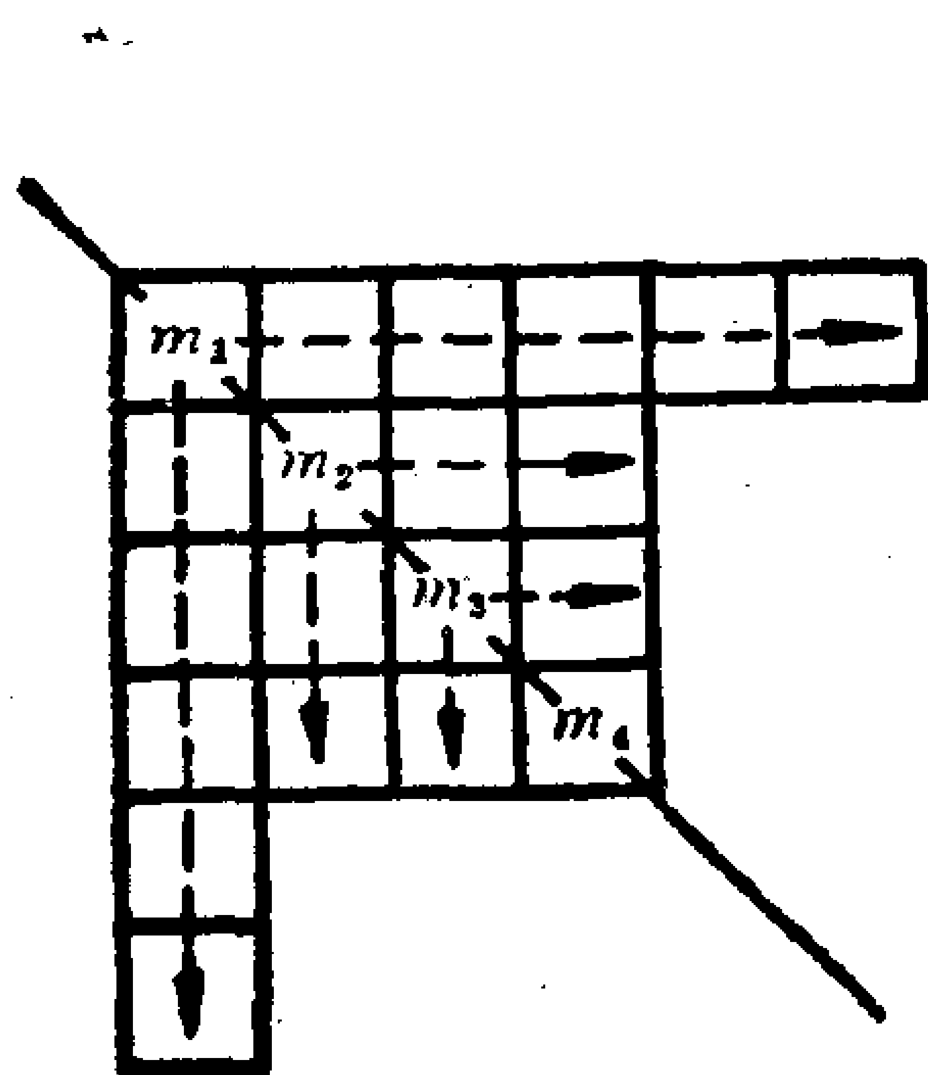
(2) 当剖分满足 $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_k > 0$ 时，它所对应的图象必定恰有 k 行，因而翻转后的图象的第一行恰有 k 格，翻转后的图象对应于 $m_1=k$ 的一个剖分，且其它各项小于 k。反之，一个 $m_1=k$ 的剖分所对应的图象的第一行必有 k 格，那么该图翻转后便是一个恰有 k 行的图象，它对应于一个 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 均非零的有 k 项的剖分。命题(2)得证。

评注 上述图象称为 **Ferrer 图象**。

1.10 我们把一些剖分称为是**自共轭的**，如果它们的 Ferrer 图象翻转后所对应的剖分与原剖分相同。证明自共轭的剖分个数等于限定诸 m_i 均不等且均为奇数的剖分数。

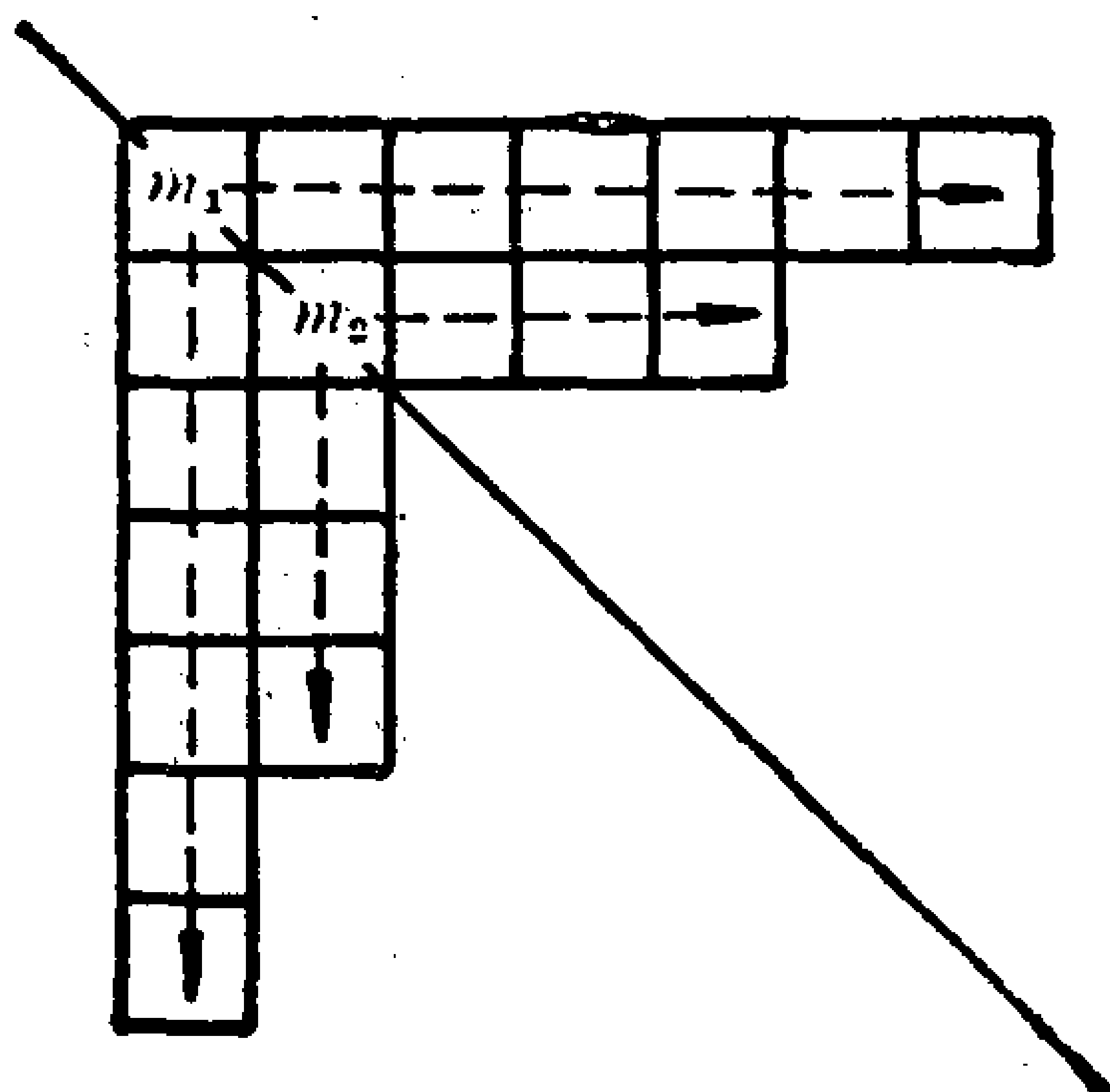
证 很明显，一个剖分是自共轭的当且仅当它的 Ferrer 图象是关于对角线对称的，如图 1.3 所示。给定一自共轭剖分的 Ferrer 图象，可如下构作唯一的各项不等且均为奇数的剖分：取 m_1 为第一层方格数，m_2 为第二层方格数，如此等等(每层方格数是横向方格数加上竖向方格数减 1，参阅图 1.3，那里 $m_1=11$, $m_2=5$, $m_3=3$, $m_4=1$)。反之，给定各项均不等且均为奇数的剖分(例如 $m_1=13$, $m_2=7$)，可用诸 m_i 构成各个层次的方格，由于 m_i 均为奇数，可使各层的横向方格数等于竖向方格

数$\binom{m_i+1}{2}$。又由于 m_i 递减，可使各层自上而下迭合构成 Ferrer 图象(参阅图 1.4)，因而所得图象是关于对角线对称的，从而对应于一个自共轭的剖分。这里建立的一一对应证明了本命题的结论。



$m_1=11$, $m_2=5$, $m_3=3$, $m_4=1$, $n=20$

图 1.3



$m_1=13$, $m_2=7$, $n=20$

图 1.4

评注 剖分问题在第六章中将得到更加详尽的讨论。

***1.11** 一个售货亭前排着 $2n$ 个人的队伍等候购物，假定他们都购买价值五分的同一货物。其中 n 个人持 5 分货币，n 个人持一角货币，而售货员开始发售货物时没有零钱。问有多少种排队方式，可使得售货员能依次顺利出售货物，而不出现找不出钱的尴尬局面。

解 依照一一对应的观点，本问题等价于下列问题：

用 n 个 0 和 n 个 1 排成一列，有多少种排列方式，能使这种 0, 1 序列的任意前 i 个($1\leqslant i\leqslant 2n$)数字中 0 的个数总不少于 1 的个数(我们称序列的这一性质为前束性质)。

再用一一对应的观点将问题转化为图 1.5 中从(0, 0) 点到

(n, n)点的递增路径问题。把0看作右移一步，把1看作上移一步，那么一个n个0与n个1的0,1序列恰对应于一条(0,0)点到(n, n)点的递增路径（即限定向右向上行走的路径）。不难明白，一个满足前束性质的0, 1序列恰对应于一条不越过对角线OA的递增路径。下面我们来计算这种递增路径的条数，当然其结果也就是本题的解，它等于(0, 0)点到(n, n)点的所有递增路径条数减去越过对角线OA的递增路径条数。

首先，从(0, 0)点到(n, n)点的$2n$步组成的路径完全取决于n步右移步子(或上移步子)在$2n$个时刻中的那n个时刻走，因此这些路径的总数目是$C(2n, n)$条(参见题2.22)。

其次，为了计算越过OA的递增路径条数，我们在它们与(0, 0)点到$(n+1, n-1)$点的递增路径之间建立一个一一对应。给定一条越过OA的递增路径，可如下唯一地作出一条从(0, 0)点到$(n+1, n-1)$点的路径(参阅图1.6)：以给定路径的第一个越过OA的步子k为界，前面各步(包括步子k)以OA为轴作对

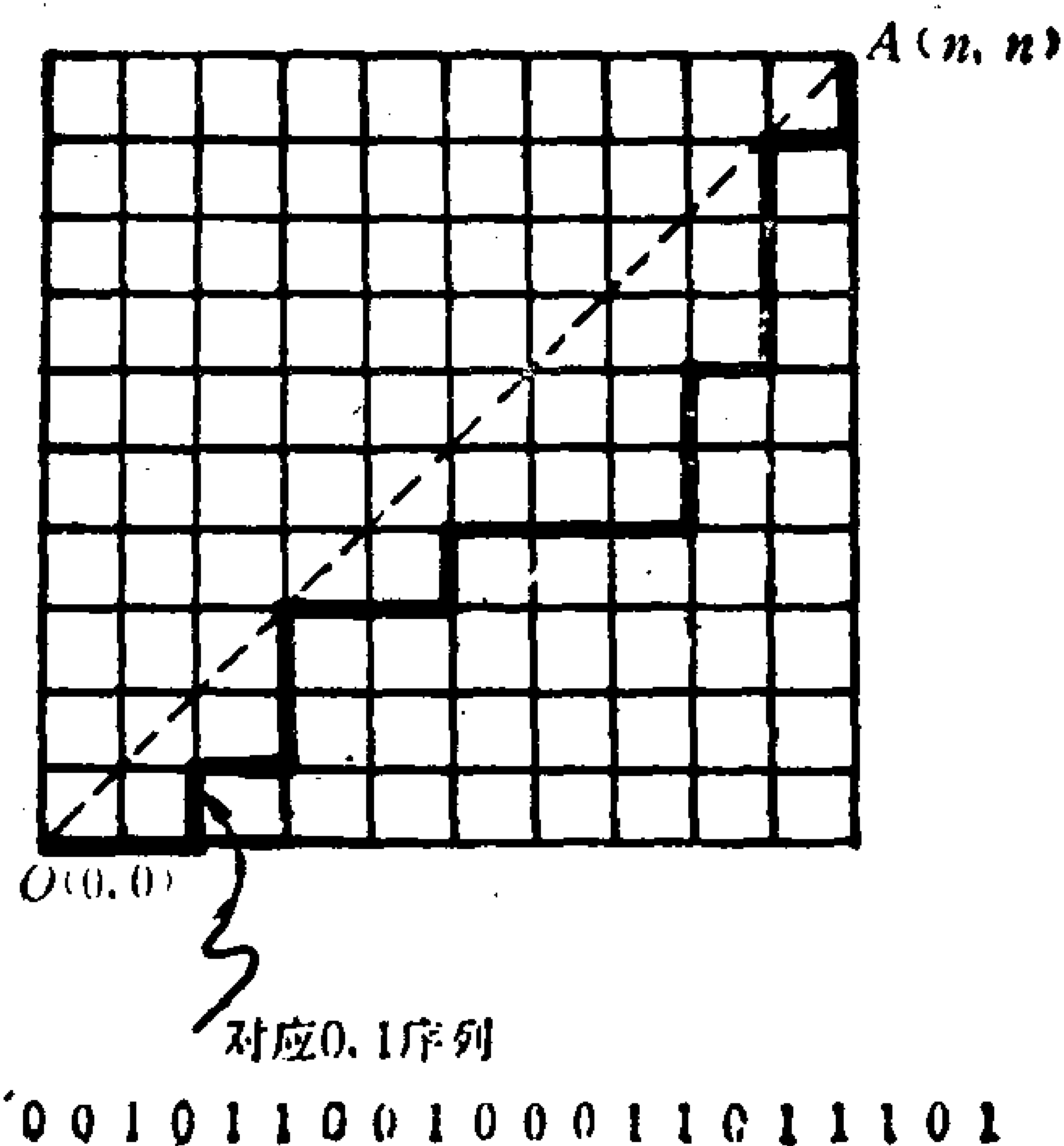


图 1.5

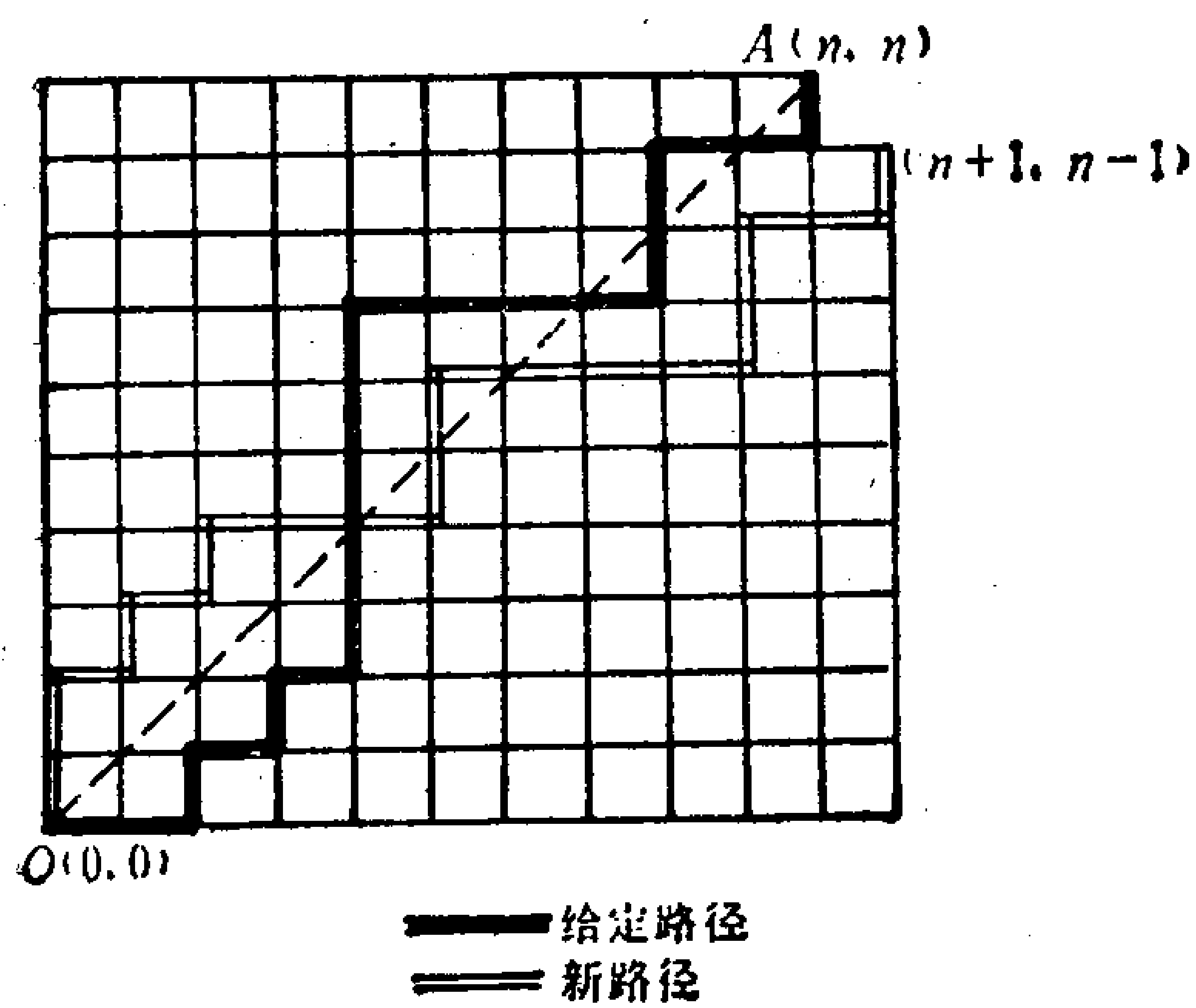


图 1.6

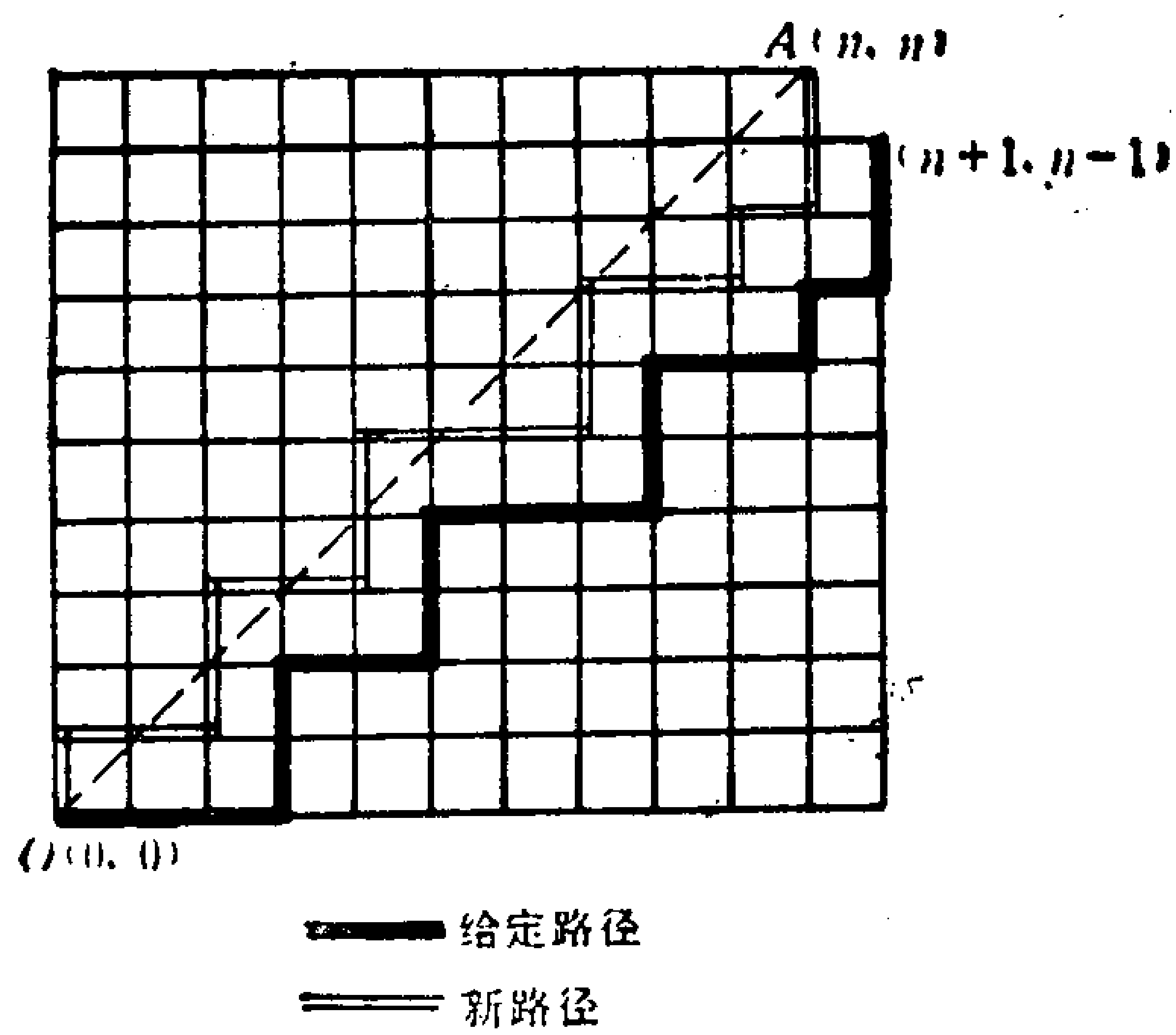


图 1.7

称路径，成为新路径的前半部分。新路径的后半部分完全平行于原路径的后半部分，紧接新路径的前半部分。作法的唯一性是明显的。由于步子 k 从上移变为右移，使新路径中右移步子比上移步子多了两个，因而新路径是从 $(0, 0)$ 点到 $(n+1, n-1)$ 点的递增路径。反之，当给定一条从 $(0, 0)$ 点到 $(n+1, n-1)$ 点的递增路径，我们可以用第一个使右移步子数目比上移步子数目多的步子 k 为界，仿上述方式作出一条从 $(0, 0)$ 点到 (n, n) 点的新路径(参阅图 1.7)。由于步子 k 由右移改为上移(而前面诸步中右移和上移的步数相等)，新路径必在此越过 OA，并且由于新路径的右移和上移步数相同，它是一条从 $(0, 0)$ 点到 (n, n) 点的递增路径。作法的唯一性也是明显的。两种路径间的一一对应说明，越过 OA 的递增路径数目等于从 $(0, 0)$ 点到 $(n+1, n-1)$ 点的递增路径数目，而后者等于 $2n$ 个步子中选取 $n+1$ 个右移步子的选择方式的数目，即

$$C(2n, n+1) = C(2n, n-1)$$

因此本题的解是：

$$C(2n, n) - C(2n, n-1)$$
$$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!}$$
$$= \frac{1}{n+1} C(2n, n) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} C(2n, n)$$

评注　一一对应技术在本题取得了极大的成功。本题是著名的 Catalan 数的一个模式，它的其它模式和其它解法读者在以后几章中将陆续遇到。本题事实上给出了三个问题的解：售货亭问题、有前束性质的 0, 1 序列问题、不越过对角线的递增路径问题。

1.12　设 n 位客人在晚会上每人与他人握手 d 次，d 是奇

数。证明 n 是偶数。

证 由于每一次握手均使握手的两人各增加一次与他人握手的次数，因此 n 位客人与他人握手次数的总和 nd 是偶数——握手次数的两倍。已知 d 是奇数，那么 n 必定是偶数。

评注 从本题开始，介绍应用奇偶性等数论性质解题的例子。读者不久就会体会到，奇偶性看起来简单，但应用方式却是多种多样的，熟练掌握亦非易事。此外，本题也可以化归为图论问题来解。将客人看作图的结点，一次握手相当于两结点间的一条边，而每个客人握手次数可解释为各结点的度，本题便是一个图论定理的特例，该定理断言：图的奇数度结点数必定是偶数个。该定理的证明可仿上进行。

1.13 设 n 是一奇数。试证：一个写为 n 进制的自然数 m 是奇数，当且仅当它的 n 进制表示中奇数数字出现奇数次。

证 设自然数 m 的 n 进制表示是：

$$\dot{v}_0 n^k + \dot{v}_1 n^{k-1} + \cdots + \dot{v}_{k-1} n + \dot{v}_k n^0$$

显然 n^k, n^{k-1}, $\cdots$, n, n^0 全为奇数。若 $\dot{v}_0$, $\dot{v}_1$, $\cdots$, $\dot{v}_k$ 中有奇数个奇数，其余为偶数，那么 m 便是奇数个奇数及若干个偶数的和，从而 m 是奇数。若 $\dot{v}_0$, $\dot{v}_1$, $\cdots$, $\dot{v}_k$ 中有偶数个奇数，其余均为偶数，那么 m 便是偶数个奇数及一些偶数的和，因而 m 是偶数。

1.14 正整数 n 的因子个数(包括 1 和 n)是奇数的充分必要条件：n 为一个完全平方数。

证 注意一个简单的事实：当 $n=m_1\cdot m_2$ 时 m_1, m_2 同时是 n 的因子，并总可设 $m_1\leqslant\sqrt{n}\leqslant m_2$。当 n 是非完全平方数时，$m_1<\sqrt{n}<m_2$。因此，这时 n 的因子在 $\sqrt{n}$ 以下和 $\sqrt{n}$ 以上成对地出现，而 $\sqrt{n}$ 不是 n 的因子，因而 n 恰有偶数个因子。当 n 为完全平方数时，$\sqrt{n}$ 是 n 的因子，而 $\sqrt{n}$ 以下及 $\sqrt{n}$ 以上 n 的因子仍然成对地出现，因此 n 的因子数是奇数。

1.15 (a) 在一张纸上画着一个圆。一只小虫在纸的某处出发爬行，若它在一次爬行中，至爬离纸面时总计穿越了圆周 6 次。问该虫从原来所在位置起爬行，爬离纸面至少要穿越圆周几次。

(b) 在一张纸上画着如图 1.8 所示的一条封闭曲线。一只虫在纸上某处出发爬行；在它爬离纸面时总计穿越了曲线 61 次。问该虫从原处出发，爬离纸面至少要穿越曲线多少次。

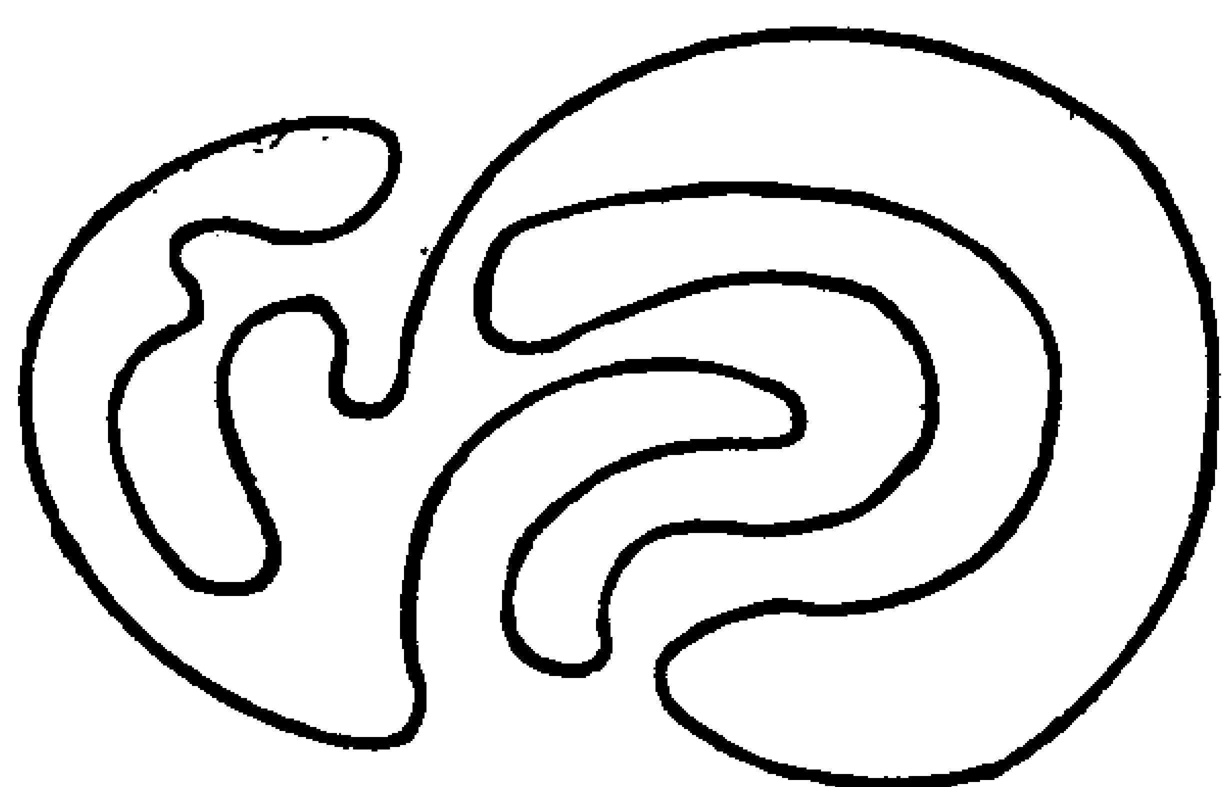


图 1.8

解 (a) 最少穿越圆周零次。因为该虫爬离纸面时穿越圆周 6 次，6 是偶数，所以它原处于圆周之外，从而该虫可能不经过圆周就直接爬离纸面。

(b) 最少穿越曲线一次。因为该虫爬离纸面时穿越曲线 61 次，61 是奇数，所以它原处于曲线所界区域之中，从而该虫可能穿越曲线一次后径自爬离纸面。

1.16 图的 **Hamilton** (哈密尔顿)路径 (回路) 是指经过图中每一结点一次且仅一次的路径(回路)。

(a) 证明图 1.9中的图没有 Hamilton 路径和 Hamilton 回路。

(b) 证明图 1.9 中任何一条不重复经历任何一个结点的路径，至多含有全图 21 个结点中的 19 个。

证 如图 1.10 对图 1.9 中图的各结点标记字母 A, B, 使相邻的结点标记不同的字母。不难发现，21 个结点中 12 个标记 A, 9 个标记 B。

(a) 如果此图有 Hamilton 路径(回路)，那么它必定相间

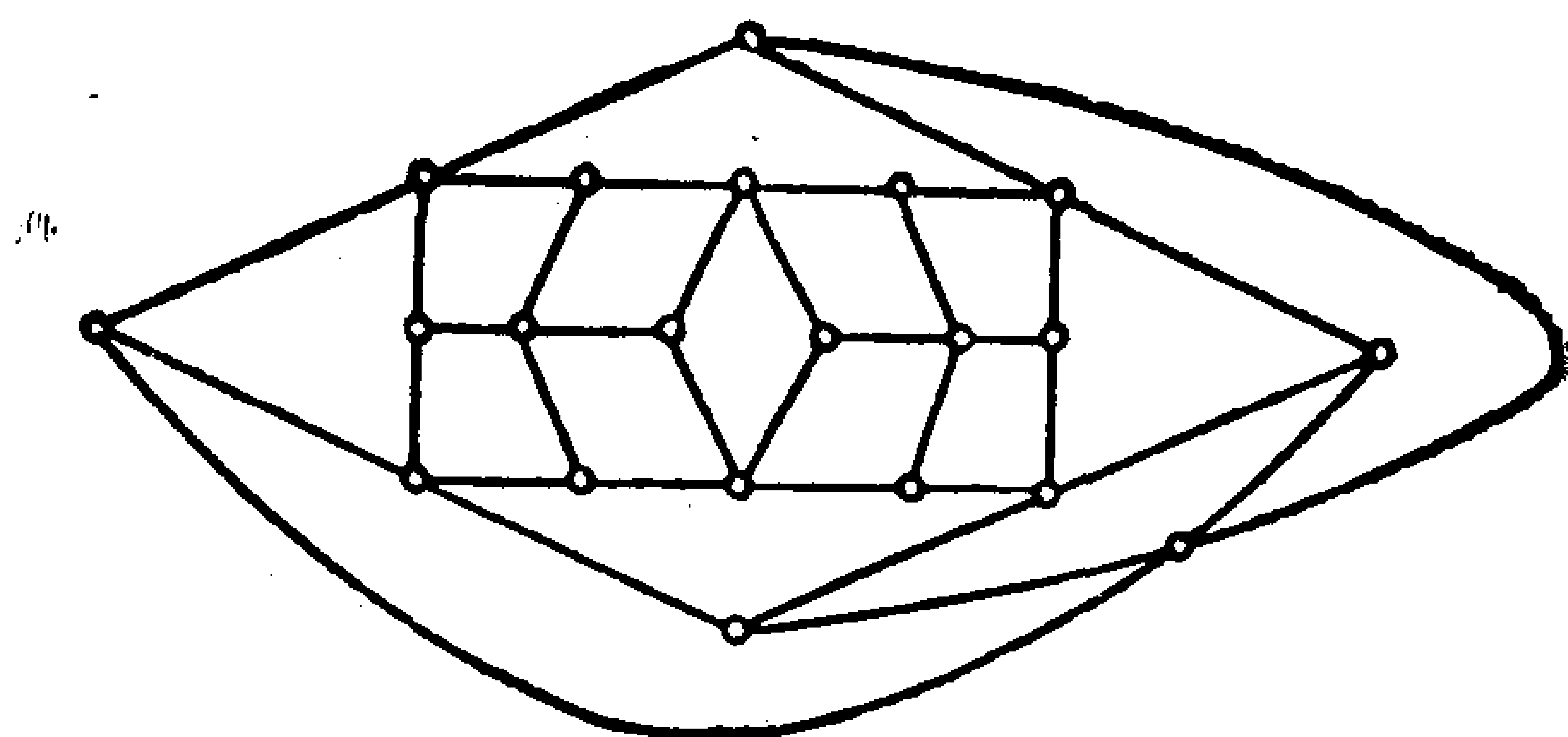


图 1.9

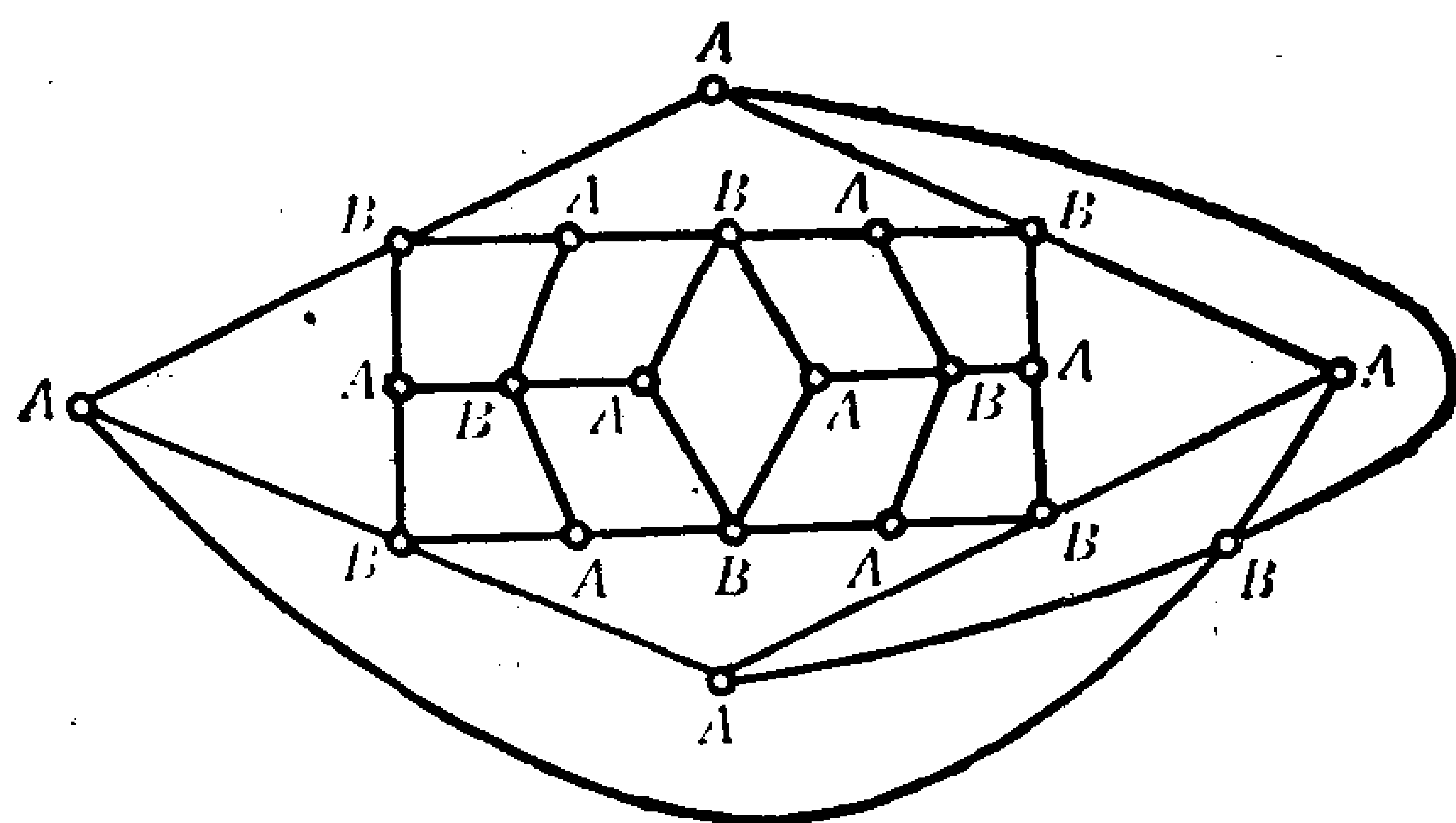


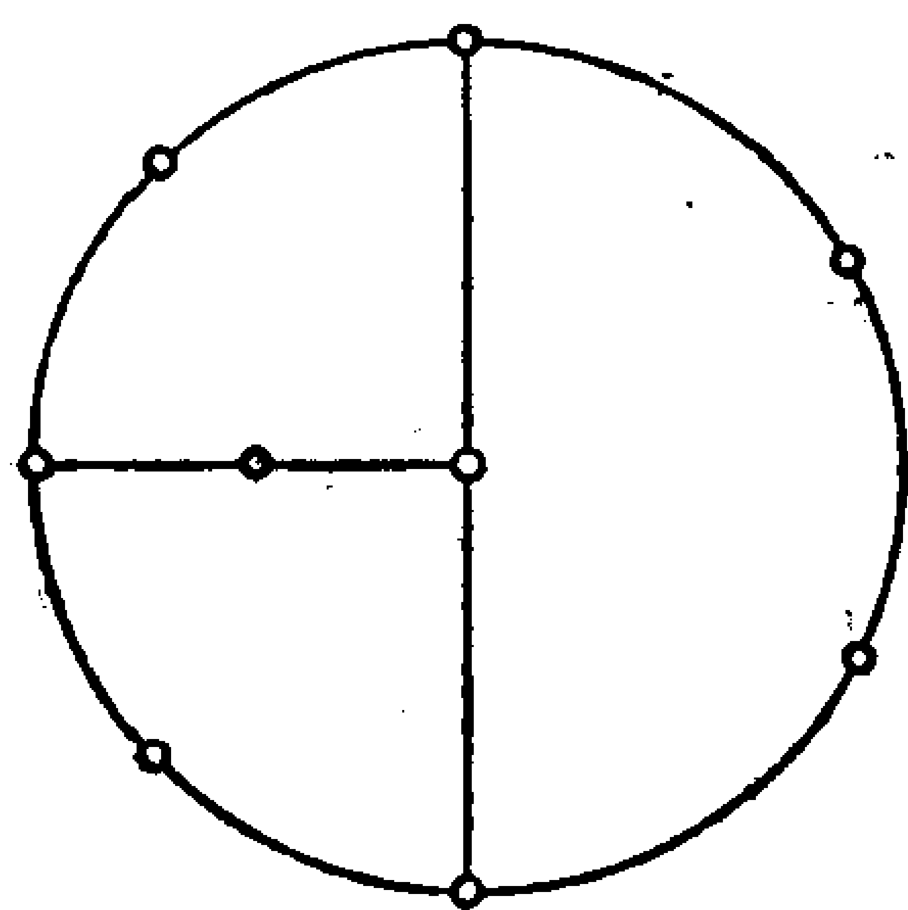
图 1.10

经历标记 A 和 B 的结点，因而经历标记 A 和 B 的结点个数至多相差 1（相等）。我们知道 Hamilton 路径（回路）历遍图的所有结点，因此全图结点中标记 A 和标记 B 的结点应至多差 1 个（数目相同），这与事实不合，事实上标记 A 的结点多了 3 个。因此，原图无 Hamilton 路径（回路）。

(b) 如果此图有一条不重复地经历 20 个或 21 个结点的路径，那么由于这条路径相间经历标记 A 和 B 的结点，它必定至少经过 10 个标记 B 的结点，但原图只有 9 个这样的结点。因此，此图中不重复经历任何结点的路径，至多含 19 个结点。

评注　本方法只适用于证明 Hamilton 路径(回路)不存在，不能由标记的 A, B 数目至多差 1(相同)而断定有 Hamilton 路径(回路)。另外，当所给图无法作这种标记时，这一方法通常不再适用，但有时也可用删除或添加二度的结点的方法来弥补，下题便是一例。

1.17　图中的一条 Euler(欧拉)路径(回路)，是指一条经过图中每条边一次且仅一次的路径(回路)。证明图 1.11 中的图既无 Euler 路径，又无 Hamilton 回路。


图 1.11

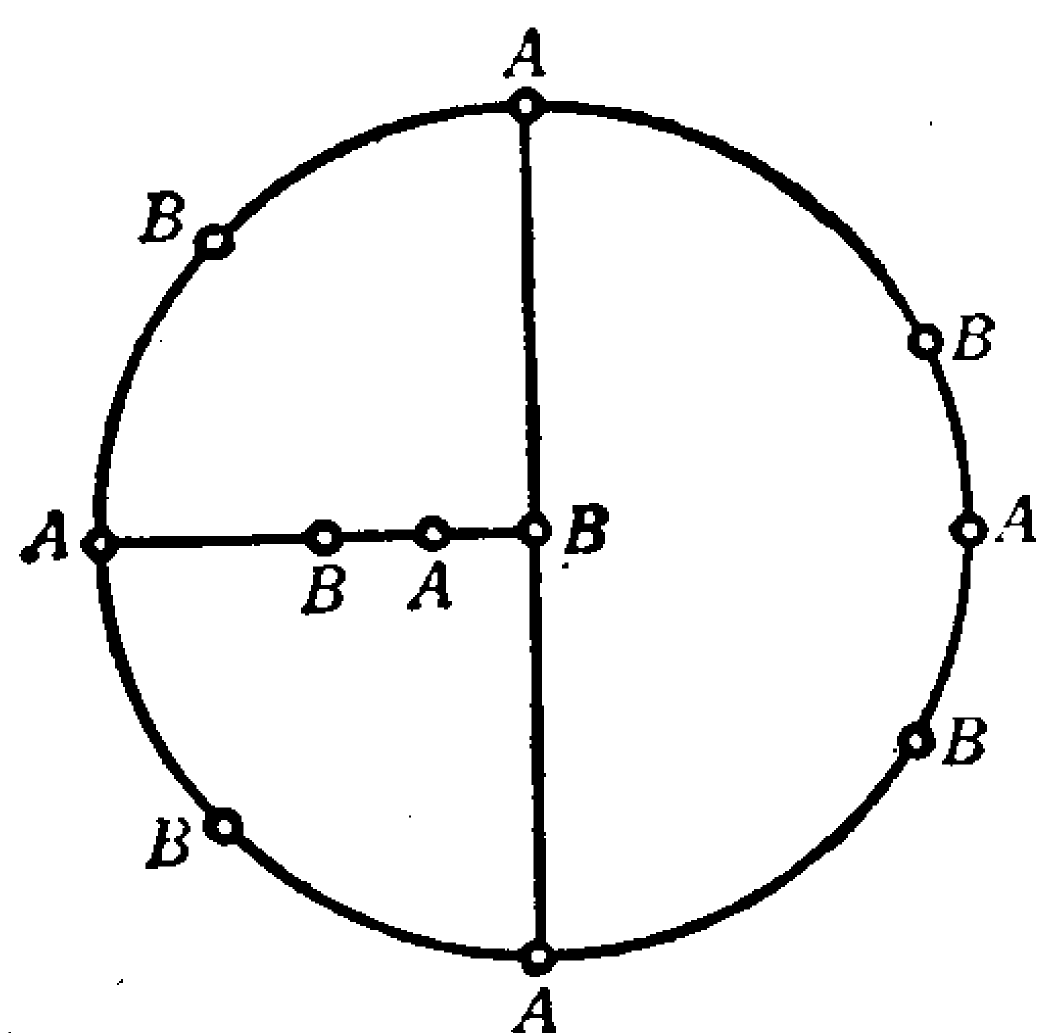


图 1.12

证　由于本图有 4 个奇数度的结点，据图论的一个基本事实，本图没有 Euler 路径，更没有 Euler 回路。

给图 1.11 增加两个结点，并给各结点相间标记 A, B, 如图 1.12 所示。现在 A 的个数比 B 的个数少 1，因此图 1.12 中没有 Hamilton 回路(因为这样的回路一定经历同样多个 A 和 B)。进一步我们可以断定图 1.11 亦无 Hamilton 回路，因为任一这样的回路无疑要经历图 1.12 中的新添结点(这些结点都是添在原图 Hamilton 回路必经的边上的二度结点)，这将导至图 1.12 也有 Hamilton 回路的结论，矛盾。

1.18 证明图1.13中的菱形12面体表面上没有Hamilton路径。

证 我们注意到12面体的每个顶点的度或者是4或者是3。如图1.13，我们将各顶点度数标在图上。不难看出，每个4度的顶点邻接的顶点都是3度的，反之每个3度的顶点邻接的顶点都是4度的。假如12面体表面有Hamilton路径，那么它必定相间经历3度和4度的顶点。由于路径要经历全部14个顶点，因此必定经历7个4度顶点，但12面体上只有6个4度的顶点。故该图中不可能有Hamilton路径。

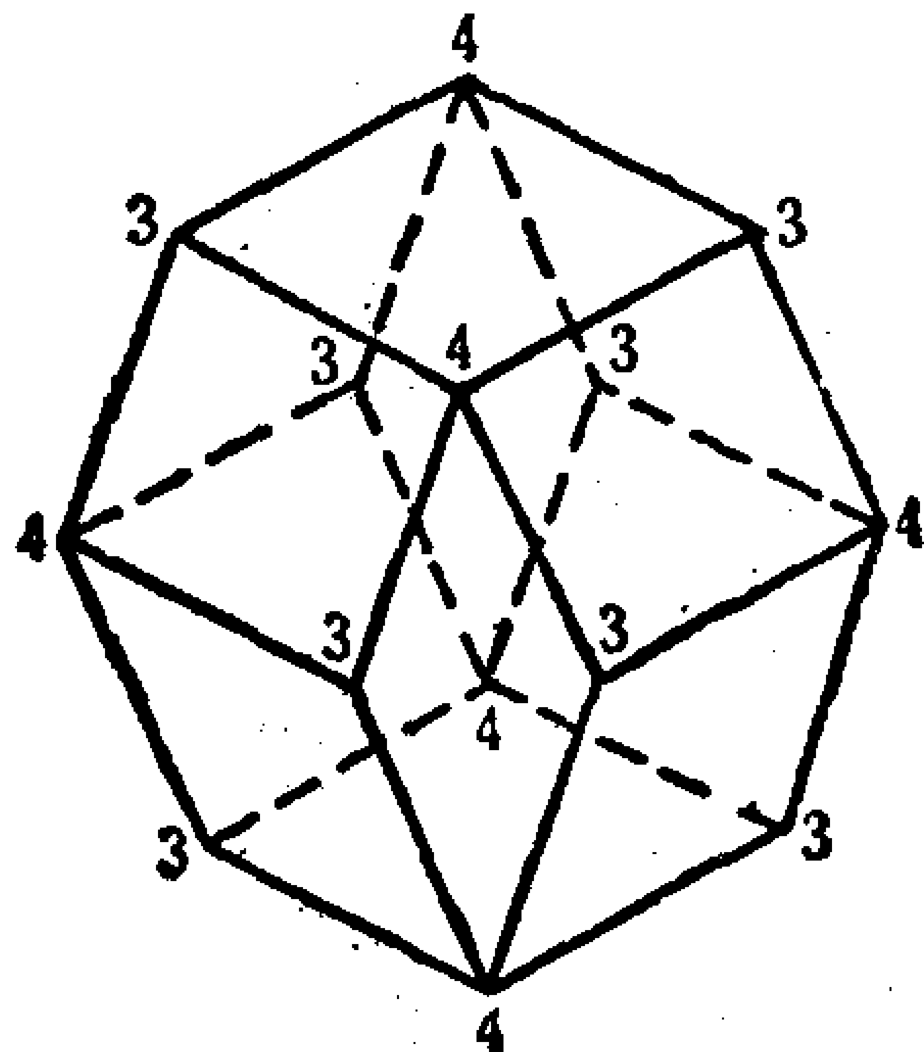


图 1.13

1.19 有n盏灯在一走道上排成一列，它们都关闭着。某人在这一走道上往返n次。第一次通过走道时拉动每一盏灯的开关，然后回到走道端点处。第二次通过走道时拉动第二、四、六、…盏灯的开关，再回到端点处。第三次通过走道拉动第三、六、九、…盏灯的开关，如此等等。问此人往返n次后，哪些灯的开关仍然关闭着，哪些灯已经亮了。

解 考虑第i盏灯($1\leqslant i\leqslant n$)。不难明白，若i有k个因子(包括1和i)，则第i盏灯的开闭状态被改变k次，因此，它仍然处于关闭状态当且仅当k是偶数。据题1.14，k是偶数当且仅当i不是完全平方数。故当i不是完全平方数时，第i盏灯的开关仍然关闭着；而当i是完全平方数时，第i盏灯最终被打开。

1.20 如图1.14，将一张国际象棋的棋盘的两角截去。

(a) 假设一块多米诺骨牌恰覆盖棋盘两格。问是否可用这种骨牌互不重迭地将这张残缺的棋盘完全覆盖(没有一格未被覆盖，也没有骨牌伸出棋盘)。

(b) 有 64 间房间排列得象一张棋盘，各个房间都有通向邻间的门。问一个人是否可能从一个角上的房间出发，走过每一个房间一次且仅一次，而最终从对角上的那个房间离去。

解 (a) 不能。因为一块骨牌必定覆盖一个白格和一个黑格，而这种残缺棋盘的白方格多于黑方格，所以用互不重迭的骨牌不能完全覆盖此棋盘。

(b) 不能。除去对角两间后的房子可看作一张同图 1.14 的残缺棋盘。如果此人能从一角出发按要求遍历所有房间(它们已被看作黑白方格)后从对角离去，那么此人走过的路径(不考虑两角上的房间)必定相间经过白、黑方格，因而经过的白格至多比黑格多一个。但是，实际上白格比黑格多两个。这就是说此人不可能按要求遍历所有房间。

1.21 从国际象棋棋盘上任意挖去一个白格和一个黑格(如图 1.15 所示，A, B 分别表示挖去的黑、白方格)。证明：它可被31块多米诺骨牌互不重迭地完全覆盖。

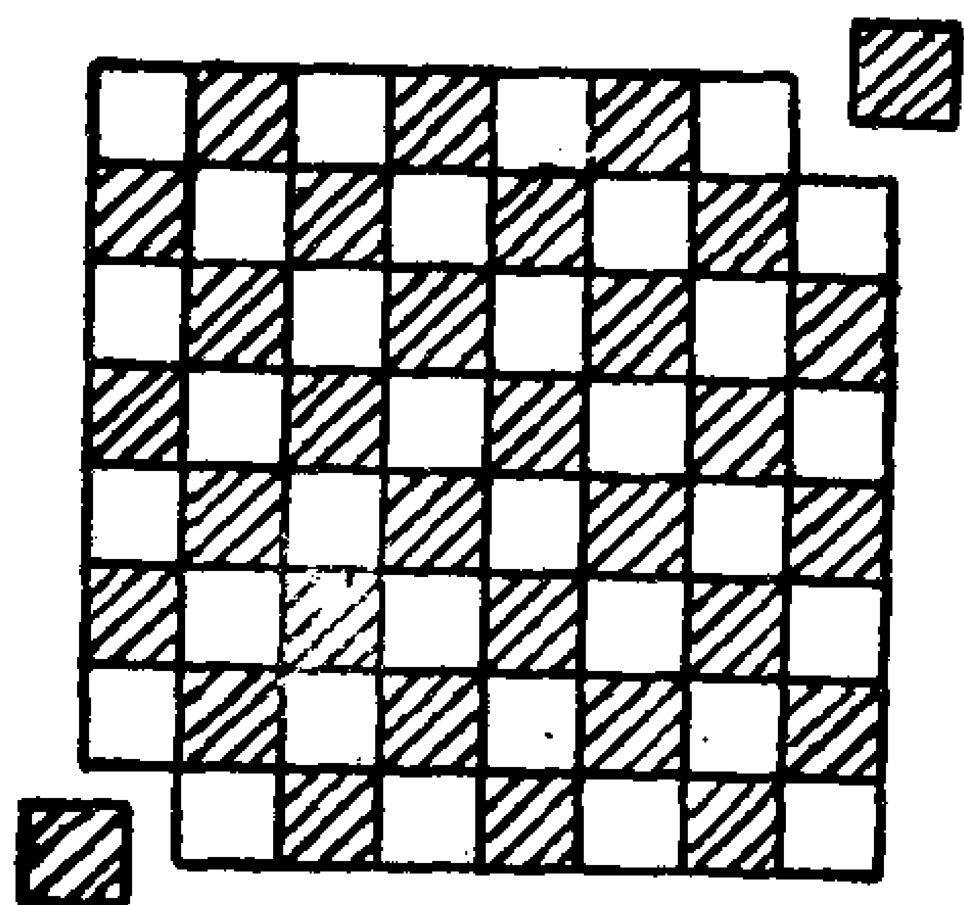


图 1.14

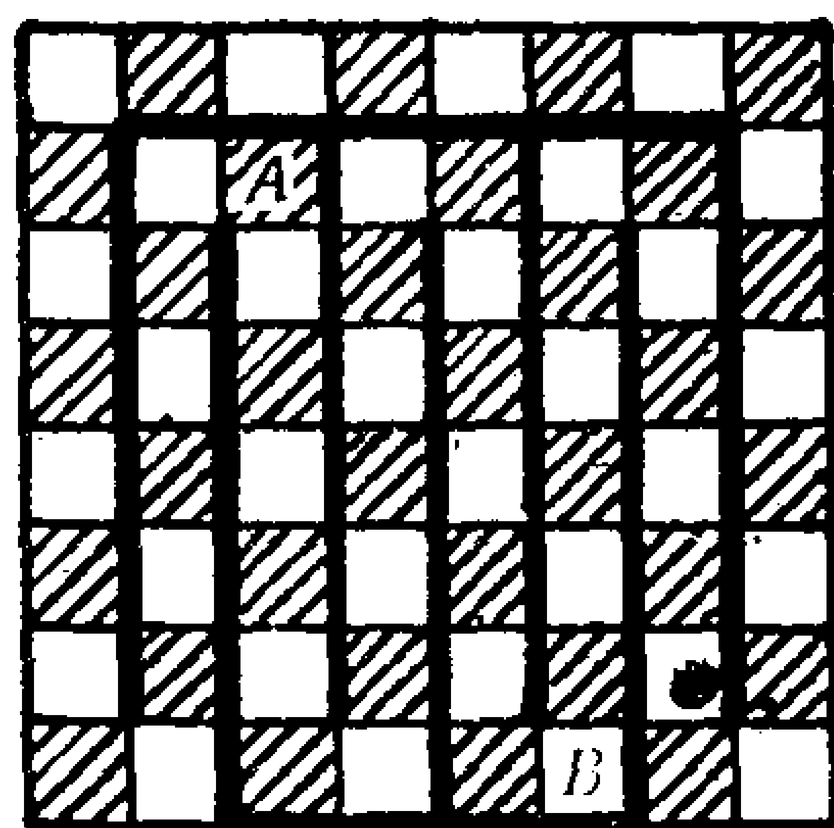


图 1.15

证 如图1.15所示，粗黑框架把棋盘隔成一个"迷宫"，它的任何两处是可以互相到达的，且有两条互相到达的通道。例如，从A出发，可先向左后向下沿边线走向B，或者向下走两个U字形到达B。由于A处于黑格，B处于白格，而且每条通道上都是黑白格相间，因此每条通道都可以用骨牌完全覆盖，从而整个残缺棋盘也是可以用骨牌完全覆盖的。由于残缺棋盘共62格，因此恰需31块多米诺骨牌。

*1.22 一个6×6棋盘被18块多米诺骨牌互不重迭地完全覆盖。证明可以将覆盖后的棋盘切割成两个矩形而不切割到任何一块骨牌。

证 设$l_i(1\leqslant i\leqslant5)$和$h_j(1\leqslant j\leqslant5)$分别表示水平切割线和垂直切割线。若本命题不真，那么每一水平切割线和垂直切割线都至少切割一块骨牌。事实上，我们可证这种切割线切割骨牌的块数必定是偶数。若l_i(或h_j)切割奇数块骨牌(如图1.16所示，阴影部分表示被切割的骨牌)，那么l_i以上部分，除去被切割到的半块骨牌所盖的奇数个方格，恰被多米诺骨牌完全覆盖。但这是不可能的，多米诺骨牌不可能完全覆盖奇数个方格(覆盖部分格数等于上部所有偶数个方格减去奇数个半块骨牌覆盖的方格)。这样，

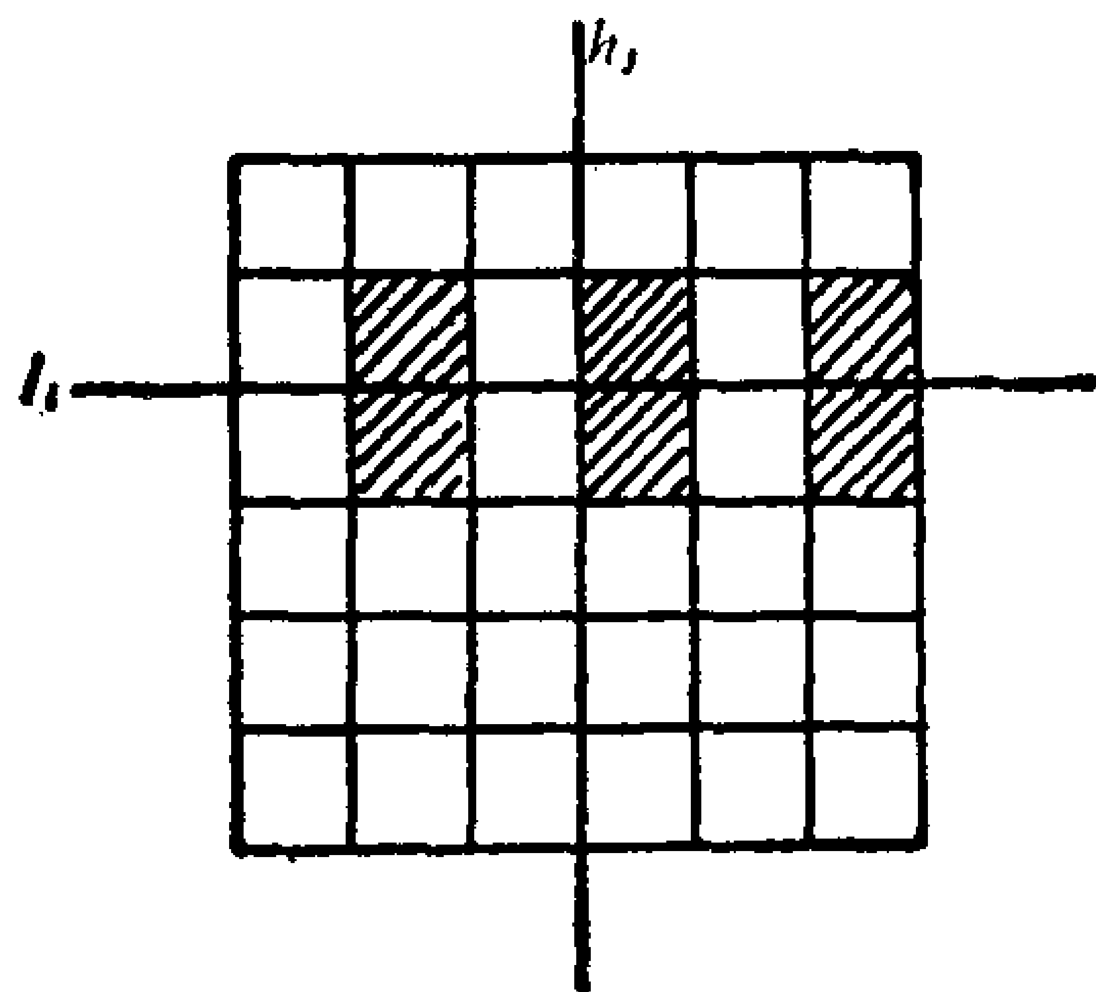


图 1.16

我们可以断定l_i以及h_j都至少切割两块骨牌。又，l_i所切割的骨牌，$l_j(j\neq i)$及诸h_j都不会再切割到。因此，覆盖6×6棋盘的骨牌至少有20块。这与18块骨牌可以覆盖6×6棋盘的明显事实相矛盾。故假设不能成立，命题得证。

评注 对 8×8 及 10×10 的棋盘，本题的结论是不成立的。读者可自行构造一个 8×8 棋盘的完全覆盖，使每条水平切割线和垂直切割线都至少切割一块骨牌。

***1.23** L形骨牌指形如图1.17(*a*)所示的骨牌。L 形骨牌的完全覆盖指互不重迭的 L 形骨牌对图形的无间隙的覆盖，并且没有任何一块骨牌伸出图形之外。

(a) 证明：5×4，6×6 的矩形不可用 L 形骨牌完全覆盖。

(b) 证明：如果一个 $m\times n$ 矩形是可用 L 形骨牌完全覆盖的，那么所用的骨牌数必定是偶数。

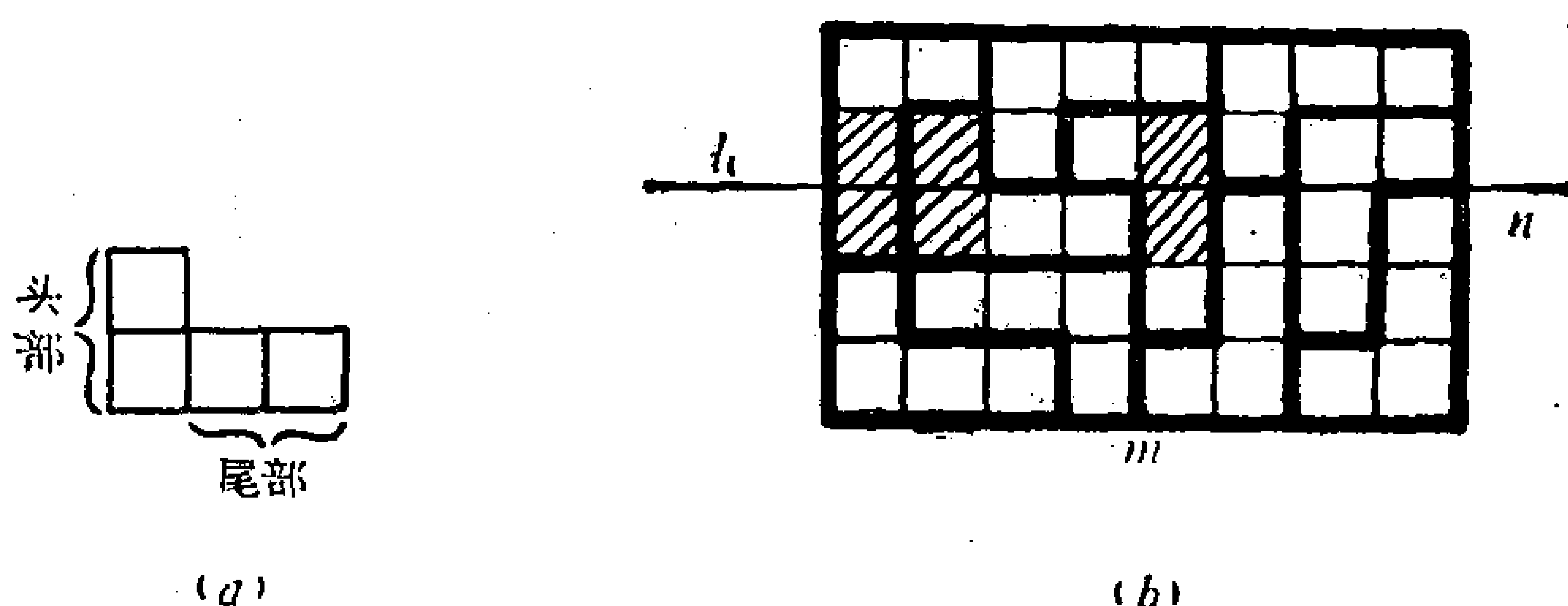


图 1.17

(c) 证明：若 m，n 均大于 3，并且 8 整除 mn，那么 $m\times n$ 矩形可用 L 形骨牌完全覆盖。

证 (a) 如果 5×4，6×6 矩形可用 L 形骨牌完全覆盖，那么它们必定被奇数块(5 块和 9 块)L 形骨牌所覆盖。这与结论(b)冲突，因此可以说(a)是(b)的简单推论。

(b) 首先注意，一块 L 形骨牌恰由两块多米诺骨牌组成，可分别称为 L 形骨牌的**头部**和**尾部**。一个 L 形骨牌的完全覆盖是一个特殊的多米诺骨牌的完全覆盖。另外，可被 L 形骨牌完全覆盖的 $m\times n$ 矩形必定有偶数个方格，故 m，n 中至少一个是偶数。

设 $m\times n$ 矩形可被 L 形骨牌完全覆盖，如图 1.17(b) 所示。设 m 为偶数。图中 $l_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 表示水平切割线。据题 1.22 的证明，l_i 必定切割到偶数个 L 形骨牌的头部或尾部。不难明白，每一 L 形骨牌都有一个并且仅有一个头部或尾部被某一 l_i 所切割，而诸 l_i 中不可能有两条同时切割一个 L 形骨牌。因此全部 l_i 所切割的 L 形骨牌的头部或尾部共计偶数个，从而覆盖矩形的 L 形骨牌也是偶数个。

(c) 注意两个事实，一是 2×4 矩形是 L 形骨牌可完全覆盖的，二是 5×8 矩形也是 L 形骨牌可完全覆盖的(见图 1.17 (b))。现设 m 可被 4 整除，n 可被 2 整除(或 n 可被 4 整除，m 可被 2 整除)，那么矩形可分为若干个 2×4 矩形，从而明显可被 L 形骨牌所覆盖；又若 m(或 n) 可被 8 整除，n(或 m) 为奇数，那么矩形可分为若干个 2×8 矩形和一个 5×8 矩形，所有这些矩形都是可用 L 形骨牌完全覆盖的。综上所述，当 m, n 均大于 3 且 8 整除 mn 时，$m\times n$ 矩形可用 L 形骨牌完全覆盖。

评注 前已指出，化归是一种重要的数学方法。在解题时，心中时常要回忆已经解决的类似问题和有关事实(就象由本题想到题 1.22 那样)。这样往往会收到意想不到的好效果。

本题(b)(c)可合并为 L 形骨牌完全覆盖的一个充分必要条件：$m\times n$ 矩形可用 L 形骨牌完全覆盖，当且仅当 mn 可被 8 整除。

1.24 单交曲线是指形如图 1.18(a) 的封闭曲线，曲线可能自己与自己相交，但同一交点处不能相交两次或两次以上。图 1.18(b) 不是单交曲线。

(a) 从一单交曲线上的任何一点出发沿曲线前进，同时给所遇到的交点依次标记 1, 2, 3, …。由于历遍曲线时每个交点要遇到两次，因此每个交点有两个标记，如图 1.18(a) 中所做的

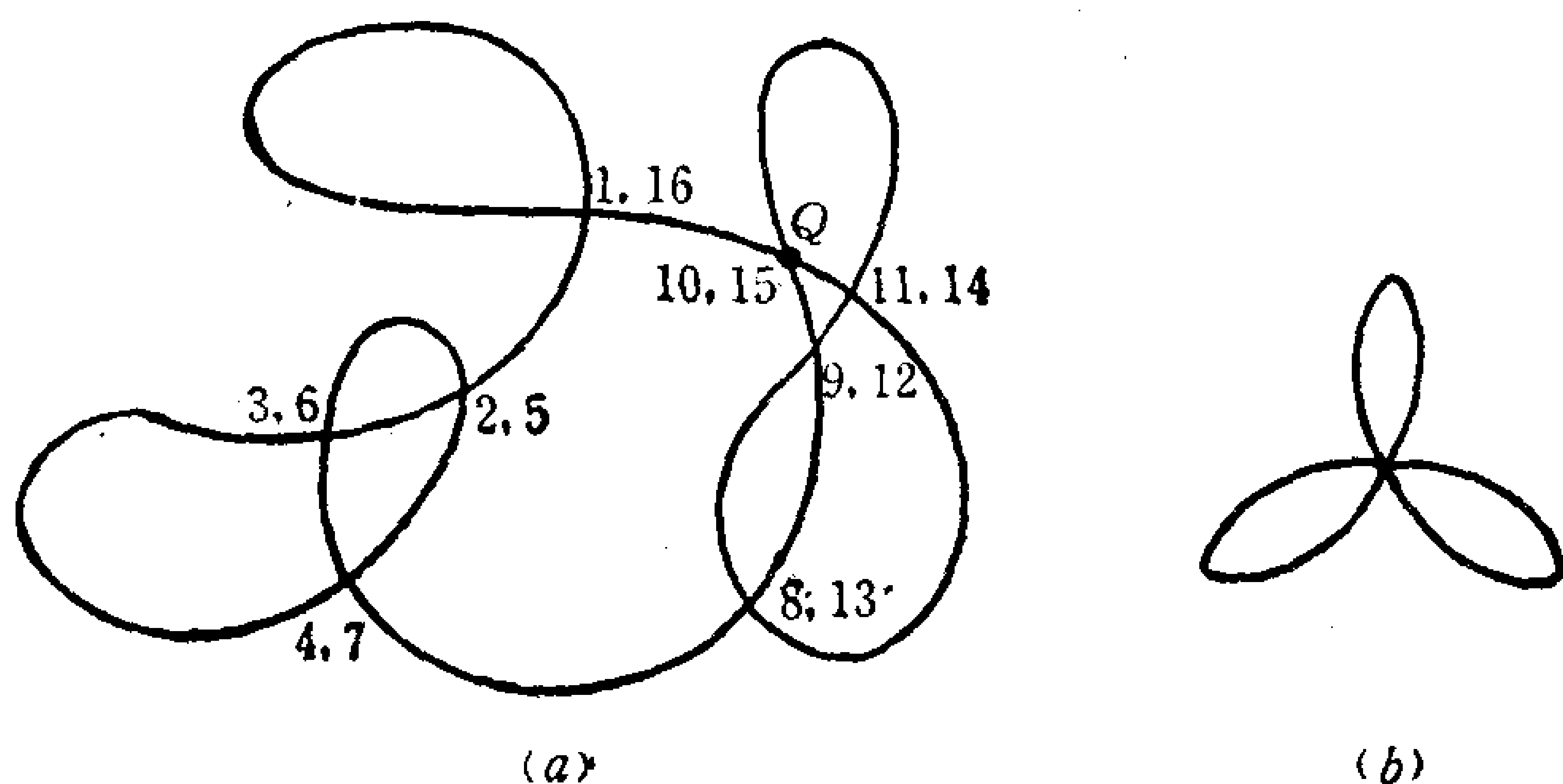


图 1.18

那样。证明:每个交点的两个标记一定一奇一偶。

(b) 假设曲线在相交处有上下之分，即设想它为一根实在的纱线。假定有一小虫沿曲线爬行,证明:总可使曲线安排得让小虫在爬行通过交点时,越过交线和从交线下通过相间地发生。

证 (a) 考虑曲线上某交点 Q。沿 Q 一端前进，再回到另一端只走完曲线的一部分,设为 A;若再从第三端出发，再回到第四个端点，则走完曲线的其余部分，设为 B(见图 1.19)。A 与 B 以 Q 为交点,我们只须证明沿 A 由 Q 回到 Q,中途只经过偶数个交点。注意,A 上的交点或者是它自身的交点,或者是它与 B 的交点。

如果交点 P 是 A 自身的交点，那么必定通过 P 两次。如果交点 R 是 A 和 B 的交点，那么只通过 R 一次(参看图 1.19 $(a)(b)$)。现在证 A 和 B 的交点必为偶数个。

当我们把 A 的各交点分离开(如图 1.19(c)),那么它是一条封闭曲线。B 也同样。因此 B 或在 A 之中,或在 A 之外，这时它们均无交点。当 B 既不在 A 之中又不在 A 之外时，显然 A, B 有偶数个交点(回忆题 1.15)。总之，经历 A 时要碰到偶数次 A 自身的交点,A 与 B 的交点，从而 Q 的两个标记之间将

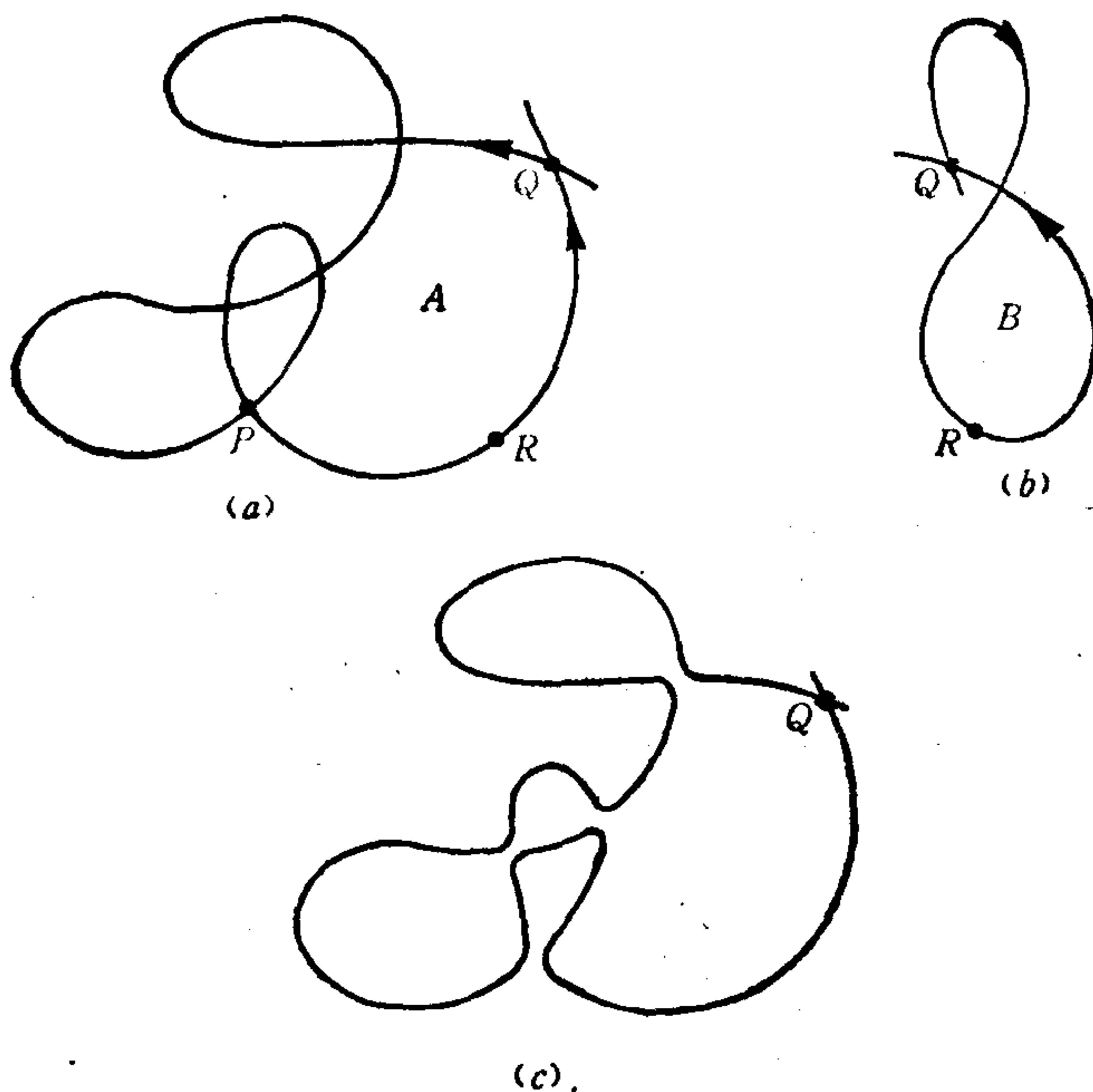


图 1:19

相差 $2k+1$，从而必定一奇一偶。

(b) 沿曲线前进并给各交点作标记，当标记一个奇数时，我们把所遇到的交线放在上面(从该交线下通过)；当标记一个偶数时，我们把所遇的交线放在下面(从该交线上越过)。由于每个交点处的两个标记都为一奇一偶，而任意两个相邻标记 (m, n) 与 $(m+1, n')$ 的奇偶状况恰好相反，因此我们对曲线的上述安排是可行的，此时小虫的爬行亦满足题目的要求(参见图 1.20)。

1.25 证明 $C(n, 0)+C(n, 1)+\cdots+C(n, n)=2^n$。

证 我们从两个不同角度计算图 1.21 中 O 点到直线 AB

各边的向下的路径条数。首先，从 O 点出发，每下一层有两个分枝。因此从 O 点到 AB 直线的走法共 2^n 种。其次，我们分头计算从 O 点到 AB 上各点的路径条数。O 点到 AB 上第 i 点的路径不同取决于 n 步中向右走的 i 步所处的地点，因此，这种路径应为 $C(n, i)$ 条。

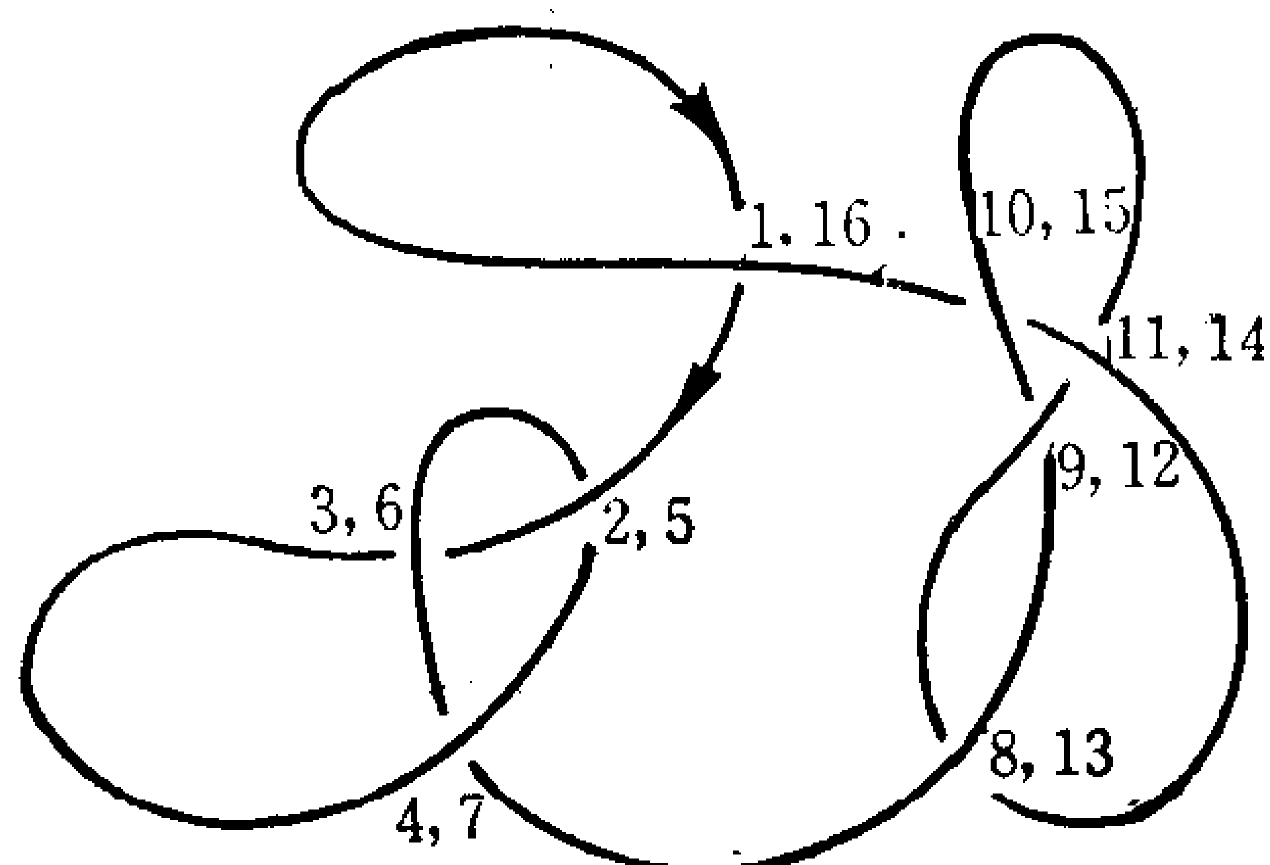


图 1.20

从而由 O 点到 AB 直线上各点的所有路径条数是

$$C(n, 0)+C(n, 1)+\cdots+C(n, n)$$

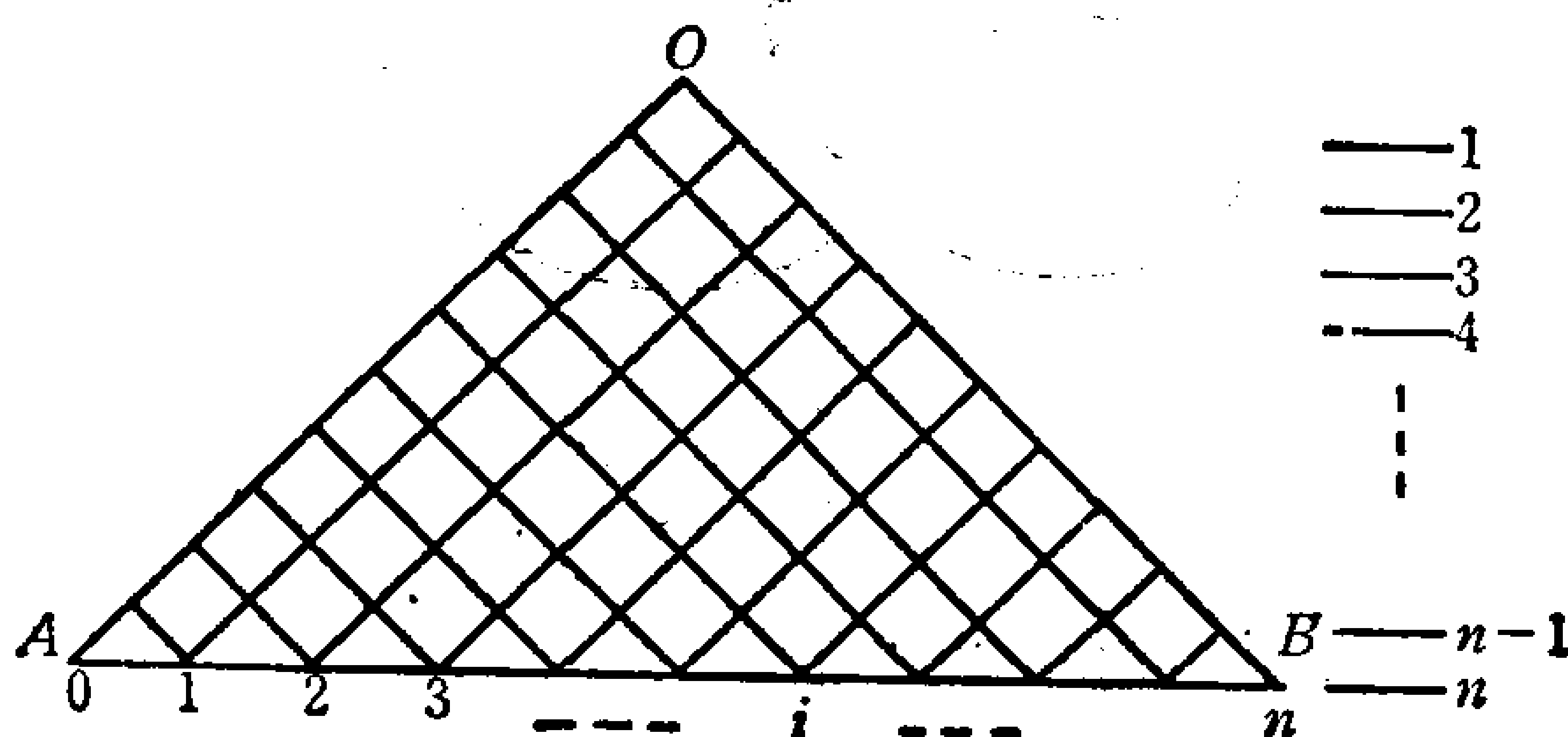


图 1.21

因此本题等式成立。

评注 本题所使用的解法并不如利用牛顿二项式定理来得简捷，但它对读者体会从不同角度计数以进行组合分析的方法，即殊途同归的方法，将有所脾益。

1.26 证明

$$C(m+n, r)=C(m, 0)\cdot C(n, r)+C(m, 1)\cdot C(n, r-1)+\cdots+C(m, r)\cdot C(n, 0)$$

证 图1.22是一个 $(m+n-r)\times r$ 矩形。从 $(0,\ 0)$ 点到 $(m+n-r,\ r)$ 点的递增路径条数是

$$C(m+n-r+r,\ r)=C(m+n,\ r)$$

(参阅题1.11)。这些路径可以分为 $r+1$ 类，第一类是过 AB 上 $(m,\ 0)$ 点的路径，第二类是过 AB 上的 $(m-1,\ 1)$ 点的路径，……，第 $r+1$ 类是过 AB 上 $(m-r,\ r)$ 点的路径。第 $i+1(0\leqslant i\leqslant r)$ 类路径的条数可如下计算。

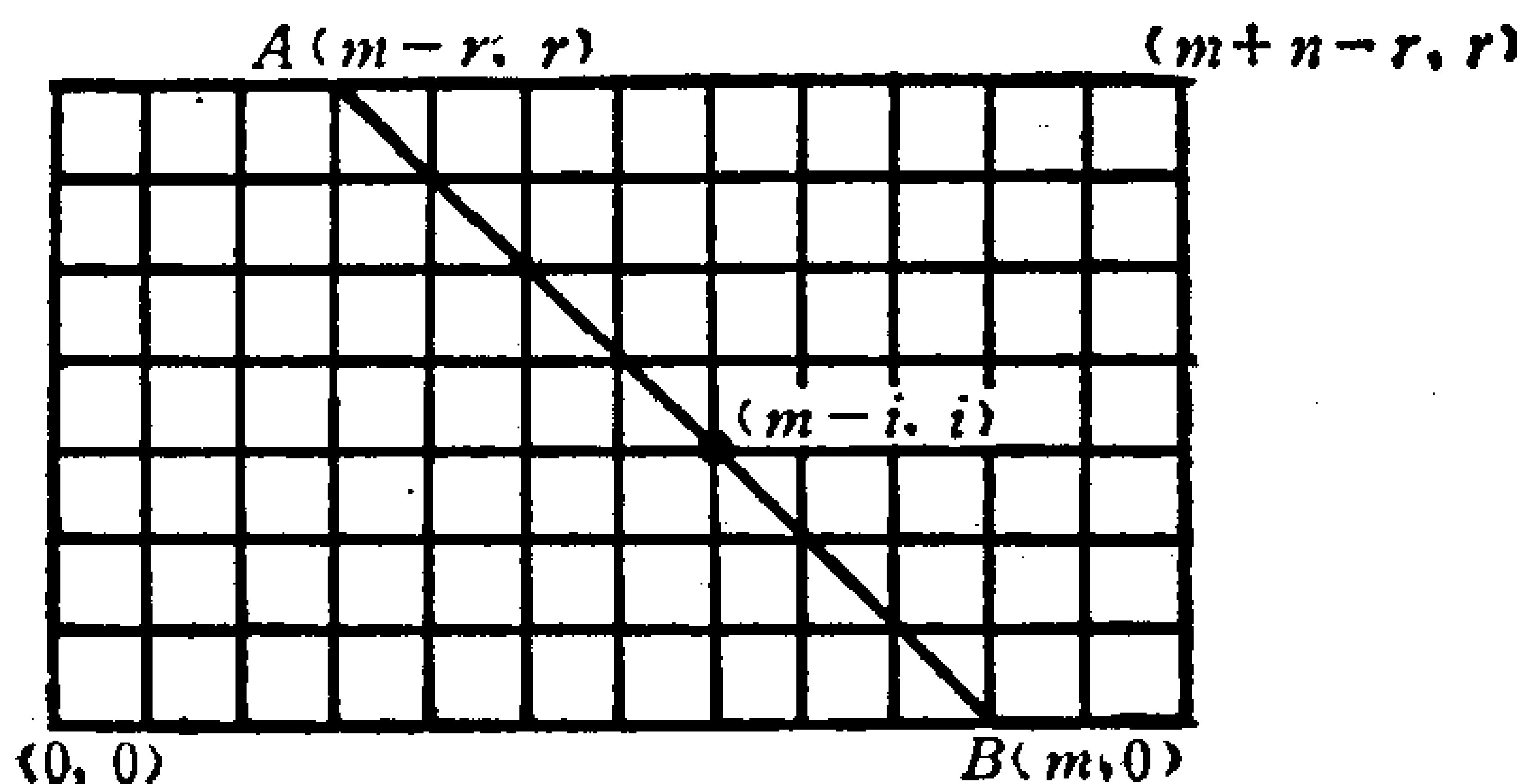


图 1.22

从 $(0,\ 0)$ 点到 $(m-i,\ i)$ 点路径条数

$$C(m-i+i,\ i)=C(m,\ i)$$

而 $(m-i,\ i)$ 点到 $(m+n-r,\ r)$ 点的路径条数是

$$C(m+n-r-(m-i)+r-i,\ r-i)=C(n,\ r-i)$$

因此得：从 $(0,\ 0)$ 点经过 $(m-i,\ i)$ 点到达 $(m+n-r,\ r)$ 点的递增路径(即第 $i+1$ 类路径)条数是

$$C(m,\ i)\cdot C(n,\ r-i)$$

于是我们有

$$C(m+n,\ r)=\sum_{i=0}^{r}C(m,\ i)\cdot C(n,\ r-i)$$

命题得证。

***1.27** 对没有三条对角线交于一点的凸多边形，计算各边及各对角线所组成的互不重迭的区域个数(参见图 1.23)。

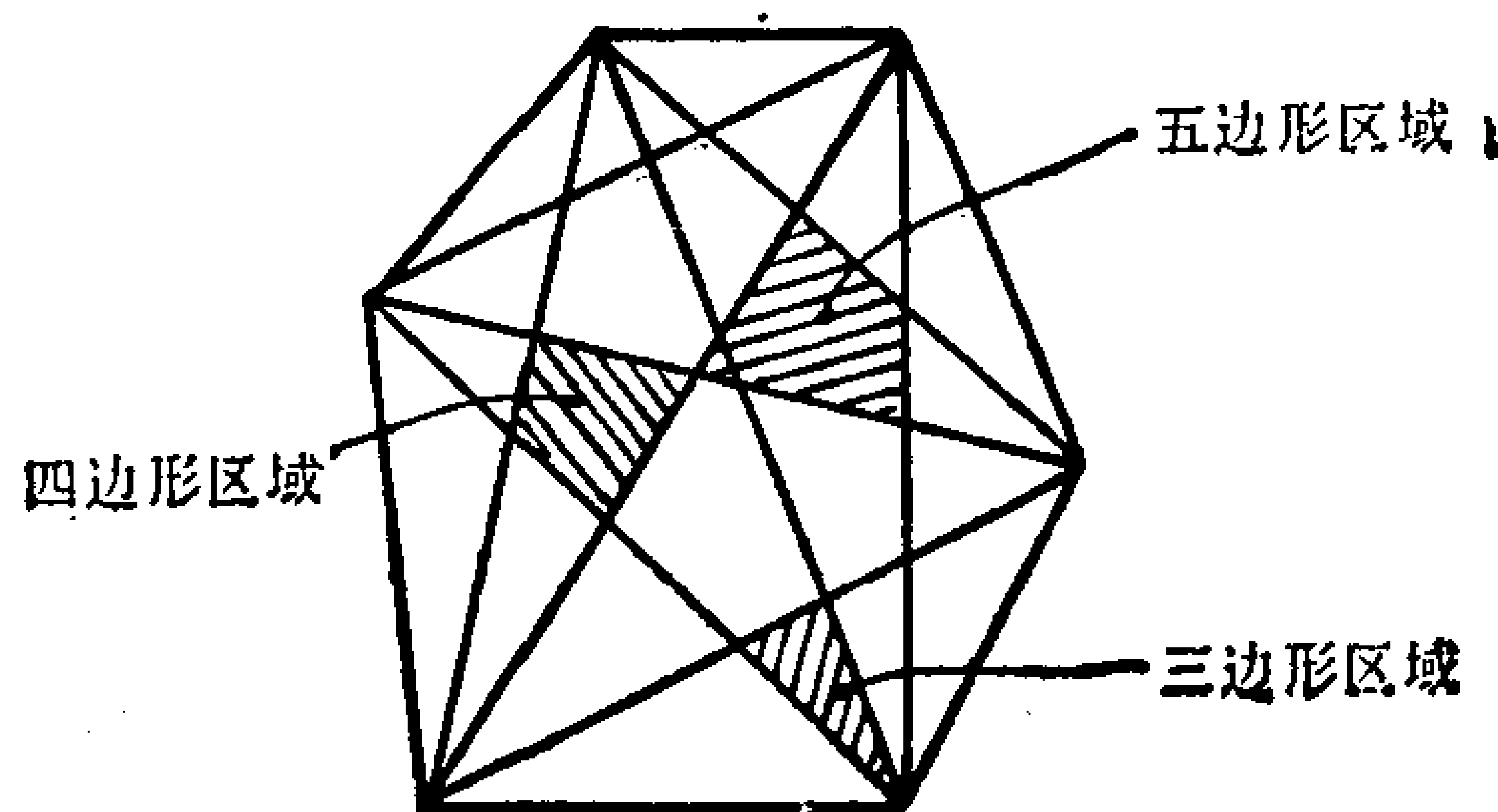


图 1.23

解 令 N_k 表示区域中 k 边形的个数。我们现在从两个角度计算各区域的顶点总数(包括重复计得的数目)。首先可如下计算:

$$3N_3+4N_4+\cdots+mN_m \tag{1}$$

其中 m 是各区域的边数的最大值。另一方面，每两条对角线(或每四个顶点)决定一个内部的区域顶点，因此在(1)式中计算内部的区域顶点数所得数值是 $4C(n, 4)$ (每个内部顶点在(1)式中重复计算四次，因为总是四个区域公共一个顶点)；在(1)式计算中，凸多边形的每个顶点重复计数 $n-2$ 次(它是 $n-2$ 个三角形的公共顶点)，因此在(1)式的计算中，n 个顶点被计数为 $n(n-2)$。据以上讨论不难明白:

$$3N_3+4N_4+\cdots+mN_m=4C(n, 4)+n\cdot(n-2) \tag{2}$$

现在我们再从两个角度来计算所有区域的内角和的总和。首先，它显然是

$$180°\cdot N_3+360°\cdot N_4+540°\cdot N_5+\cdots+(m-2)180°\cdot N_m$$

其次，它还可如下计算:

$$C(n,\ 4)\cdot 360^\circ+(n-2)180^\circ$$

(其中第一项计各内部顶点处区域内角和(360°)的总和，第二项计凸多边形内角和)。因而

$$180^\circ\cdot N_3+360^\circ\cdot N_4+\cdots+(m-2)180^\circ\cdot N_m$$
$$=C(n,\ 4)\cdot 360^\circ+(n-2)\cdot 180^\circ$$

从而

$$N_3+2N_4+3N_5+\cdots+(m-2)N_m=2C(n,\ 4)+(n-2) \tag{3}$$

由(2)式两边同时减去(3)式两边得

$$2N_3+2N_4+2N_5+\cdots+2N_m=2C(n,\ 4)+(n-1)(n-2)$$
$$N_3+N_4+N_5+\cdots+N_m=C(n,\ 4)+C(n-1,\ 2)$$

这就是说，所求的区域总数为 $C(n,\ 4)+C(n-1,\ 2)$。

评注 本题是用"殊途同归方法"解组合问题的一个很好的例子。这是一个困难的计数问题，还可以用其它方法来解。用递推关系求解的研究将在第五章中谈到。

***1.28** 平面图 G 有 Hamilton 回路 H 的必要条件是 $\sum_{i=2}^{n}(i-2)(I_i-O_i)=0$，其中 I_i 表示回路 H 内由 i 条边围成的区域个数，O_i 表示回路 H 外由 i 条边围成的区域个数。

证 图1.24中 H 表示 G 的 Hamilton 回路。我们知道，不在 H 上的边或在 H 之内部，或在 H 之外部。首先考虑 H 的内部，设其间有 d 条边。由于 G 是平面图，这些边互不相交，因此每一条边都把它所经过的区域分成两部分，从而 H 内部应有 $d+1$ 个区域，也就是说

$$d+1=\sum_{i=2}^{n}I_i \tag{1}$$

这里 n 是 G 中结点数，上述求和到 n 止是明显的，因为不会在 G

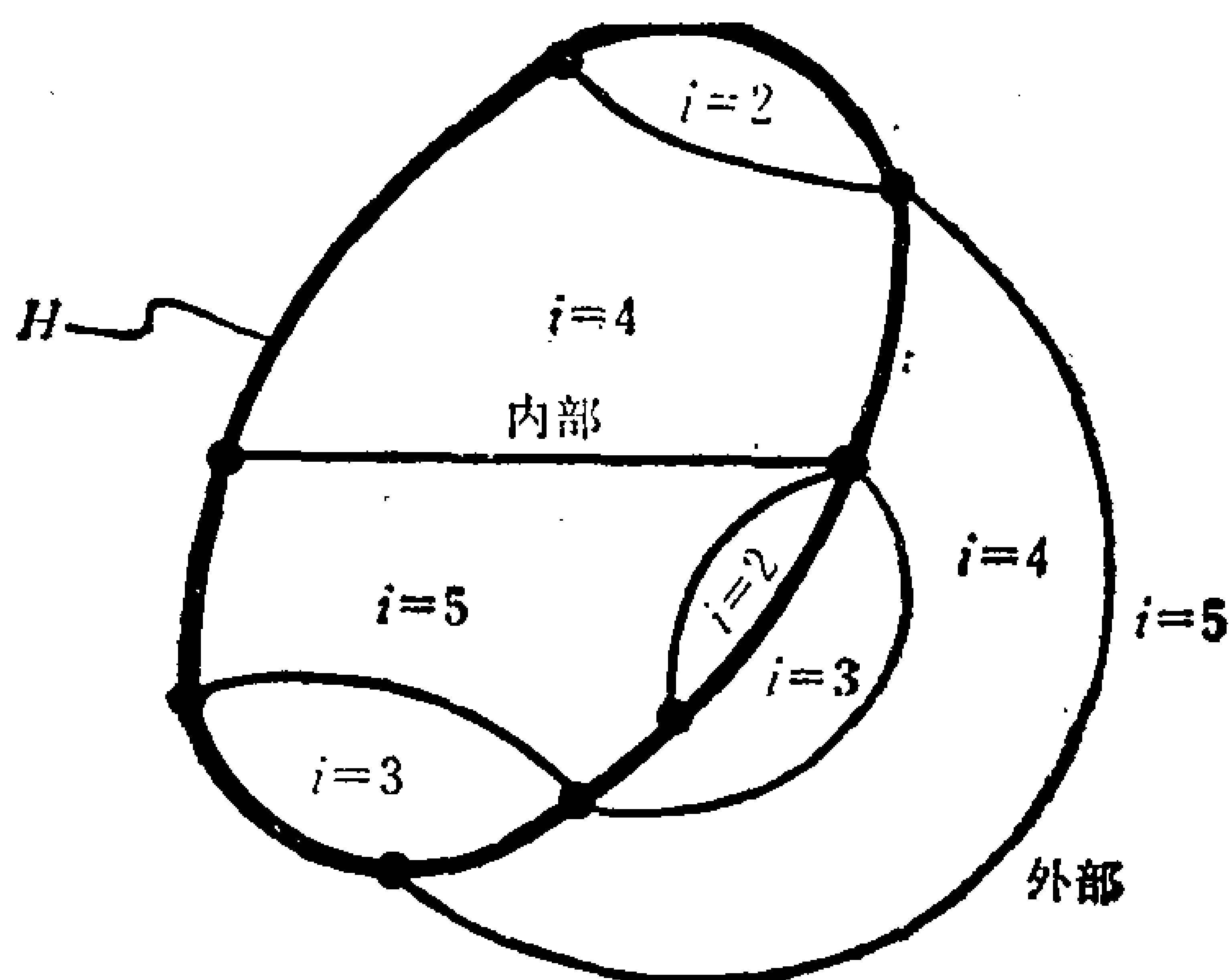


图 1.24

中有 n 条以上的边围成的区域。

另外，我们来计算围成那些内部区域的边的总数(包括重复计得的数目)，即计算 $\sum_{i=2}^{n} i\cdot I_i$。由于在计算中每条 H 内部的边都计算了两次，而 H 上的边(显然是 n 条)仅计算一次，因此

$$2d+n=\sum_{i=2}^{n} i\cdot I_i=2I_2+3I_3+\cdots+nI_n \tag{2}$$

解出(1)式中 d 并代入(2)式得

$$\sum_{i=2}^{n} iI_i=2\left(\sum_{i=2}^{n} I_i-1\right)+n=\sum_{i=2}^{n} 2I_i+n-2$$

从而

$$\sum_{i=2}^{n}(i-2)I_i=n-2 \tag{3}$$

对 H 外部进行完全相同的讨论，同理可得

$$\sum_{i=2}^{n}(i-2)O_i=n-2 \tag{4}$$

由(3)(4)式得

$$\sum_{i=2}^{n}(i-2)(I_i-O_i)=0$$

命题得证。

评注: 本命题是苏联数学家 Kozyrev 得到的一个关于 Hamilton回路问题的重要结果,证明所用的主要技术仍然是设法从不同角度对内、外部区域的性质进行研究.从而得出适当的等式。本命题有不少有趣的应用,下题便是一例。

1.29 利用题1.28中给出的必要条件, 证明图1.25中的图没有 Hamilton 回路。

证 反设图1.25中的图有Hamilton回路,那么据题1.28给出的必要条件,我们有

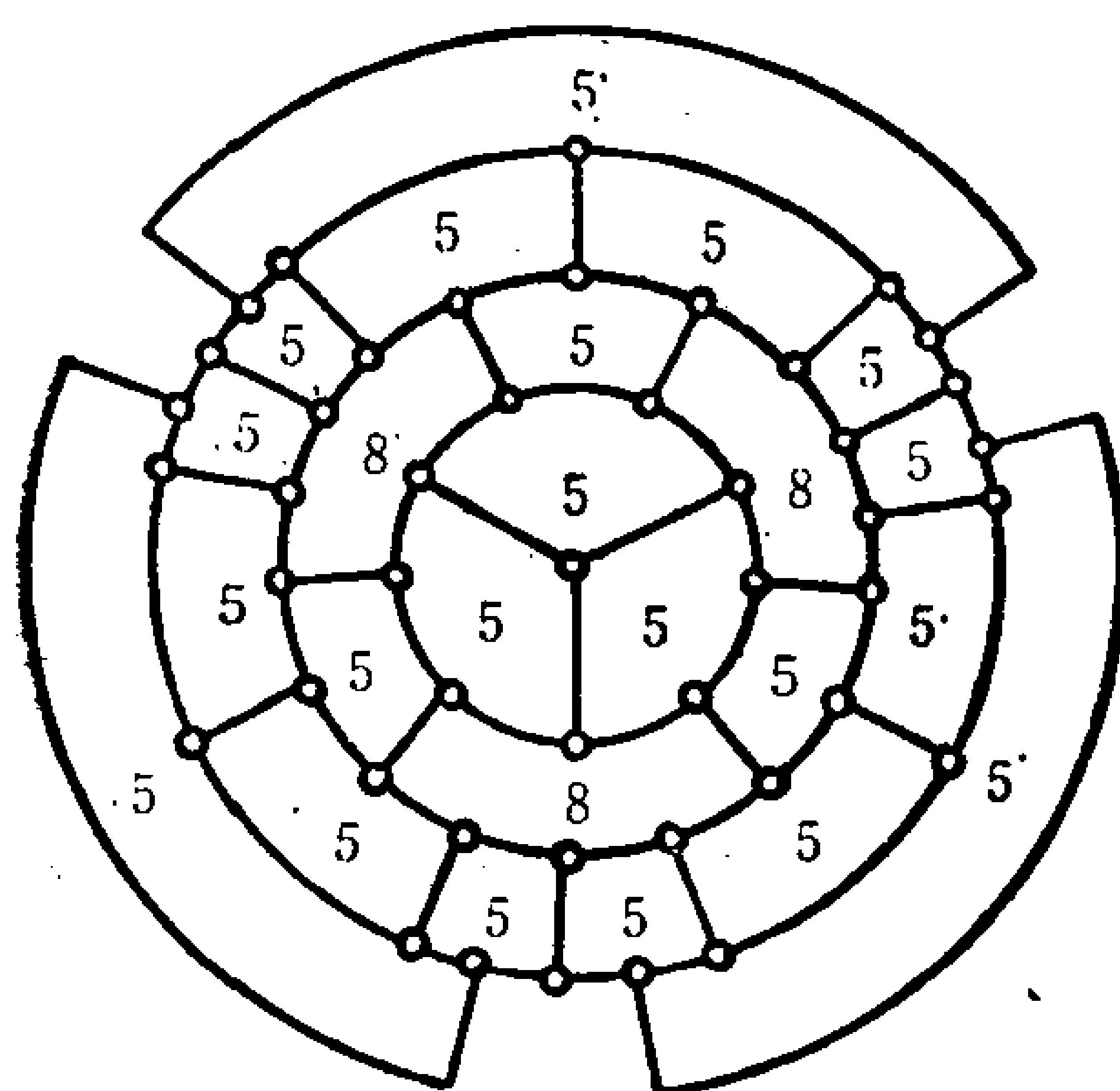
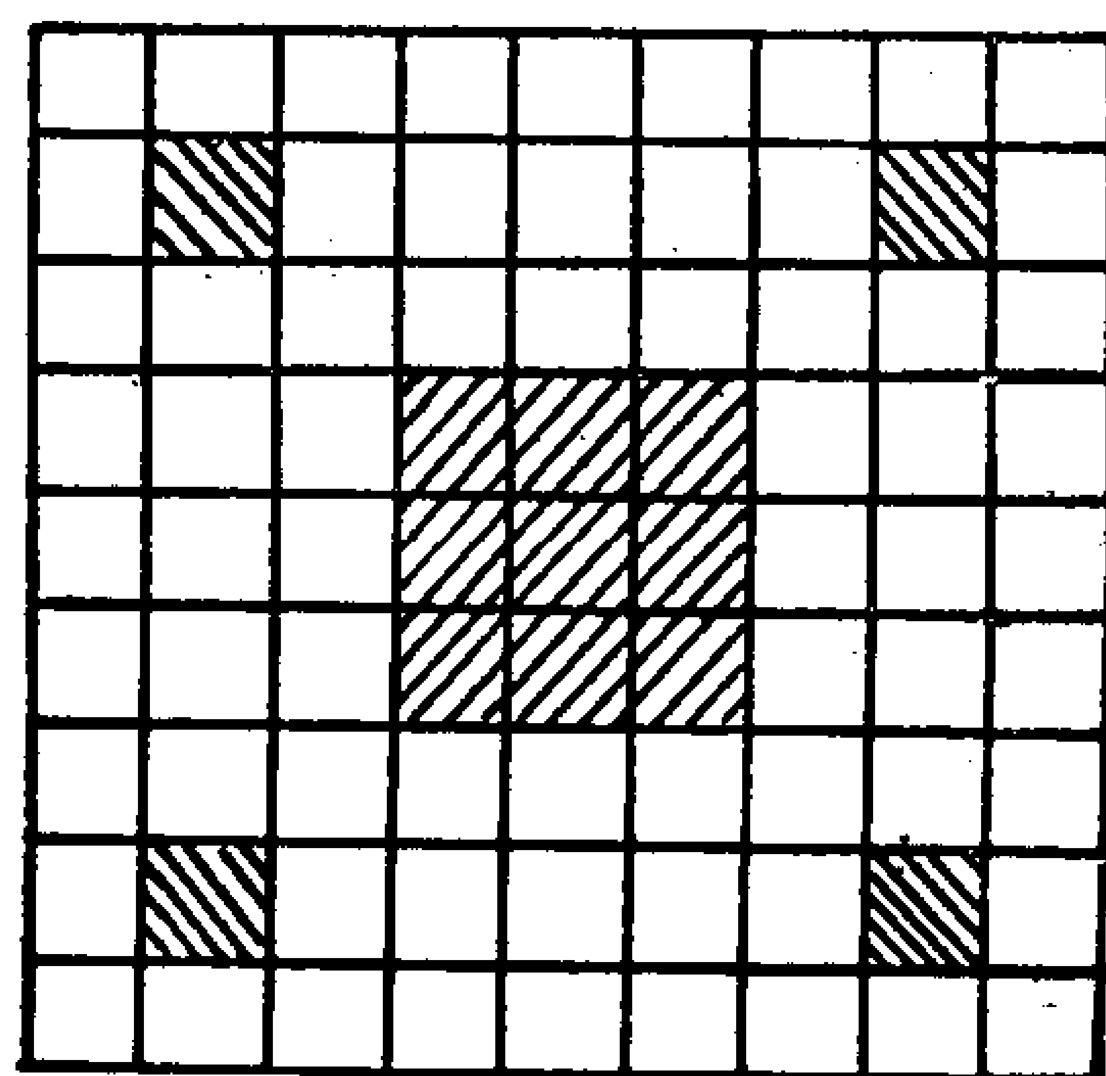


图 1.25


图 1.26

$$3(I_5-O_5)+6(I_8-O_8)+7(I_9-O_9)=0$$

但九边形在图中只有一个(外部区域), 因而 $7(I_9-O_9)=-7$, 也就是说

$$3(I_5-O_5)+6(I_8-O_8)=7$$

但这是不可能的,因为左边显然是3的整数倍。矛盾,假设不能成立,命题得证。

1.30 单位正方形被平行于边的直线分成相等的9部分,

挖去中间的那部分。对剩下的 8 部分(每一部分都是边长为 $\frac{1}{3}$ 的正方形)重复上述过程。问这样做 n 次后，还留有多少个边长为 $\frac{1}{3^n}$ 的小正方形。

解 令 a_n 为作 n 次上述操作后留下的边长为 $\frac{1}{3^n}$ 的正方形个数。显然 $a_1=8$, 而

$$a_n=9a_{n-1}-a_{n-1}=8a_{n-1}$$

因此 $$a_n=8a_{n-1}=8^2a_{n-2}=\cdots=8^{n-1}a_1=8^n$$

评注 本题所用方法是:先建立递推关系,然后用迭代法解出。建立递推关系是解决计数问题的重要手段，后面有专章讨论,这里只是给读者提供几个有趣的例子,领略一下这种方法的大致精神。

1.31 设 $f(n)$ 表示 $2\times n$ 矩形的各种不同的多米诺骨牌完全覆盖的数目。试计算 $f(n)$。

解 我们先建立一个 $f(n)$ 所满足的递推关系。如图 1.27, 我们考虑第一列两个方格被覆盖的两种不同方式。图 1.27(a) 表示它们被一块骨牌覆盖，其余方格的不同覆盖数目便是 $f(n-1)$。图 1.27(b) 表示前两格被两块骨牌所覆盖，那么其余方格的覆盖方式应是 $f(n-2)$ 种。因此,

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

解这个递推关系的方法我们留到第五章介绍,这里仅指出:

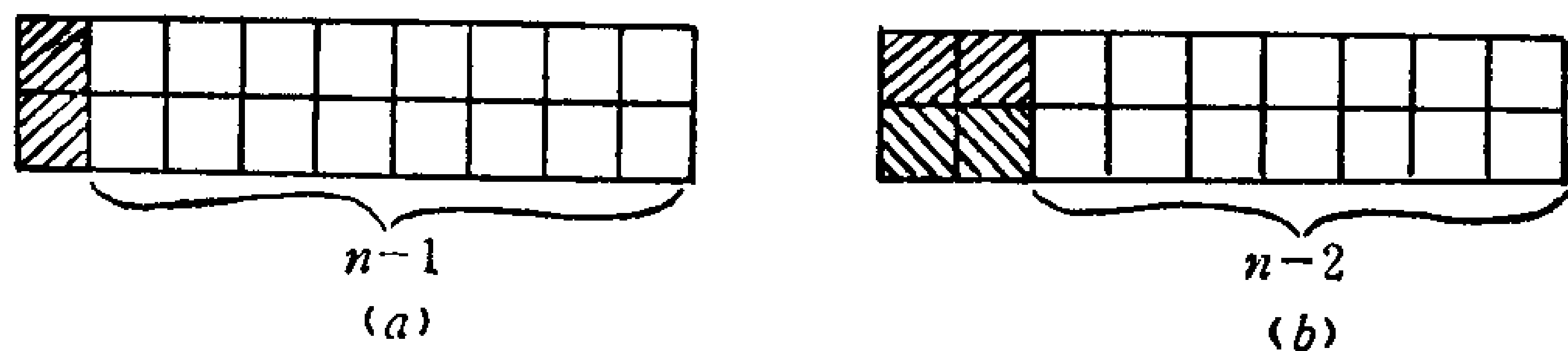


图 1.27

$$f(1)=1, f(2)=2$$

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

***1.32** 甲乙两个赌徒进行赌博。甲有 50 元，乙有 20 元，每赌一局输赢一元。问甲输光、乙输光和赌博不终止的概率各多少。

解 图 1.28 是赌博状态示意图。标记 A 表示某一局赌博结束时甲手头的资本。开始时甲位于 50 处，每赌一次 A 向左或向右移动一个单位，A 到达 70 处，乙输光；A 到达 0 处，甲输光。

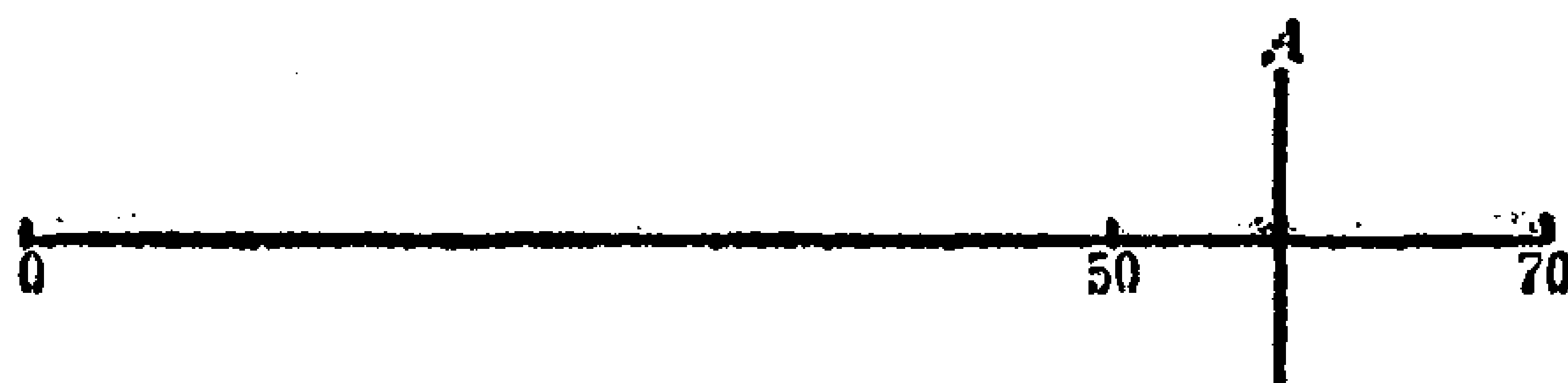


图 1.28

令 $P(k)$ 表示甲从 k 元赌到具有 70 元资产（即乙输光）的概率。一局赌博结束时，甲必具有 $k+1$ 元或 $k-1$ 元，即 A 必位于 $k+1$ 或 $k-1$ 处，这时甲达到 70 元的概率便是 $P(k+1)$ 或 $P(k-1)$。由于甲在一局中输赢的概率都是 $\frac{1}{2}$，从而 A 从 k 到 $k+1$ 和 $k-1$ 的概率也都是 $\frac{1}{2}$。那么，它从 k 到 $k+1$，再到 70 的概率就应当是 $\frac{1}{2}P(k+1)$；而从 k 到 $k-1$，再到 70 的概率就应当是 $\frac{1}{2}P(k-1)$。因此，由 k 到达 70 的概率 $P(k)$ 满足：

$$P(k)=\frac{1}{2}P(k+1)+\frac{1}{2}P(k-1)$$

或

$$P(k)-P(k-1)=P(k+1)-P(k)$$

因而

$$P(1)-P(0)=P(2)-P(1)=P(3)$$
$$-P(2)=\cdots=P(70)-P(69)$$

记此值为 $d(d=P(i+1)-P(i))$。不难看出，

$$P(70)-P(0)=70d,\ d=\frac{1}{70}(P(70)-P(0))$$

由于 $P(0)$ 表示甲从 0 元赌起，这是不可能达到 70 元的，因为甲无资产赌博便无法进行下去(甲已输光)，故 $P(0)=0$；另一方面，$P(70)$ 表示甲从 70 元赌到 70 元的概率，当然 $P(70)=1$。于是，$d=\frac{1}{70}$，从而 $P(0)=0$，$P(1)=\frac{1}{70}$，$P(2)=\frac{2}{70}$，$\cdots$，$P(50)=\frac{50}{70}=\frac{5}{7}$。这就是说，甲从50元赌起直到乙输光为止的概率是 $\frac{5}{7}$。同理可算出甲输光的概率是 $\frac{2}{7}$。由于 $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=1$，故赌博不休止的概率是零。

评注 这是递推分析建立递推关系方法的一次巧妙应用。如果读者在这里自信已掌握了它的精神，那么到第五章专门对此讨论时亦不会有太大困难了，那时内容更丰富，解法更规范，读者一定会对此方法有更加深入的了解。

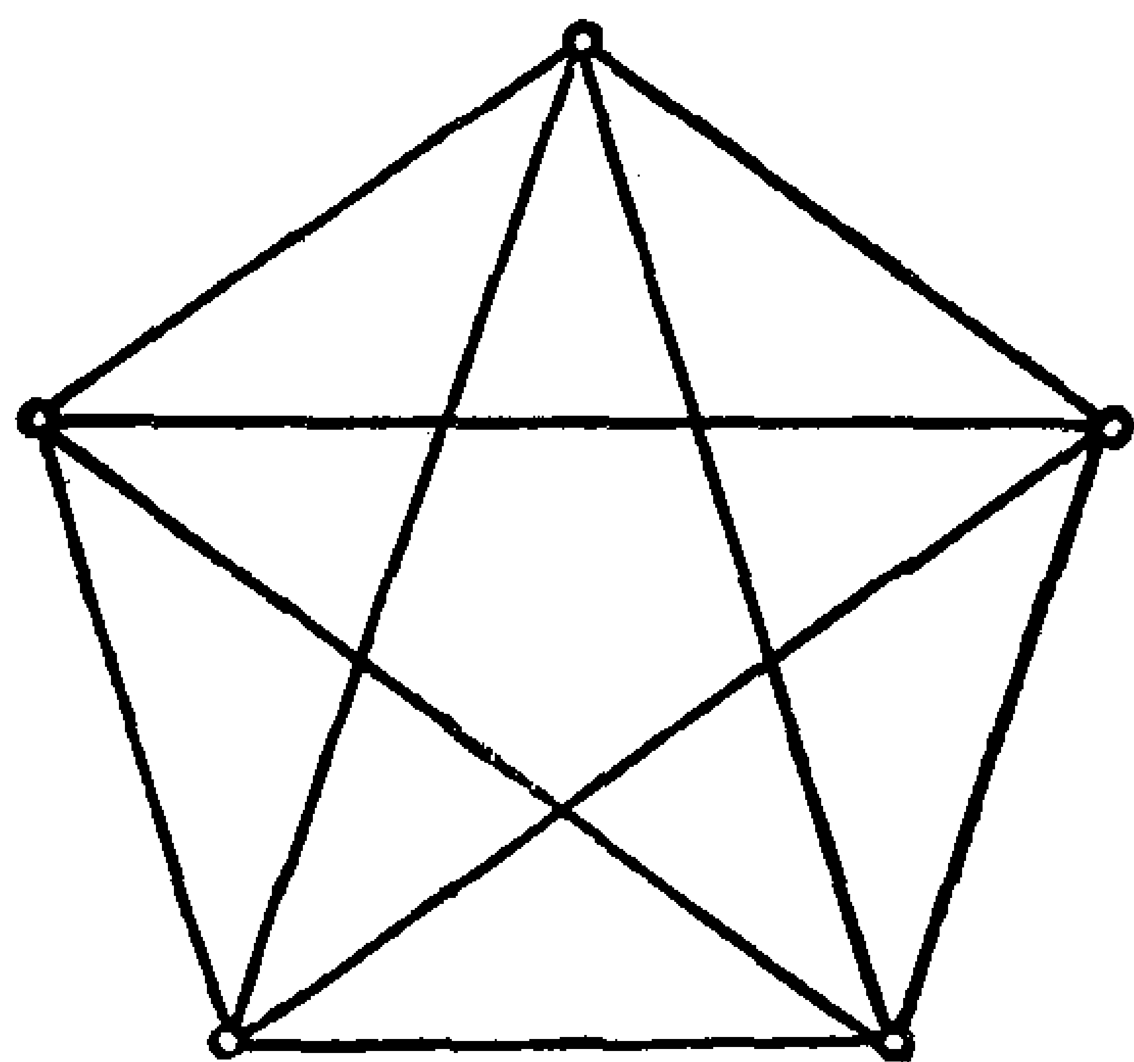


图 1.29

1.33 一俱乐部有若干成员，每一成员恰参加两个活动小组。已知有五个活动小组，每两组恰有一个公共成员，问该俱乐部有多少成员。

解 将 5 个活动小组看作图的五个结点，边看作俱乐部成

员。由于每两组恰有一个公共成员，每一成员参加两个活动组，因此任意两个结点之间有且仅有一条边。很易计算，图的所有边共计 $C(5, 2)=10$ 条。由于不会有两条边表示同一个人（否则此人将参加三个以上的小组），因此俱乐恰有成员 10 个。参见图1.29。

评注 许多实际问题可化归到图论问题、集合论问题和代数系统问题来解决，这是应用图论解题的一例。

1.34 议会有 100 个议员，因而可以组成 $2^{100}-1$ 个至少有一人的委员会。问可以组成的委员会中，两两有公共成员的委员会最多是多少个。

解 设 S 是有 100 个议员的议会，集合 S 有子集 2^{100} 个。设 A 是两两有公共成员的委员会的最大集合，我们要证明，A 中共有 2^{99} 个委员会，即 $|A|=2^{99}$。

首先 $|A|\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2^{100}=2^{99}$。这是因为，对任一 $x\subseteq S$，$x\in A$ 有 $\bar{x}\notin A$（$\bar{x}$ 是 x 关于 S 的补集），从而 S 的全体子集中至多只有一半在 A 中。

其次我们可证 $|A|\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2^{100}=2^{99}$。

设 $x\subseteq S$，$x\notin A$。那么 A 中至少有一个 y，使得 $x\cap y=\varnothing$，因而 $y\subseteq\bar{x}$。由于 $y\in A$，A 中所有成员与 y 之交一定不空，那么 $\bar{x}(\supseteq y)$ 与这些成员之交也不空。我们已知 A 是两两交不空的 S 的子集的最大集合，因此 $\bar{x}\in A$。这就是说，对任一 $x\subseteq S$，$x\notin A$ 则 $\bar{x}\in A$。也就是说，至少有一半 S 的子集在 A 中，即 $|A|\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2^{100}=2^{99}$。

评注 这是化归到集合论来解的一个例子。本题的结论很容易推广到更一般的情况：基数为 n 的集合 S 的两两交不空的

最大子集族恰有 2^{n-1} 个 S 的子集。

代数系统应用于组合问题求解的例子在这一章里就不给出了，读者在第八章、第十章里将读到许多实例。

1.35 有 mn 个士兵排列成 $m\times n$ 的行军队列。在队列中每一行的每一个人都高于其左侧的人。假定将队列中每一列士兵重新排列，使每一列士兵从前到后身高递增。证明，经过上述调整，队列的每一行中仍然保持从左到右身高递增的性质。

证 设矩阵 A 表示原来的队列，矩阵 A' 表示经过列高度调整的新队列，使从上到下身高递增。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1i}, & a_{1i+1}\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{l_0 1}\cdots\cdots a_{l_0 i}, & a_{l_0 i+1}\cdots\cdots a_{l_0 n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}\cdots\cdots a_{mi}, & a_{mi+1}\cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix} a'_{11}\cdots\cdots a'_{1i} & a'_{1i+1}\cdots\cdots a'_{1n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a'_{j1}\cdots\cdots a'_{ji} & a_{ji+1}\cdots\cdots a'_{jn} \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a'_{m1}\cdots\cdots a'_{mi} & a'_{mi+1}\cdots\cdots a'_{mn} \end{pmatrix}$$

现反设 A' 中不再保持每行从左到右身高递增的性质，即至少有一行（例如第 j 行）中有 $a'_{ji}>a'_{ji+1}$。显然 a'_{j+1i}，a'_{j+2i}，$\cdots$，a'_{mi} 均大于 a'_{ji}，设它们在 A 中分别是 $a_{l_1 i}$，$a_{l_2 i}$，$\cdots$，$a_{l_{m-j} i}$，而 a'_{ji} 在 A 中是 $a_{l_0 i}$。据 A 的从左到右高度递增的性质，应有 $a_{l_1 i+1}$，$a_{l_2 i+1}$，$\cdots$，$a_{l_{m-j} i+1}$ 分别大于 $a_{l_1 i}$，$a_{l_2 i}$，$\cdots$，$a_{l_{m-j} i}$，它们共 $m-j$ 个。另外，$a_{l_0 i+1}>a_{l_0 i}$。上述讨论告诉我们，有 $a_{l_0 i+1}$，$a_{l_1 i+1}$，$a_{l_2 i+1}$，$\cdots$，$a_{l_{m-j} i+1}$ 均大于 $a_{l_0 i}$，即大于 a'_{ji}，从而均大于 a'_{ji+1}。这就是说，A 中有，从而 A' 中也有 $m-j+1$ 个第 $i+1$ 列上的元素大于 a'_{ji+1}。这一事实与 a'_{ji+1} 依从上而下递增的次序排列在第 j 行的事实相

冲突，后者等价于事实：A' 中第 $i+1$ 列恰有 $m-j$ 个元素大于 a'_{ji+1}。命题得证。

评注 本题的解法是计数论证的一种。计数论证在组合论中没有象前边提要中所提到的方法那么具有普遍意义，但在一些特定场合下却是一种有效的方法。

1.36 集合 S 由 10 个不同的十进制两位数组成。证明：必定有 S 的两个不交的非空子集 A 和 B，使 A 中一切元素之和等于 B 中一切元素之和。

证 显然 A, B 不能是集合 S 和空集。那么 A, B 必取自 $2^{10}-2=1022$ 个 S 的非空真子集中，而这些真子集中的每一个都恰对应着一个数：它的元素的和。我们再来分析所有和数的状况。首先，它们决不小于 10，其次它们不大于

$$90+91+\cdots+99=945$$

也就是说，至多只有 $(945-10)+1=936$ 种不同的和数。因此，在 1022 个真子集所对应的 1022 个和数中至少有两个是相同的。如果对应于相同和数的那两个真子集交不空，只要去掉它们的公共元素，所得的两个真子集即为欲求的 A, B。

评注 本题应用了"鸽笼原理"。这是一个十分重要的组合分析原理，应用极为广泛，本书第七章要专题讨论有关这一原理及其推广形式 Ramsey 定理的习题。

1.37 在棋盘的 64 个方格中，标出了 16 个方格，使 8 行中的每一行和 8 列中的每一列都恰有两个标记的方格。证明：可以把 8 个黑棋和 8 个白棋放在这 16 个方格中而使每行每列都有一个黑棋和一个白棋。

证 我们从任一标出的方格出发，走到同行另一标记的方格后转向它同列的标记方格，然后又从这一方格走到它同行的另一标记方格(如图 1.30 所示)，如此等等。显然我们迟早要碰

到一个走过的标记方格 M，但我们断定这个方格必定是那个起始的方格。设 M 不是起始方格，但它是我们碰到的第一个走过的方格。如果 M 是从同行（列）标记结点 A 出发到达的，B 是离开 M 将到达的同列（行）标记方格，而我们是从标记方格 C 再次走到 M 的，那么将有一行（或一列）有三个标记方格（A, M, C 或 B, M, C）这与题设矛盾。这就是说，我们所走的路线是封闭的，并包含偶数个标记方格（每走过一行碰到两个标记方格）。因此，我们可以在这条路线上的标记方格处轮番放置黑棋和白棋。

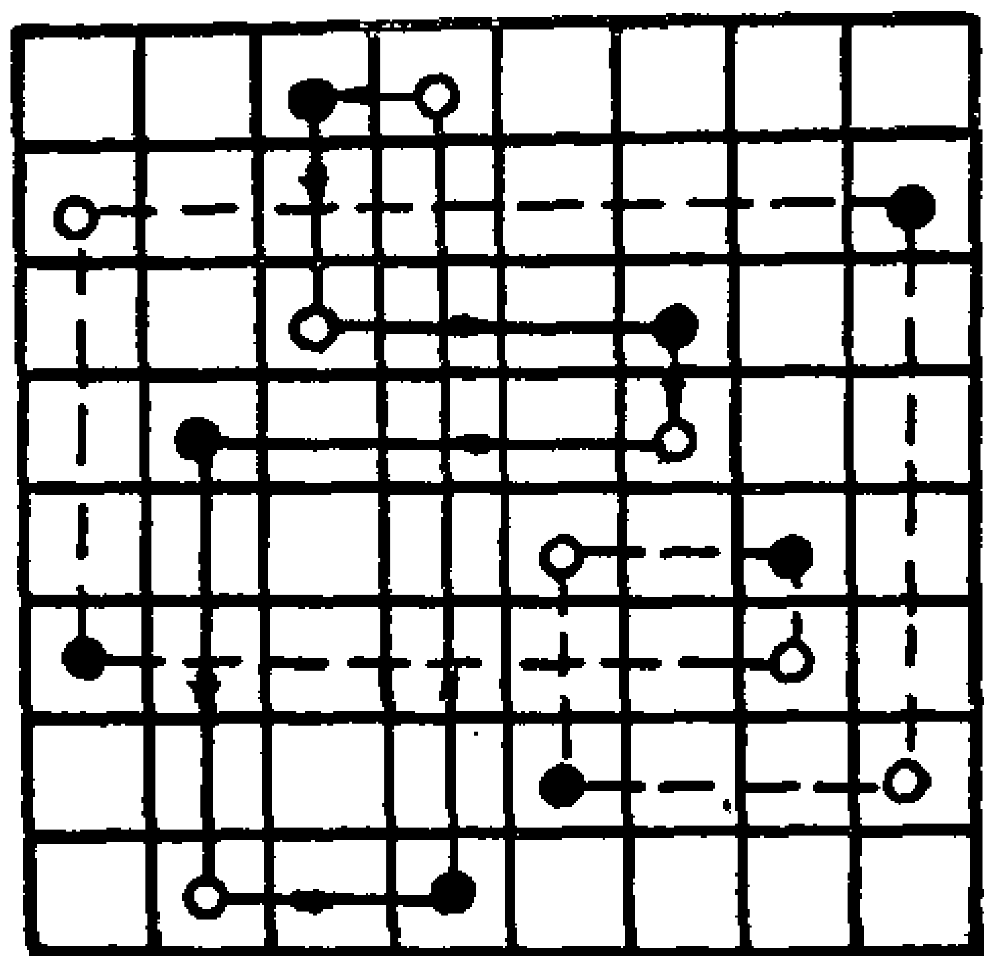


图 1.30

如果此时棋盘上仍有一些标记方格未被我们走到，我们可以从这些标记方格的任何一个出发，重复上述过程。我们不会碰到上一过程中已经放置棋子的方格，因为如若这样，又将出现一行（或一列）上有 3 个标记方格的情况。由于标记方格是有限的，因此不断进行上述过程必定可以在所有标记方格上放置黑棋和白棋，使每行每列都有且仅有一个黑棋和一个白棋。

评注 同类问题很多。例如：n 个小伙子和 n 个姑娘参加舞会，每个小伙子认识两位姑娘，每个姑娘也认识两位小伙子。可证：总可将他们分成 n 对，使每一对舞伴中的小伙子和姑娘是彼此相识的。这类问题有统一的数学模型，即二部图的匹配问题，更广泛地说是所谓相异代表系问题，它将在第九章中详细讨论。本题的证明给出了放置黑白棋的具体算法，是一种构造性证明。构造性证明在组合学中是常用的。

第二章　基本计数问题

内容提要

计数问题是组合论中最基本问题之一。它是求解具有某些特定性质事物的个数的问题。求解这类问题所运用的技巧和涉及的知识很广，我们把仅运用

(1) 基本的加法原理和乘法原理；

(2) 排列、组合公式；

(3) 可重复的排列、组合公式

等较为简单的知识就可求解的计数问题叫做基本计数问题。本章主要讨论基本计数问题，也附带介绍排列和组合的生成算法，因为在科学研究中，有时要用到这些算法。使用特定方法才能求解的高级计数问题，留待后继章节讨论。

2-1　两个基本原理

加法原理　两个独立的事件 A 和 B，分别可以有 a 种和 b 种方法出现，那末，A 和 B 出现其一的方法数是 $a+b$。

乘法原理　两个独立的事件 A 和 B，分别可以有 a 种和 b 种方法出现，那末，A 和 B 同时出现的方法数是 $a\cdot b$。

2-2　集合的排列与组合

定理 2.1　从 n 个元素的集合中取出 r 个元素进行排列，其不同的排列个数是

$$P(n, r)=n(n-1)\cdots(n-r+1)=n!/(n-r)!$$

特别是 $r=n$ 时

$$P(n, n)=n!$$

定理 2.2 从 n 个元素的集合中取出 r 个元素作圆排列，其排列个数是

$$P(n, r)/r=n!/[r(n-r)!]$$

定理 2.3 从 n 个元素的集合中取出 r 个元素作组合，其组合数是

$$C(n, r)=\binom{n}{r}=n!/[r!(n-r)!]$$

定理 2.4 n 个元素的集合的所有子集个数是 2^n。

2-3 多重集的排列与组合

定义 2.1 如果不限定集合 S 的元素一定要由不同的事物组成，则称 S 为**多重集**。多重集中事物 a_i 重复出现的次数 n_i 称为a_i 的**重复系数**。例如

$$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$$

特别，当 S 的各元素具有无限重复系数时，记作：

$$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_k\}$$

定理 2.5 多重集 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_k\}$的 r 排列数是 k^r。

定理 2.6 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$。则 S 的排列数等于

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

它是多项式$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$展开式中 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 项的系数。

定理 2.7 多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ 展开式中共有

$\binom{n+k-1}{n}$项，其系数之和为

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k}=k^n$$

定理2.8 多重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ \cdots,\ \infty\cdot a_k\}$的 r 组合数为 $C(k+r-1,\ r)$。

2-4 排列、组合的生成

1．**算法2.1**——递归地构造 $S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$的排列。步骤如下：

1）若 $n=1$，则写下唯一的排列。

2）否则，递归调用算法2.1生成 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ 的所有排列，然后生成 S 的所有排列，方法是

a）把$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ 的排列每一个复写 n 次。

b）把 n 逐个插入原来排列的后边、前边和每两数之间，插入的次序是从右往左地，然后又从左往右地进行。

对以上陈述还感到不够具体的读者，请结合题2.66阅读。此外，在题2.73和2.74中还介绍了生成 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 所有排列的其它算法。

2．排列的倒置个数序列。

定义2.2 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的一个排列，那末

1）如果对于 $j<k\,(1\leqslant j<k\leqslant n)$ 而 $i_j>i_k$，则称序偶 $(i_j,\ i_k)$ 是排列 $i_1i_2\cdots i_k$ 的一个倒置。

2）排在数 $j\,(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 之前而大于 j 的数的个数称之为 j 的倒置个数，记作 a_j。显然有下述不等式

$$0\leqslant a_j\leqslant n-j$$

3）对 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 倒置个数 a_j 所组成的序列 $a_1a_2\cdots a_n$，

称为原排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的**倒置个数序列**。

一个排列唯一地对应于一个倒置个数序列，反之亦然。排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的倒置个数 $k=\sum_{j=1}^{n}a_j$，若 k 是奇数，称原排列为**奇排列**，否则，为**偶排列**。

3．**算法 2.2**——由倒置个数序列求原排列。

设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是满足 $0\leqslant a_j\leqslant n-j$ 的倒置个数序列，构造步骤如下：

1）在纸的一行上置 n 个空格。

2）对 $j=1, 2, \cdots, n$ 依次把数 j 写到第 a_j+1 个空格里(不计已填入的空格)。

4．**算法 2.3**——构造 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 组合。步骤如下：(注意，算法中 S 的每个 r 组合都表示成递增序列)

1）产生 S 的第一个组合——$1, 2, \cdots, r$。

2）假定上一次生成的 S 的 r 组合是 $a_1, a_2, \cdots, a_r$:

a）如果 $a_1=n-r+1$，则已产生出 S 的所有 r 组合，算法终止。

b）否则，从 a_r 起依次向左查找，如果 a_j 是第一个满足 $a_j<n-r+j$ 的数，那末，$a_1a_2\cdots a_{j-1}, a_j+1, a_j+2, \cdots a_j+(r-j+1)$ 便是紧接于 $a_1a_2\cdots a_r$ 之后的 S 的一个新的 r 组合。

反复使用步骤 2，直至算法终止。

注意，本算法是按词典序生成 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有 r 组合。

2-5 常用计数公式一览表

为使读者查阅和引用方便，我们把本章及以后几章中推出的 18 个常用计数公式和导出这些公式的典型数学模型列成表 2.1。

表 2.1 基本计数公式一览表

数学模型	序号	公式	备注
一、从 n 个不同的球中任取 m 个球的方法数			
1. 取出 m 个球放成一堆（无序）	2.1	$C(n, m)$	
2. 取出 m 个球排成一行（有序）	2.2	$P(n, m)$	
3. 取出 m 个球排成一圆圈（有序，但无首尾之分）	2.3	$P(n, m)/m$	
4. 取出的是任意多个球（包括 0 个）	2.4	2^n	
二、把 n 个不同的球放到 m 个盒子中的方法数			
1. 盒子无标记			
1) 每盒球数不限（可以空）	2.5	$\sum_{k=0}^{m} S(n, k)$	
特别 $m=n$ 时	2.6	$\sum_{k=0}^{n} S(n, k)$	称作 Bell 数
2) 每盒至少一个球（不空）	2.7	$S(n, m)$	称作第二类 Stirling 数
2. 盒子有标记			
1) 每盒球数不限（可以空）	2.8	$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_m}=m^n$	
2) 第 i 个盒子放 n_i 个球 $(i=1, 2, \cdots, m)$	2.9	$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_m}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$	
3) 每盒至少一个球（不空）	2.10	$m!S(n, m)$	

（续表）

数学模型	序号	公式	备注
三、把 n 个相同的球放到 m 个盒子中的方法数			
1. 盒子无标记			
1) 每盒球数不限（可以空）	2.11	$P_m(n)$	$P_m(n)$ 表示把整数 n 划分成不多于 m 项的剖分数
2) 每盒至少一个球（不空）	2.12	$P_m(n)-P_{m-1}(n)$	
2. 盒子有标记			
1) 每盒球数不限（可以空）	2.13	$\binom{n+m-1}{n}$	
2) 每盒至少一个球（不空）	2.14	$\binom{n-1}{m-1}$	
四、n 个不同的球放到 m 个盒子中，并考虑球在盒子中的顺序			
1. 盒子无标记			
1) 每盒球数不限（可以空）	2.15	$n!P_m(n)$	
2) 每盒至少一个球（不空）	2.16	$n!(P_m(n)-P_{m-1}(n))$	
2. 盒子有标记			
1) 每盒球数不限（可以空）	2.17	$n!\binom{n+m-1}{m}$	
2) 每盒至少一个球（不空）	2.18	$n!\binom{n-1}{m-1}$	

题解与评注

2.1 (a) 从甲地到乙地可以走水路、陆路和航空三种不同方式，已知走水路可有 3 条不同的路径，走陆路可有 4 条不同的路径，乘飞机可有 2 条不同的路径。试问从甲地到乙地一共有多少条不同的路径？

(b) 若从甲地到乙地可有 3 条不同的路径，从乙地到丙地可有 2 条不同的路径，问从甲地经过乙地到丙地可有多少条不

同的路径？

解 引用加法原理和乘法原理可立即得出答案。

(a) 从甲地到乙地的路径数为

$$3+4+2=9$$

(b) 从甲地经乙地到丙地的路径数为

$$3\times 2=6$$

2.2 由数字 1, 2, 3, 4, 5 可以构成多少个四位数？若要求：

(a) 所有数字都不同；

(b) 构成的四位数是偶数。

则满足性质(a)，性质(b)，以及性质(a)和(b)两者的四位数各有多少？

解 四位数的每一位都有 5 种选择。所以可构成 5^4 种不同的四位数。

由于要求数字都不同，所以一个四位数就是{1, 2, 3, 4, 5}的一个 4 排列，故其个数是

$$P(5,\ 4)=5\times 4\times 3\times 2=120$$

因为只有个位数选用 2 或 4 时才能组成一个偶四位数。所以个位数只有 2 种选择，其余三位都有 5 种选择，因此组成的偶数个数是

$$5\times 5\times 5\times 2=250$$

若个位数选用数字 2，那末前三位便是{1, 3, 4, 5}的 3 排列，排列数是 $P(4,\ 3)$。若个位数选用数字 4，也有同样结果。于是数字不同的偶四位数个数是

$$2\times P(4,\ 3)=2\times 4\times 3\times 2=48$$

2.3 已知一副纸牌共 52 张。

(a) 洗一副纸牌共可以有多少种不同的结果？

(b) 发一手牌(5 张)可以有多少种不同的结果?

解 (a)因为洗一次牌相当于 52 张的一个重排，所以共有 52! 种不同的结果。

(b) 因为发完 5 张牌之后，这 5 张牌的先后次序就失去意义，所以是一个组合问题，答案为 $C(52, 5)$。

2.4 证明定理 2.4。

证 设 S 是 n 个元素的集合，B 是 S 的任意子集。因为 S 的每一元素都可以有属于 B 和不属于 B 两种可能，根据乘法原理，S 的不同子集个数是

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}_{n\text{个}}=2^n$$

评注 因为 S 的子集可以有 0 个元素，1 个元素，2 个元素，…，n 个元素。根据定理 2.3，S 的 r $(0\leqslant r\leqslant n)$ 子集个数是 $C(n, r)$，利用二项式系数公式得

$$C(n, 0)+C(n, 1)+C(n, 2)+\cdots+C(n, n)=2^n$$

2.5 设 $a=3^4\times 5^2\times 7^3\times 11$，$b=620$，$c=10!$，试分别求出 a, b, c 的不同正因子个数。

解 因为 a 已作了质因子分解，a 的每个因子都可以写成这些质因子的幂之积的形式，即

$$3^i\times 5^j\times 7^k\times 11^l$$

形式，$0\leqslant i\leqslant 4$, $0\leqslant j\leqslant 2$, $0\leqslant k\leqslant 3$, $0\leqslant l\leqslant 1$。因为 i 有 5 种选择，j 有 3 种选择，k 有 4 种选择，l 有 2 种选择。对 i, j, k, l 的每种选择都产生 a 的唯一的一个正因子，于是 a 的正因子个数是

$$5\times 3\times 4\times 2=120$$

类似地，把 b 作质因子分解得

$$b=2^2\times 5\times 31$$

所以 b 的正因子个数是 $3\times2\times2=12$

而 $c=10!=2^8\times3^4\times5^2\times7$，所以 c 的正因子个数是

$$9\times5\times3\times2=270$$

评注 以上几题都是加法原理和乘法原理的简单应用，解法都是直截了当的。但解法的基本思路有普遍意义，一些复杂计数问题的解法往往是这些基本思路的发展。

2.6 求50!的因子中10的最大的幂。

解 将50!作质因子分解得

$$50!=2^{p_2}\cdot3^{p_3}\cdot5^{p_5}\cdot7^{p_7}\cdots47^{p_{47}}$$

显然 $p_2\geqslant p_3\geqslant p_5\geqslant p_7\geqslant\cdots\geqslant p_{47}\geqslant1$，而一个数是10的幂，当且仅当该数的质因子分解的形式为 $2^i\cdot5^i$，所以，50!因子中10的最大的幂应为 10^{p_5}，又

$$p_5=\left[\frac{50}{5}\right]+\left[\frac{50}{25}\right]=10+2=12$$

即50!的因子中10的最大的幂是 10^{12}。

2.7 已知从1到 n 的十进制整数的总数字个数(不包括无效0)是1890，求 n。

解 显然 n 只能是一个3位数，又因为

一位数共有9个；

二位数共有90个。

设三位数有 x 个，则

$$3x+2\times90+9=1890,\ x=567$$

所以，$n=x+100-1=666$。

评注 可把1到 n 都看成3位数，则共有 $3n$ 个数字，但应去掉其中90个二位数和9个一位数所多计算的数字，列出方程：

$$3n-(90+2\times9)=1890$$

所以，$n=666$。

2.8 求由不同的数字组成的非负十进制数的个数。

解 按题意这些十进制数的每一个都是$\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$这十个数字的$r(0<r\leqslant 10)$排列。又排列的第一位不为0，所以含有r个数字的这样的十进制数的个数为

$$9\cdot P(9, r-1)$$

这是因为其第一位可以从非0的9个数字中任取一个，剩下的$r-1$位是剩下的9个数字的$r-1$排列。

又$r=1, 2, \cdots, 10$，且连同0这个特殊的十进制数，所以共有

$$9\cdot\sum_{r=1}^{10}P(9, r-1)+1=9\cdot\sum_{i=0}^{9}P(9, i)+1=8,877,691$$

2.9 (a) 从$S=\{1, 2, \cdots, 99\}$中选出三个数，使其和是3的倍数，问有多少种不同选法？

(b) 对$S=\{1, 2, \cdots, 3n\}$的一般情况求解上题。

解 (a) 可把S中的数按除3所得的余数分成三个子集，余数相同者属同一子集，即

$$A_1=\{1, 4, 7, \cdots, 97\}$$
$$A_2=\{2, 5, 8, \cdots, 98\}$$
$$A_3=\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$$

显然，$|A_1|=|A_2|=|A_3|=99/3=33$。$S$的3个数$a$、$b$、$c$，若$a+b+c$可被3整除，无非是：

i) 三个数同在一子集中；

ii) 三个数分别在3个不同的子集中。

对情况i) 共有

$$3\cdot\binom{33}{3}$$

种选法。对情况 ii)共有

$$\binom{33}{1}^3 = 33^3$$

种选法。所以，共有

$$3\cdot\binom{33}{3}+33^3$$

种选法。

(b) 与(a)类似，只要把(a)中的 33 用 n 来取代，答案为 $3\cdot\binom{n}{3}+n^3$。

2.10 有多少个大于5400且满足①各位数字都不相同，②不出现数字2和7这两个性质的整数。

解 因为数字2和7不出现，所以这样的数只能由 $S=\{0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ 这8个数字所组成，又各位数字都不相同，这样的数最大的是8位数，最小的是4位数，类似题2.8，对5位、6位、7位、8位数共有

$$\sum_{i=4}^{7} 7\cdot P(7, i)$$

个，而大于5400的4位数分情况计算：

1) 千位大于5的，共有 $3\cdot P(7, 3)$ 个；

2) 千位是5，而百位大于4的共有 $3\cdot P(6, 2)$ 个；

3) 前2位是54的，共有 $P(6, 2)$ 个。

根据加法原理，满足上述条件的整数个数是

$$7\cdot\sum_{i=4}^{7} P(7, i)+3P(7, 3)+4P(6, 2)$$

2.11 1到1, 000, 000的自然数中1和0各出现多少次？

解 先不考虑1, 000, 000本身，那末任一个1～1, 000,000之间的数都可以表示成

$$d_1d_2d_3d_4d_5d_6$$

的形式，其中每个d_i是0到9的数字。因为每位数字可以有10种选择，根据乘法原理，共有10^6个"6位数"，又每个"6位数"由6个数字组成(包括无效0)，那末共有6×10^6个数字，又每个数字出现的次数相等，所以其中数字1出现的次数为：

$$\frac{6\times10^6}{10}=6\times10^5$$

连同1,000,000这个数的首位1，所以从1到1,000,000的自然数中1出现的次数为

$$6\times10^5+1.$$

在上述的那些"6位数"中，0出现的次数也应是6×10^5，但习惯上在计算0的个数时，不包括无效0，因而要从中去掉无效0，其中

1位数有9个(不包括0)，其无效0共有5×9个；

2位数有90个，其无效0共4×90个。

余类推，这样，无效0的总数为

$$5\times9+4\times90+3\times900+2\times9000+1\times90000$$

注意到$d_1d_2\cdots d_6$全0时的6个0和1,000,000本身的6个0相互抵消，所以1到1, 000, 000之间的自然数中0出现的次数为

$$6\times10^5-(5\times9+4\times90+3\times900+2\times9000+90000)=488,895$$

评注 利用对称性解题的技巧往往会得到事半功倍的效果，读者可试用其它方法来解此题，与上述解法比较之。

2.12 一个俱乐部有10名男成员和12名女成员，现从中

选出 4 人组成一个委员会，若

(a) 至少要有 2 名女的；

(b) 除上述要求外，又 Math 先生和 Math女士不能同时入选，试分别求出有多少种不同的选法？

解 (a) 设入选女成员有 i 个，那么入选的男成员就有 $4-i$ 个，其选法数为

$$\binom{12}{i}\binom{10}{4-i}$$

又 $2\leqslant i\leqslant 4$，所以选法共有

$$\sum_{i=2}^{4}\binom{12}{i}\binom{10}{4-i}=\binom{12}{2}\binom{10}{2}+\binom{12}{3}\binom{10}{1}+\binom{12}{4}\binom{10}{0}$$
$$=5665 \text{ 种}$$

(b) 只要从上述答案中减去 Math 先生和 Math 女士同时入选的可能情况，若 Math 先生和 Math 女士同时入选，那末另两名只好从 9 名男的和 11 名女的中选出，且至少选入一名女的，与(a)类似，其选法数为

$$\binom{9}{0}\binom{11}{2}+\binom{9}{1}\binom{11}{1}=55+99=154$$

那末，答案为 $5665-154=5511$ 种。

2.13 6 位先生和 6 位女士围桌就座，如果要求男女交替安排座位，试问有多少种可能的坐法？

解 因为男女交替地就座，可让 6 位先生先就座，然后 6 位女士分别插到他们之间，6 位先生就座是圆排列问题，根据公表 2·1中式 2.3，其排列数为

$$(6-1)!=5!$$

6 位女士插入(注意此时不是圆排列问题)，共有 $6!$ 种方法，根据乘法原理，就座方法数为

$$5!\cdot 6!$$

2.14 今有12个人围圆桌就座，如果其中有两个人不愿坐在相邻位子上，有多少种不同的坐法？

解 不考虑上述限制条件时，$n=12$ 的圆排列数为 $11!$。假定那不愿坐在一起的两个人是 A、B，当 A、B 坐在一起时，则相当于 $n=11$ 的圆排列，其排列数为 $10!$，而 A、B 相邻又有两种情况，即 AB 和 BA，那末 A、B 不坐在一起的坐法为

$$11!-2\times 10!=9\times 10!$$

2.15 一个足球队有15名队员，其中5人能踢后场，8人能踢前场，2人既可踢前场又可踢后场，今从中选取7名前锋4名后卫参加比赛，求有多少种选法？（注：只考虑队员们的前后场次序，而不考虑其左右次序。）

解 把15人按其特长分为 S_1, S_2, S_3 三个子集，其中 S_1 是可踢前锋的集合，S_2 是能踢后卫的集合，S_3 是可踢任意位置的集合，显然有

$$|S_1|=8,\ |S_2|=5,\ |S_3|=2$$

分下列情况进行讨论：

1) 不含 S_3 的选法有 $\binom{8}{7}\binom{5}{4}=40$ 种

2) 含 S_3 之一的选法有

i) 被选中的 S_3 中这个人踢前锋，则剩下的人的选法有

$$\binom{8}{6}\cdot\binom{5}{4}=140\text{ 种}$$

ii) 被选中的 S_3 中这个人踢后卫，则剩下的人的选法有

$$\binom{8}{7}\cdot\binom{5}{3}=80\text{ 种}$$

又在 S_3 中选一人有2种选法，所以这情况下的选法有

$$2\times(140+80)=440\text{种}$$

3) S_3 中的两人都选中

i) 这两个人都踢前锋，选法有$\binom{8}{5}\binom{5}{4}=280$ 种；

ii) 这两个人都踢后卫，选法有$\binom{8}{7}\binom{5}{2}=80$ 种；

iii) 这两个人前后场各一，选法有$2\cdot\binom{8}{6}\binom{5}{3}=560$ 种。

所以，总的选法数是

$$40+440+280+80+560=1400$$

2.16 教室中有两排座位，每排 8 个。有 14 名学生，其中 5 人总坐在前排，4 人总坐在后排，问就座方式一共有多少种？

解 因为就座是有次序的，所以是一个排列问题。

5 人在前排就座，其坐法数为 $P(8,\ 5)$

4 人在后排就座，其坐法数为 $P(8,\ 4)$

这时还空 7 个坐位，让剩下的 $14-5-4=5$ 人选坐，他们的就座方式为 $P(7,\ 5)$ 种，根据乘法原理，其就座方式共有

$$P(8,\ 5)\cdot P(8,\ 4)\cdot P(7,\ 5)$$

种。

2.17 从 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ (n+1)\}$ 中选出 3 个数组成一个三重组 $(x,\ y,\ z)$，使得 $z>x$ 且 $z>y$。

(a) 证明：若 $z=k+1$，那末这样的三重组个数恰为 k^2 个 $(1\leqslant k\leqslant n)$。

(b) 这些三重组可分成三种类型：$x=y,\ x<y,\ x>y$，证明第一种类型的三重组个数为$\binom{n+1}{2}$。

第二、三种类型的三重组个数为各$\binom{n+1}{3}$。

(c) 由(a)和(b)推出恒等式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$$

证 (a) 当z固定为$k+1$时，满足$x<z$和$y<z$的x, y各有k种不同的选法，根据乘法原理，其三重组个数为

$$k\cdot k=k^2$$

(b) 当$x=y$时，三重组可看成是二重组，只要从$\{1, 2, \cdots, (n+1)\}$中任选两个不同的数，使其大者为z，小者为x和y，便可构成这样的一个三重组，那末这样的三重组个数为

$$\binom{n+1}{2}$$

当$x<y$时，由于$y<z$，那末从$\{1, 2, \cdots, (n+1)\}$中任取三个不同的数，按其值由小到大的次序构成一个三重组即满足条件，所以这样的三重组个数为

$$\binom{n+1}{3}$$

当$x>y$时，情况与$x<y$完全类似，所以这样的三重组个数也为

$$\binom{n+1}{3}$$

(c) 由(a)可知k可以取$1, 2, , \cdots, n$，所以$\{1, 2, \cdots, n+1\}$所构成的这样的三重组共有

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2$$

个。由(b)可知满足条件的三重组个数是

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{3}$$

所以 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$

评注 类似地可推出 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$。

2.18 节日期间某大楼上挂着15面彩旗（排成一行）。其中红、黄、蓝、绿、橙五色各3面，问这些彩旗共有多少种排列方式？又若不允许有两面蓝旗相邻，求排列方法数。

解 设旗子的集合为 $F=\{3\cdot r,\ 3\cdot y,\ 3\cdot b,\ 3\cdot g,\ 3\cdot o\}$，根据定理2.6，立即得到其排列方式有

$$\frac{15!}{3!3!3!3!3!}=\frac{15!}{6^5}$$

种。

若有两面蓝旗相邻，则可以把这两面旗子看作一面，又一面蓝旗可和其余任何一面相邻，那末其排列数为

$$2\times\frac{14!}{3!3!2!3!3!}=\frac{14!}{6^4}$$

但这样会把三面蓝旗相邻的情况多计算了一次，而三面蓝旗相邻的排列数为

$$\frac{13!}{3!3!1!3!3!}=\frac{13!}{6^4}$$

因此，没有两面蓝旗相邻的排列数为

$$\frac{15!}{6^5}-\frac{14!}{6^4}+\frac{13!}{6^4}=\frac{22\cdot 13!}{6^4}$$

评注 上述解题的基本思想就是简单的包含–排斥原理，这将在第四章中详细讨论。

2.19 在一个 8×8 的国际象棋棋盘上放着 8 个车，试问在下述情况下，各有多少种方法放置这 8 个车，使得没有一个车可攻击另一个车(若两个车处在同一行或同一列便可互相攻击)，

(a) 8 个车相同；

(b) 8 个车都有不同标记；

(c) 8 个车中有 5 个红的，3 个蓝的；

(d) 把(c)中的 8 个车放在 12×12 的棋盘上。

解 (a) 显然每行只能放一个车，第一行的任一列上可以放一个车，有 8 种放法；第二行上除第一行上的那个车所占据的那一列外，其它 7 列可任意地放，因此共有 7 种放法，其余类推，其放法数为 $8!$。

(b) 对应上述任一种放置方式，可将 8 个不同的车在它们所占据的 8 个位置上作重排，将得到 $8!$ 种不同的排列，因此，放置方法总数为 $8!\cdot8!$。

(c) 因 5 个红色的车 (或 3 个蓝色的车) 的任两个互换位置，将不会改变其排列情况。所以，放法数为 $8!\cdot8!/(5!\cdot3!)$。

(d) 因为可从 12×12 棋盘中任选其中的 8 行 8 列组成一个 8×8 的棋盘，其选法数为 $\binom{12}{8}\binom{12}{8}$。又每种不同的选法都有 $8!\cdot8!/(5!\cdot3!)$ 种不同的方法来放置这 8 个车，因此放法总数为

$$\frac{\binom{12}{8}\cdot\binom{12}{8}\cdot8!\cdot8!}{5!\cdot3!}=\frac{12!\cdot12!}{5!\cdot4!\cdot4!\cdot3!}$$

2.20 空间中 25 个点，没有四个点共平面。它们能确定多少个三角形？能确定多少个四面体？

解 由于没有四个点共平面，所以不可能有 3 个点共直线。因而任何三个点都可以组成一个三角形，而任何四个点都可以

组成四面体。于是25个这样的点所构成的三角形、四面体的个数分别是$C(25, 3)=2300$, $C(25, 4)=12650$。

2.21 15个足球队进行联赛，结果对获得前三名的队分别授予金、银、铜杯，而末3名的队被降到低一级的联赛会。我们把两种比赛结果看作是相同的，如果获金、银、铜杯的队相同且被降级的队也相同，那末联赛可能有多少种不同的结果。

解 因为只考虑三个优胜队的名次和3个被降级队的队别，其它队的名次不予考虑，那末获得前3名的情况有

$$P(15, 3)\text{种，即 } C(15, 3)\cdot 3!\text{ 种}$$

而剩下的12个队的3个队被降级的情况有

$$C(12, 3)\text{ 种}$$

因此，不同的比赛结果数为

$$C(15, 3)\cdot 3!\cdot C(12, 3)=600600$$

评注 若先考虑被降级队的情况数为$C(15, 3)$，再考虑从12个队中决出前3名的情况数为$P(12, 3)=C(12, 3)\cdot 3!$，结果是相同的。

2.22 一位秘书在某大厦工作，如图2.1所示，该大厦（B点）在她家（H点）东边9个街段，北边7个街段（图中的线条表示街道）。假定她每天从家里到大厦去上班都走某条递增的路径（即只能向东或向北走）。问她可以走多少种不同的路径？又若图中的AC街段上积满了水使她无法通过，这时她可以走多少种不同的路径？

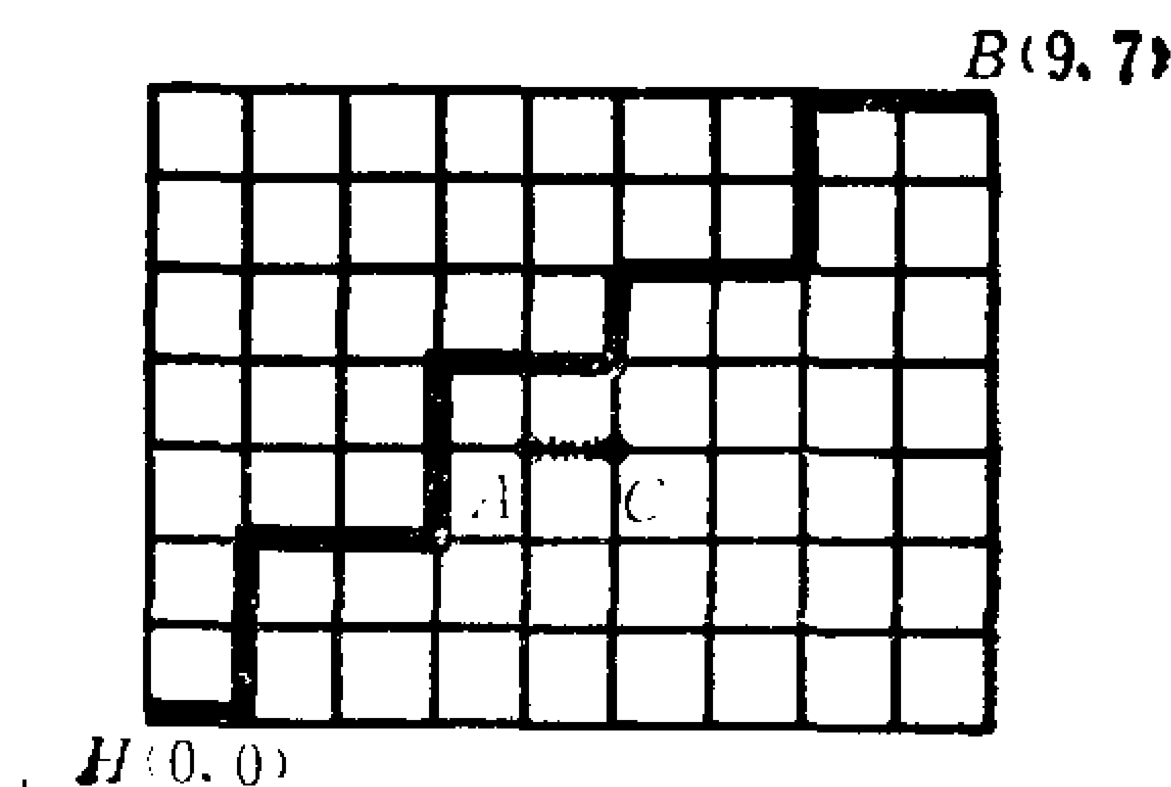


图 2.1

解 如图2.1中所示，建立坐标系。因为她从H点到B点只能向东向北走，若她向东走

一个街段就用一个 E 表示，向北走一个街段就用 N 表示，于是从 H 走到 B 便对应于由 E、N 组成的序列，这个序列含有 9 个 E 和 7 个 N。这样，E、N 序列就是多重集 $S=\{9\cdot E, 7\cdot N\}$ 的一个排列。其排列数为

$$\frac{16!}{9!7!}=C(16, 7)$$

这个数恰是从 H 到 B 的不同路径条数。

又图中所示 A、C 的坐标分别是 $A(4, 3)$ 和 $C(5, 3)$，从 H 到 A 的路径数是

$$\frac{7!}{4!3!}=C(7, 3)$$

而从 C 到 B 的路径数是

$$\frac{8!}{4!4!}=C(8, 4).$$

故从 H 经 AC 到 B 的路径数是 $C(7, 3)\cdot C(8, 4)$，因此，从 H 到 B 不经 AC 的路径数是

$$C(16, 7)-C(7, 3)\cdot C(8, 4)$$

2.23 用组合论的观点解释恒等式

(a) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$;

(b) $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$;

(c) $\binom{n+r+1}{r}=\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r-2}{r-2}+\cdots+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}$;

(d) $C(n, 0)-C(n, 1)+\cdots\pm C(n, n)=0$;

(e) $\binom{m+n}{m}=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{m}\binom{n}{m}$,
$(m\leqslant n)$。

解 (a) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

从 n 个人中选出 r 个人去参加会议，剩下的人留在家里和从 n 个人中选出 $n-r$ 个人留在家里，剩下的人去参加会议的含义是一样的。

(b) $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

在 n 个元素中任取一个，不妨记为 a，则 n 个元素的 r 组合由以下两种情况组成：

i) 不含 a 的 r 组合，其个数是除 a 外 $n-1$ 个元素的 r 组合 $\binom{n-1}{r}$；

ii) 含有 a 的 r 组合，这可加 a 到除 a 外 $n-1$ 个元素的 $r-1$ 组合构成，其组合个数是 $\binom{n-1}{r-1}$。

于是 $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

(c) $$\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r-2}{r-2}+\cdots+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}$$

设 $S=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n+r+1}\}$ 是 $n+r+1$ 个元素的集合。从 S 中选出 r 个元素的组合不外乎下述 $r+1$ 种情况：

·组合中不含 a_1 的，只能从剩下的 $n+r$ 个元素中取 r 个，

其组合数为$\binom{n+r}{r}$。

·组合中含 a_1 但不含 a_2 的，还要从剩下的 $n+r-1$ 个元素中取 $r-1$ 个元素，其组合数是$\binom{n+r-1}{n-1}$。

·组合中含 a_1, a_2 但不含 a_3 的，还要从剩下的 $n+r-2$ 个元素中取 $r-2$ 个，其组合数是$\binom{n+r-2}{r-2}$。

……

·组合中含 $a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}$ 但不含 a_r 的，还要从剩下的 $n+r+1-r=n+1$ 个元素中取 1 个元素，其组合数为$\binom{n+1}{1}$。

·组合中含 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 的，此时组合已定，即只有这一种组合，其组合数为$\binom{n}{0}=1$。

根据加法原理即得到欲证等式。

(d) $C(n, 0)-C(n, 1)+\cdots\pm C(n, n)=0$

经过移项可得

$$C(n, 0)+C(n, 2)+\cdots=C(n, 1)+C(n, 3)+\cdots$$

而这个公式可解释为，n 个元素的集合其所有偶数元子集的个数等于其所有奇数元子集的个数。

设 $|S|=n$, $a\in S$。对 S 的任意子集 B, 若 $a\in B$, 则可构造 $B'=B-\{a\}$, 若 $a\notin B$, 则可构造 $B'=B\cup\{a\}$。这样，S 的偶数元子集便和奇数元子集一一对应。所以，奇偶元子集个数相等。

(e) $\binom{m+n}{m}=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{m}\binom{n}{m}$ $m\leqslant n$

公式可以作下列有趣的解释：

设有m个男的，n个女的$(m\leqslant n)$。其左端表示要从这$m+n$个人中选取m个人的方法数。而右端表示双方坚持"平等"，要末都不取，要末都取一人，要末都取二人，…。总之要对等。虽然这样解释并没有说明公式两边相等，然而存在着奇妙的对应关系可以说明相等。因为从$m+n$个人中选出的m个人可能含有i个男的$(i=0, 1, 2\cdots m)$，那末意味着要有$m-i$个女的，而这$m-i$个入选的女人和没有入选的$m-i$个男人就建立了一一对应关系，于是

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{m-i}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{m-i}\binom{n}{m-i}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{i}$$

而前者就是$m+n$的m组合数。

评注 利用组合解释来证明恒等式通常比直接推导要简单明了，而且同一个恒等式有时可作出多种不同的解释。例如(c)中的公式，也可以由$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_{n+2}\}$的$r$组合中含有$a_1$的个数$(0, 1, 2, \cdots, r)$这样的解释推导出来。

2.24 求$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$的子集个数。

解 在构造S的子集时，S的第i个元素a_i可以取0个，1个，…，n_i个，共有(n_i+1)种可能。根据乘法原理，S的子集个数应为

$$(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)=\prod_{i=1}^{k}(n_i+1)$$

2.25 设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \cdots, n_k\cdot a_k\}$，其中$n_1=1$，$n_2+n_3+\cdots+n_k=n$，证明$S$的圆排列个数等于

$$\frac{n!}{n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

证 因为S共有$n+1$个元素，由定理2.6，S的线排列个数为

$$\frac{(n+1)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}=\frac{(n+1)!}{n_2!\cdots n_k!}$$

但圆排列个数是线排列个数的 $1/(n+1)$，所以本题得证。

2.26 一家面包店卖 6 种不同的面包，假如你想买一打(12只)什锦面包，可有多少种不同的选择方案?

解 假定店里每种面包的数量远远超过 12 只，那末所有面包可表示为 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_6\}$，每一打面包就相当于 S 的一个 12 组合，由定理 2.8 得方案数为

$$C(6+12-1, 12)=6188$$

2.27 设 $S=\{1\cdot a_1, 1\cdot a_2, \cdots, 1\cdot a_t, \infty\cdot a_{t+1}, \infty\cdot a_{t+2}, \cdots, \infty\cdot a_k\}$，求 S 的 r 组合数。

解 把 S 分成两个子集

$$S_1=\{a_1, a_2, \cdots, a_t\}$$

$$S_2=\{\infty\cdot a_{t+1}, \infty\cdot a_{t+2}, \cdots, \infty\cdot a_k\}$$

那末 S 的 r 组合可以从 S_1 中先选出 i 个元素($i=0, 1, 2, \cdots, t$)，再从 S_2 中选出 $r-i$ 个元素，因此 S 的 r 组合数为

$$\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\binom{(k-t)+(r-i)-1}{r-i}=\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}\binom{k+r-i-t-1}{r-i}$$

评注 当 $r<t$ 时，上式仍成立。虽然不可能从 S_1 中选出多于 r 个元素，但其第二个因子为 0。

2.28 (a)设 S 是 n 个元素的集合，把 S 划分成 k 个子集 $S_1, S_2, \cdots, S_k$，若这 k 个子集是已编号的，且可以空，证明不同的划分数是 k^n。

(b) 若 $S=\{n\cdot a\}$，则不同的划分数是 $C(k+n-1, n)$。

证 (a) 因为 S 的每一元素都可独立地处于 k 个子集的任何一个中，根据乘法原理，划分数是 k^n。

(b) 如果我们把"a 放入 S_i"看作是使用 S_i 一次，那末一种

划分使 S_i 含有 n_i 个 $a(0\leqslant n_i\leqslant n)$ 可以看作 S_i 被使用 n_i 次，由于每个子集的使用次数不限，且这些子集在一次划分中总共使用 n 次，所以 S 的划分和 $A=\{n\cdot S_1,\ n\cdot S_2,\ \cdots n\cdot S_k\}$ 的 n 组合一一对应，因而不同划分数为 $C(n+k-1,\ n)$。

2.29 在上题(a)中，若规定第 i 个子集恰含有 n_i 个元素，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，证明不同的划分数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

证 把 $n!$ 种全排列的每一个从左到右地分成 k 段，第 i 段有 n_i 个元素，这样，每一排列就得出一种划分，但对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，第 i 段中 n_i 个元素的 $n_i!$ 个不同排列却认为是相同的，所以 $n!$ 要除以 $n_i!$，故划分总数是 $\dfrac{n_i!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_k!}$。

2.30 从 $N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 20\}$ 中选出 3 个数，使得没有两个数相邻，有多少种不同的选法？对 $N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 回答上述问题。

解 不考虑限制条件时选法数为 $C(20,\ 3)$。

(1) 恰有两个数相邻，共有 19 种情况，其中：

i) 这两个数是 1、2，那末第 3 个数可以是 4 到 20 中的任一个，即有 17 种选法。

ii) 这两个数是 19、20，与 i)类似也有 17 种选法。

iii) 这两个数选在中间位置，那末第三个数只有 16 种选法。

因此，恰有两个数相邻时的选法数为

$$17+17+(19-2)\times 16=17\times 18$$

(2) 若三个数都相邻，共有 18 种选法。

由(1)和(2)得没有两个数相邻的选法共有

$$C(20,\ 3)-(17\times 18+18)=C(20,\ 3)-18^2$$

对于 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$的一般情况，答案为

$$C(n, 3)-(n-2)^2$$

读者可用上述方法自行推导。

2.31 从 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ 中选取 k 个数，使之没有两个数相邻，求不同的选法数。

解 设$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$是 S 的一个 k 元子集，且无两个数相邻，并假定它们是由小到大排列的，因而应满足：

$$1\leqslant a_1<a_2-1<a_3-2<\cdots<a_k-(k-1)\leqslant n-(k-1)$$

因此，$\{a_1, a_2-1, \cdots, a_k-k+1\}$是 $S'=\{1,2,\cdots, n-(k-1)\}$的任一 k 子集。相反，对 S' 的任一子集$\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$并设

$$1\leqslant b_1<b_2<b_3<\cdots<b_k\leqslant n-(k-1)$$

则可构造集合

$$\{b_1, b_2+1, b_3+2, \cdots, b_k+(k-1)\}$$

显然是 S 的一个没有两个数相邻的子集，这样就建立了一一对应的关系。而 S' 的 k 子集数是

$$\binom{n-k+1}{k}$$

所以，S 的不含两个数相邻的 k 组合数是

$$\binom{n-k+1}{k}$$

评注 一一对应的技巧是相当灵活的，它使得这个似乎无法下手的问题，一下子变得如此简单。本题是上一题的推广，试把 $k=3$ 代入，检验结果是否一致。

2.32 一个凸 n 边形中，以其顶点为顶点，对角线为边(不含多边形的边)的三角形个数是多少？

解 此问题可转化成问题 2.30，不过此时把 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$中的 1 和 n 也看作相邻的两个数，只要从题 2.30 的答案中减

去 1 和 n 都取，而 2 和 $n-1$ 都不取的那些情况，显然有 $n-4$ 种可能的取法，那末答案为

$$\binom{n}{3}-(n-2)^2-(n-4)=\frac{n}{3}\binom{n-4}{2}$$

2.33 证明一个凸 n 边形中，以其顶点为顶点，对角线为边(不包括原多边形的边)的 k 边形个数是$\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$。

证 对于某个特定的顶点 A，先求出过 A 点的 k 边形的个数。因为 A 点已定，那末除去 A 点和其相邻的左右两个点外，还要从剩下的 $n-3$ 个点中选出 $k-1$ 个不相邻的点以组成 k 边形，根据题 2.32 的结论，其取法数是

$$\binom{(n-3)-(k-1)+1}{k-1}=\binom{n-k-1}{k-1}$$

过每个顶点的 k 边形个数都是$\binom{n-k-1}{k-1}$个，共有 n 个顶点，同时又考虑到每个 k 边形的 k 个顶点将重复计算 k 次，那末共可组成的 k 边形个数是$\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$。

2.34 两个十位数，如果重排一个能够得到另一个则称这两个十位数是等价的，那末有多少个互不等价的十位数？

解 由题意，在这样的十位数中，各数字的位置无关紧要，而仅取决于其数字的组成情况。因此可以看作是 $S=\{\infty\cdot 0, \infty\cdot 1, \cdots, \infty\cdot 9\}$的 $r=10$ 的组合，其组合数为

$$\binom{10+10-1}{10}=\binom{19}{10}$$

但当十个数全为 0 时，无论怎样重排也不能构成一个十位数。所以互不等价的十位数是

$$\binom{19}{10}-1$$

2.35 n 个相同的球放入 r 个有标记的盒子中 $(n\geqslant r)$ 而无一盒为空。证明放置方法数为 $\binom{n-1}{r-1}$。

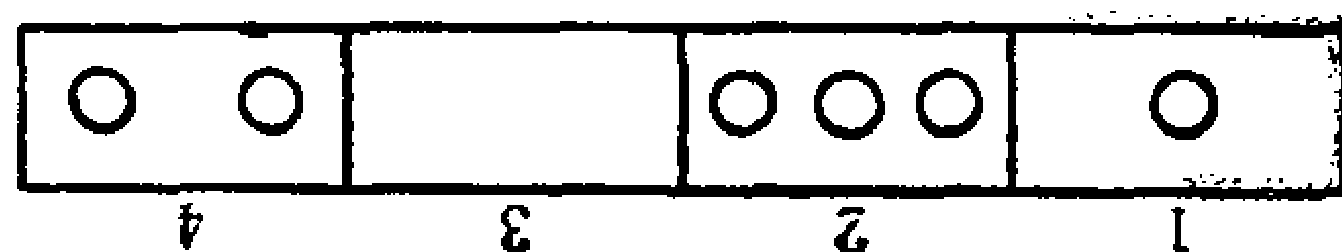
证 因为盒子不能空，所以每个盒子可先放一个球。然后把剩下的 $n-r$ 个球任意地放到 r 个盒子中，因为此时每盒的球数不限，这相当于求 $S=\{\infty\cdot b_1, \infty\cdot b_2, \cdots, \infty\cdot b_r\}$ 的 $n-r$ 组合，其组合数为

$$\binom{r+(n-r)-1}{n-r}=\binom{n-1}{n-r}=\binom{n-1}{r-1}$$

评注 此题还可以看作把 n 个球排成一行，任两个相邻的球之间都有一个档板隔开，从这 $n-1$ 个档板中任取 $r-1$ 个，把这些球分成 r 段，则每段至少一个球。按从左至右顺序，第一段中的球放在第一个盒子中，第二段中的球放在第二个盒子中，等等。这样便立即得到答案为

$$\binom{n-1}{r-1}$$

2.36 把若干相同的球依次放在标号为1、2、3、4的盒子中，从第一个盒子起，每放一个球，就记下该盒子的编号一次，这样可以产生一个由数字1、2、3、4所构成的递增序列。如图2.2所示。



1, 2, 2, 2, 4, 4

图 2.2

证明在 m 个字符组成的字母表上所能构成的长度为 n 的

递增字的数目为

$$\binom{m+n-1}{n}$$

(注：一个递增字中，其字母是按字母表顺序排列的。)

证 把每个字符 i 看成是标记为 i 的一个盒子，m 个字符看成是按字母表序排好的 m 个有标记的盒子。这样，一个长为 n 的递增字，就对应于把 n 个球放入 m 个盒子中（每盒球数不限）的一种放置方式，反之亦然。但后者的放置方式个数是 $\binom{n+m-1}{n}$。故长为 n 的递增字个数也是这个数。

2.37 证明把 x 个 1 和 y 个 0 排成一行，且没有两个 1 相邻的排列数是 $\binom{y+1}{x}$。

证 先把 x 个 1 排成一行，因为两个 1 不能相邻，所以要把 $x-1$ 个 0 插在这 x 个 1 之间，使其隔开。这样还剩下 $y-(x-1)=y-x+1$ 个 0 可以任意地放在这 x 个 1 之间或两端的任何地方，与题 2.35 类似，放置方法数为

$$\binom{(x+1)+(y-x+1)-1}{y-x+1}=\binom{y+1}{x}$$

2.38 (a) 长度为 k 的由 0, 1 组成的串的个数是多少？(要求每串至少有一个 1)。

(b) 有多少种方式可以同时产生 n 个这样的串，其中串可以相同也可以不同，但每串至少有一个 1。

(c) S 是一个具有 n 个元素的集合，选取 S 的 k 个子集(每个子集中的元素个数不限)，把这些子集顺序地记作 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，对 S 的每个元素建立一个 0, 1 串，如果该元素属于 B_j，则对应串中第 j 项为 1，否则为 0，(这相当于每个子集 $B_1, B_2, \cdots,$

B_k 都具有一个长度为 n 的 0, 1 串。）如果我们要求 S 的每一个元素至少属于一个子集，则每串中至少有一个 1，那末有多少种方法，可选取 S 的这样 k 个有序子集而这些子集的并集等于 S。

解 (a) 把这样的串记作

$$d_1d_2\cdots d_k$$

因为每一个 $d_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 可以有两种选取(0 或 1)，则共可产生 2^k 个不同的 0, 1 行。除去全 0 的那种情况外，至少有一个 1 的 0、1 串个数为 2^k-1。

(b) 由(a)可知每一个串都有 2^k-1 种不同的选取，而同时产生的串又可以相同，根据乘法原理，n 个这样的串的产生方式数为 $(2^k-1)^n$。

(c) 可构造 n 个长度为 k 的 0, 1 串，如下边矩阵形式

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2\cdots B_j\cdots B_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0\cdots 1\cdots 1 \\ 1 & 0\cdots 1\cdots 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 1 & 1\cdots 0\cdots 0 \end{array}\right] \end{array}$$

因为要求 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k=S$，使 S 的每个元素至少属于某一个子集，这样 n 个长度为 k 的 0, 1 串的每一个至少有一个 1，又 B_1, B_2, $\cdots$, B_k 都作了不同的标记，因此 S 的这样的 k 个子集的选法为 $(2^k-1)^n$种。

2.39 可以有多少种方法从一个 n 个元素的集合中选出 k 个具有不同标记的子集 B_1, B_2, $\cdots$, B_k，使得这 k 个子集的交集为空。

解 因为 $B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_k=\varnothing$，说明没有任何一个元素同属于这 k 个子集，于是可仿题 2.38 那样对每个元素构造长度为

k 的 0, 1 串，但每串中至少有一个 0，这样立即得出答案 $(2^k-1)^n$。

2.40 给定一个 n 种事物的集合，其中有

n_1 个事物重复系数为 1,

n_2 个事物重复系数为 2,

n_3 个事物重复系数为 3, 等等，即

$$S=\{\underbrace{1\cdot a_1,\ 1\cdot a_2,\ \cdots,\ 1\cdot a_{n_1}}_{n_1\text{ 个}},\ \underbrace{2\cdot b_1, 2\cdot b_2, \cdots, 2\cdot b_{n_2}}_{n_2\text{ 个}},$$

$$\underbrace{3\cdot c_1, 3\cdot c_2, \cdots, 3\cdot c_{n_3}}_{n_3\text{ 个}}, \cdots\}$$

证明把这 n 种事物放进 m 个不同的盒子中（允许有空盒），其方法数为

$$m^{n_1}\binom{m+1}{2}^{n_2}\binom{m+2}{3}^{n_3}\cdots$$

证 把 n_1 个重复系数为 1 的事物放入 m 个不同的盒子的方法数是 m^{n_1}(根据表 2.1 中公式 2.8)。

把 $2\cdot b_1$ 放到 m 个不同的盒子中的方法数是 $\binom{m+1}{2}$(根据表 2.1 公式 2.13，此时 $n=2$)，而这种重复系数为 2 的事物共 n_2 个，每一种放法数都是 $\binom{m+1}{2}$种，所以共有 $\binom{m+1}{2}^{n_2}$种。

类似地，把重复系数为 3 的 n_3 种事物放进 m 个不同盒子中的放法数为 $\binom{m+2}{3}^{n_3}$，其余类推。因此放法总数为

$$m^{n_1}\binom{m+1}{2}^{n_2}\binom{m+2}{3}^{n_3}\cdots$$

2.41 有 k 种糖果，每种有无限多块，把它们分给 n 个小朋

友，假定每个人对同一种糖果最多分得一块，在下述情况下，各有多少种分法？

(a) 每人可得任意多块(包括 0)。

(b) 每人都分得两块，且两个人可以相同。

解 (a) 因为对一个小朋友来说，任一种糖果都有分给他和不分给他两种可能，那么 k 种糖果，共有 2^k 种可能。一个小朋友的分配情况不影响另一个小朋友的分配，所以 n 个小朋友的分配方法数是 $(2^k)^n=2^{kn}$。

(b) 很明显，一个小朋友的分配方法有 $\binom{k}{2}$ 种，那末 n 个小朋友的分配方法数是 $\binom{k}{2}^n$。

2.42 k 种糖果，每种都有有限多块，即第 i 种糖果有 a_i 块 $(i=1, 2, \cdots, k)$，把它们全部分给 n 个小朋友，每人可分任意多块(包括 0)，试求分配方法数。

解 把第 i 种的 a_i 块相同的糖果分给 n 个小朋友的分配方法数是 $\binom{a_i+n-1}{a_i}$(根据表 2.1 中公式 2.13)，而每种糖果的分配互相无关，所以总的分配方法数是

$$\prod_{i=1}^{k}\binom{a_i+n-1}{a_i}$$

2.43 证明把一个数 n 剖分成 m 项的剖分数等于把数 $n-m$ 剖分成不多于 m 项的剖分数。

证 用一一对应技术。

设 $n=a_1+a_2+\cdots+a_m$ 是 n 的一个 m 项剖分，并假定 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_m\geqslant 1$，那末

$$(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_m-1)=n-m$$

是 $n-m$ 的一个剖分，且项数不超过 m。

反之，设 $a_1+a_2+\cdots+a_r=n-m(r\leqslant m)$ 是 $n-m$ 的一个剖分，那末

$$\underbrace{(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_r+1)}_{r\text{项}}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m-r\text{项}}$$
$$=((n-m)+r)+(m-r)=n$$

是 n 的一个 m 项剖分。于是这两种剖分一一对应，故其剖分数相等。

2.44 证明把 n 剖分成 m 个互不相同项的剖分数等于把数 $n-\binom{m}{2}$ 剖分成 m 项的剖分数。

证 设 $n=a_1+a_2+\cdots+a_m$ 是 n 的一个 m 项剖分，且 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 互不相同，不妨假设

$$a_1>a_2>\cdots>a_m\geqslant 1$$

于是有

$$(a_1-(m-1))\geqslant(a_2-(m-2))\geqslant\cdots\geqslant(a_{m-1}-1)\geqslant a_m\geqslant 1$$

和

$$(a_1-(m-1))+(a_2-(m-2))+\cdots+(a_{m-1}-1)+a_m$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_m)-[(m-1)+(m-2)+\cdots+1+0]$$
$$=n-\binom{m}{2}$$

这就得出 $n-\binom{m}{2}$ 的一个 m 项的剖分，反之对 $n-\binom{m}{2}$ 的任一 m 项剖分，把这 m 项由大到小地分别加上 $(m-1)$，$(m-2)$，$\cdots$，1，0 到各项上便得到 n 的一个各项互不相同的 m 项剖分。

因此，这两种剖分是一一对应的，所以剖分数相等。

2.45 证明周长为 $2n$，边长为整数的三角形的个数，等于把数 n 剖分成三项的剖分数。

证 设 n 的一个剖分 $n=x+y+z$，那末

$$2(x+y+z)=(x+y)+(x+z)+(y+z)=2n$$

其中 $(x+y)+(x+z)=2x+(y+z)>y+z$

同理 $(y+z)+(x+z)>(x+y)$，$(x+y)+(y+z)>(x+z)$

因此 $(x+y)$，$(x+z)$，$(y+z)$ 可以组成一个三角形，且周长为 $2n$。

反之，设一个周长 $2n$ 的三角形，其三条边长 a，b，c 是整数，则

$$n=\frac{a+b+c}{2}$$

设 $x=n-a$，$y=n-b$，$z=n-c$。显然 x，y，z 都是正整数，而

$$x+y+z=n-a+n-b+n-c=3n-(a+b+c)=n$$

即构成 n 的一个剖分。命题得证。

评注 以上几题都是用一一对应技巧证明两种组合数相等的例子，用法很巧妙。下面给出一个用一一对应的技巧进行计数的例子。

2.46 设 $A=\{1, 2, \cdots, n\}$，求 $f: A\to A$ 的单调递增函数的个数。

解 设 $A'=\{0, 1, 2, \cdots, n, n+1\}$，对任一 $f: A\to A$ 总可以构造一个 $f': A'\to A$ 与之对应，这里

$$f'(0)=1,\ f'(n+1)=n,\ x\in A \text{ 时} f'(x)=f(x)$$

显然这是一一对应的，且 f 是递增的当且仅当 f' 是递增的。又递增函数 $f': A'\to A$ 与 $(0, 1)$ 点经 $(1, 1)$ 点到达 $(n+1, n)$ 点的递增路径一一对应。(因为 $f(1)\geqslant 1$，$f(n)\leqslant n$)，如图 2-3 所示。

由题 2.22 可知，递增路径的条数为

$$\binom{n+1-1+n-1}{n}=\binom{2n-1}{n}$$

因而所求的递增函数 f: $A \to A$ 亦有$\binom{2n-1}{n}$个。

图 2.3

2.47 把一 n 个元素的集合 S 进行分割，从S本身起，每一次把某一个多于一个元素的子集分成两个非空子集。直到所有的子集都只有一个元素。试求不同的分割方法数。

解 这样的一个分割过程倒过来看就成为一个合并过程，即对 n 个单元素集合，每一次合并任意两个集合，直至得到全集 S，共经过 $n-1$ 步。第一步合并的方式有$\binom{n}{2}$种，第二步合并方式有$\binom{n-1}{2}$种，如此等等，最后一次把两个集合合并成 S，有$\binom{2}{2}=1$种方式。根据乘法原理，总的合并方法数为

$$\binom{n}{2}\binom{n-1}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot 1}{2}$$

$$=\frac{n!\,(n-1)!}{2^{n-1}}$$

2.48 有一根 n 厘米长的木棒，若每次把长度大于 1 厘米的某一段截成整数长度的两段，最后得到 n 段长度为 1 厘米的小木棒，求不同的截法数。

解 在此木棒上标上刻度，起点为 0，终点为 n，那末中间共有 $n-1$ 个点，显然任何一次截割都必须在这些点上进行，且每一个点都必须截割一次。

第一次可以从 $n-1$ 个点中的任一个点上截割。

第二次可以从剩下的 $n-2$ 个点中的任一个点上截割。

其余类推，可见截割的方法数为 $(n-1)!$。

评注 题 2.47 和 2.48 两题乍看起来似乎一样，但其解法和结果却千差万别。其原因是木棒是一个有机的整体，它的元素(如果把它的每一小段看成一个元素的话)之间是有联系的，而集合的元素是一盘散沙，因此在解题时必须弄清题意和涉及的事物性质，才能套用模式，而不能盲目从事。

2.49 证明表 2.1 中公式 2.9。

证 因为

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$$
$$=\underbrace{(x_1+x_2+\cdots+x_m)}_{\text{第一个因子}}\underbrace{(x_1+x_2+\cdots+x_m)}_{\text{第二个因子}}\cdots\underbrace{(x_1+x_2+\cdots+x_m)}_{\text{第 }n\text{ 个因子}}$$

其中：

第一个因子表示第一个球或放入盒子 1 中，或放入盒子 2 中，…，或放入盒子 m 中。

第二个因子表示第二个球或放入盒子 1 中，或放入盒子 2 中，…，或放入盒子 m 中。

……

而 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 的展开式的每一项都是一个系数乘以 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ 的形式，且次数之和 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，而 $x_1^{n_1}$ 的含义是第一个盒子(对应 x_1) 使用了 n_1 次 (即放入了 n_1 个不同的球，$x_2^{n_2}$ 的含义是第二个盒子(对应 x_2)使用了 n_2 次 (即放入了 n_2 个不同的球)，其余类推，这样 n 个球放入 m 个盒子中的方案数

就与多项式的展开式某一项的系数对应相等。

又在放这m个球时：

放入第一个盒子中的 n_1 个球可以从 n 个球中任选 n_1 个。

放入第二个盒子中的 n_2 个球可以从 $n-n_1$ 个球中任选 n_2 个。

……

因此，放球方法数为：

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-(n_1+n_2)}{n_3}\cdots\binom{n-(n_1+n_2+\cdots+n_{m-1})}{n_m}$$

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-(n_1+n_2))!}\cdot\cdots\cdot\frac{n_m!}{n_m!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}=\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_m}$$

注意 $n=n_1+n_2+\cdots+n_m$。

2.50 证明定理 2.7。

证 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式的项数是指（在合并同类项之后）不同的 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ 的个数，又因为 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，所以其项数等于方程

$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$（其中 $0\leqslant n_i\leqslant n(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$）的解的个数，也就相当于 $\{\infty\cdot b_1,\ \infty\cdot b_2,\ \cdots,\ \infty\cdot b_m\}$ 的 $r=n$ 的组合数，其组合数为$\binom{m+n-1}{n}$。

因此 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式的项数是$\binom{m+n-1}{n}$。

在 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 中令 $x_1=x_2=\cdots=x_m=1$，于是多项式展开式右端等于 m^n，而左端等于各系数之和。因此

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_m}=m^n$$

这个结果也就证明了表 2·1 中公式 2.8。

2.51 从组合论角度解释，为什么定理2.6中的 S 的排列数等于表 2.1 中公式 2.9 的放球方法数?

解 把 n 个不同的球排成一行，且顺序地编号 1, 2, …, n。取 n 个盒子，并把其中 n_1 个盒子标上 1 号，n_2 个盒子标上 2 号，…，把 n_m 个盒子标上 m 号。把 n 个带有 1, 2, …, m 标号的盒子，对应地排在 n 个球之下，这样每个球都放入对应的盒子中，然后将标号相同的盒子中的球都集中在相应标号的一个盒子中，于是第一个盒子中就有 n_1 个球，第二个盒子中就有 n_2 个球等等。若球的顺序不变，盒子的每一次不同的排列就产生把 n 个球放入 m 个盒子中使第 i 个盒子具有 n_i 个球 ($i=1, 2, \cdots, m$)的不同结果。反之亦然。而盒子的排列，就是

$$S=\{n_1\cdot b_1,\ n_2\cdot b_2,\ \cdots,\ n_m\cdot b_m\}$$

的一个重排。因此，S 的排列数等于 n 个球的放置方法数。

2.52 一个英文字“Mississippi”中的字母有多少种不同的排列方式?若两个 i 不能相邻，又如何呢?

解 字“Mississippi”可以看成 $S=\{1\cdot \mathrm{m},\ 4\cdot \mathrm{s},\ 4\cdot \mathrm{i},\ 2\cdot \mathrm{p}\}$ 的一个排列，根据定理 2.6, S 的不同排列个数是

$$\frac{11!}{1!2!4!4!}$$

因为 S 的一个排列要占据 11 个位子，若 i 不可相邻，那末就要从中取出 4 个互不相邻的位置放置 i，由题2.31其选法数为

$$\binom{11-4+1}{4}=\binom{8}{4}$$

那末剩下的 7 个位置可任意地放置其它三种字母，其排列数为

$$\frac{7!}{1!2!4!}$$

因此没有两个 i 相邻的排列数为

$$\binom{8}{4}\cdot\frac{7!}{1!2!4!}$$

2.53 (a) 把 $3n$ 个有标记的球放入 3 个盒子中，每盒中有 n 个球，求放法数。

(b) 把 kn 个有标记的球放入 k 个盒子中，每盒中有 n 个球，求放法数。

解 (a) 先把盒子看作有标记，利用表2·1中公式 2.9，其放法数为：

$$\binom{3n}{n,\ n,\ n}=\frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

而盒子并无标记，因而重复计算 3! 次，所以放法数实为：

$$\frac{(3n)!}{3!(n!)^3}$$

(b) 仿(a)立即得到答案为：

$$\frac{(kn)!}{k!(n!)^k}$$

2.54 三个人分享下列水果：桔子、桃子、梨、李子、草莓、葡萄各一个，苹果 6 个。那末其分配方式有多少种？

解 6 个苹果分给三人，每人不限数量的分法数是

$$\binom{6+3-1}{6}=\binom{8}{6}=\binom{8}{2}$$

另外 6 种水果的每一种又可以属于三个人中的任何一人，其分法有 3^6 种。根据乘法原理，总分配方法数为

$$\binom{8}{2}\cdot 3^6=20,412$$

2.55 (a) 证明 2^n 可以整除 $(2n)!$。

(b) 证明 $\frac{(n^2!)!}{(n!)^{n+1}}$ 是一个整数。

证 (a) 因为 $2n=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n\text{个}}$，所以

$$\frac{(2n)!}{2^n}=\frac{(2n)!}{2!2!\cdots2!}=\binom{2n}{2,\ 2,\ \cdots,\ 2}$$

是一个多项式系数，当然是一个整数。因此 2^n 可以整除 $(2n)!$。

(b) 由题 2.53(b) 可知 $\frac{(kn)!}{k!(n!)^k}$ 是一个整数（因为它表示 kn 个球放入 k 个盒子中的方法数）。

令 $k=n$ 代入，则

$$\frac{n^2!}{n!(n!)^n}=\frac{n^2!}{(n!)^{n+1}}$$

是一个整数，因而

$$\frac{(n^2!)!}{(n!)^{n+1}}$$

也是一个整数。

2.56 证明由数字 1, 1, 2, 3, 3, 4 所组成的四位数的个数由

$$4!+2\binom{3}{2}\binom{4}{2,\ 1,\ 1}+\binom{4}{2}=102$$

所给定。

证 上式已提示了我们证明过程。因为这样的四位数无非有下列四种情况：

i) 无重复数字。因而是 1, 2, 3, 4 这四个数字的排列，共有 4! 个。

ii) 有两个 1，但无两个 3。因为已有两个 1，那末另两个数从 2, 3, 4 中选出，其选法数为 $\binom{3}{2}$，这样 4 个数字作排列，其排

列数为

$$\frac{4!}{2!1!1!}=\binom{4}{2,\ 1,\ 1}$$

因此，这种情况的四位数有$\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2,\ 1,\ 1}$个。

iii) 有两个3，但无两个1，与ii)相同，其个数有

$$\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2,\ 1,\ 1}$$

iv) 有两个1和两个3，其个数为

$$\frac{4!}{2!2!}=\binom{4}{2}$$

因此，这样的四位数的个数共为

$$4!+2\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2,\ 1,\ 1}+\binom{4}{2}=102$$

2.57 在一个8×8的国际象棋盘上：

(a) 其后排放置两个车，两个马，两个象，一个王和一个后，共8个棋子，有多少种杂乱的放法？

(b) 把全部32个棋子（按某种合法的规则或不按其规则）放在棋盘上，有多少种不同的方法？

解 (a) 直接引用定理2.6，得到答案为

$$\binom{8}{2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1}=\frac{8!}{2^3}=7!$$

(b) 棋盘上共有64个格，每格可放一个棋子，因此不同的分布个数是

$$\binom{64}{8,\ 8,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2}$$

2.58 证明下列恒等式，并给出组合论解释。

$$\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k}=\binom{n-1}{r_1-1, r_2, \cdots, r_k}+\binom{n-1}{r_1, r_2-1, \cdots, r_k}+\cdots+\binom{n-1}{r_1, r_2, \cdots, r_k-1}$$

证 右端 $=\frac{(n-1)!}{(r_1-1)!r_2!\cdots r_k!}+\frac{(n-1)!}{r_1!(r_2-1)!\cdots r_k!}+\cdots+\frac{(n-1)!}{r_1!r_2!\cdots(r_k-1)!}$

$=\frac{(n-1)!(r_1+r_2+\cdots+r_k)}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$

$=\frac{n(n-1)!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}\quad (\because r_1+r_2+\cdots+r_k=n)$

$=\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k}$

$\binom{n}{r_1, r_2\cdots, r_k}$表示 n 个不同的球放入 k 个不同的盒子中，第一个盒子放 r_1 个球，第二个盒子放 r_2 个球，…，第 k 个盒子放r_k个球的放置方法数。其放法可分成下列几种情况，即对于某个特定的球(如 b_1)，它可以放入这 k 个盒子中的任一个。

b_1 放在第 1 个盒子中时，其余 $n-1$ 个球的放法数:

$$\binom{n-1}{r_1-1, r_2, \cdots, r_k}$$

b_1 放在第 2 个盒子中时，其余 $n-1$ 个球的放法数:

$$\binom{n-1}{r_1, r_2-1, \cdots, r_k}$$

……

b_1 放在第 k 个盒子中时，其余 $n-1$ 个球的放法数:

$$\binom{n-1}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k-1}$$

这样，两边的计数应相等，因此恒等式成立。

2.59 用 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n(x_1+x_2+\cdots+x_m)^s$ 展开式的系数推导出公式

$$\binom{n+s}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_m}=\binom{n}{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m}\cdot\binom{s}{l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_m}+\cdots$$

式中右边是对下列所有的情况求和，即每个 k_i, l_i 都是非负整数，且满足：

$$k_i+l_i=r_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

同时

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$$

$$l_1+l_2+\cdots+l_m=s$$

证 公式左端表示把 $n+s$ 个不同的球放入 m 个不同的盒子中，且使第 i 个盒子中放 r_i 个球 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 的放法数。

右端则表示上述 $n+s$ 个球可分成 n 个和 s 个两部分，可先把 n 个球放在 m 个盒子中，使得第 i 个盒子中的球数为 $0\leqslant k_i\leqslant r_i$ 个 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。然后再把 s 个球放在 m 个盒子中，使得第 i 个盒子中放 r_i-k_i 个球。这样，每改变一组 k_i 的值，便得到若干种不同的放法数。在遍历

$$k_i+l_i=r_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

且

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n,\ l_1+l_2+\cdots+l_m=s$$

的所有情况时，就相当于把 $n+s$ 个球放入 m 个盒子中，使得第 i 个盒子中有 r_i 个球的所有放法。于是证明了公式。

2.60 (a) 给定一个 n，对所有 $\binom{n}{a,\ b,\ c,\ d}$ 形式的多项式系数（其中 $a+b+c+d=n$）的每一项乘以 $(-1)^{a+b}$，证明这些多项式系数之和为 0。

(b) 如何把上述情况一般化?

证 (a) 考虑 n 次多项式

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^n$$

它的展开式的每一项都是

$$\binom{n}{a,\ b,\ c,\ d}x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d$$

形式,其中 $a+b+c+d=n$, 令 $x_1=x_2=-1$, $x_3=x_4=1$, 则

$$(-1-1+1+1)^n=0$$

而多项式展开式的右端是

$$\sum_{a+b+c+d=n}\binom{n}{a,\ b,\ c,\ d}(-1)^{a+b}$$

这相当于 $(x_1+x_2+x_3+x_4)^n$ 的展开式中每一个系数 $\binom{n}{a,\ b,\ c,\ d}$ 都乘以 $(-1)^{a+b}$。因此命题得证。

(b) 对具有 m 个变元的 n 次多项式,若 $m=2k$, 其系数形式都是

$$\binom{n}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k,\ r_{k+1},\ \cdots,r_{2k}}$$

若使其每一项的系数都乘以 $(-1)^{r_1+\cdots+r_k}$, 则其所有的系数之和为 0, 证法同(a)。

2.61 (a) 证明若 p 是一个质数,则 p 整除

$$\binom{p}{a,\ b,\ c,\ \cdots}$$

除非这个多项式的系数为 1。

(b) 通过把 n^p 写成 $(1+1+\cdots+1)^p$ 的形式, 证明 p 整除 n^p-n(称作 Fermat 小定理)。

证 (a) $\binom{p}{a,\ b,\ c,\ \cdots}=\frac{p!}{a!b!c!\cdots}=\frac{p(p-1)!}{a!b!c!\cdots}$

是一个多项式系数。因此是一个整数。而p又是一个质数，所以$a!b!c!\cdots$中不可能含有p这个因子。除非在$a,\ b,\ c,\ \cdots$中的某一项等于p，其余全为0，此时$\binom{p}{a,\ b,\ c,\ \cdots}=1$。所以

$$\binom{p}{a,\ b,\ c,\ \cdots}\Big/p=\frac{p(p-1)!}{a!b!c!\cdots}\Big/p=\frac{(p-1)!}{a!b!c!\cdots}$$

也是一个整数，这就证明了命题。

(b) 因为

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^p$$

$$=\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_n=p}\binom{p}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_p}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$$

由(a)可知除非$\binom{p}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n}=1$外，每一项系数都可被$p$整除。

令$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$，则

$$n^p=\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_n=p}\binom{p}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n}$$

右端恰有n项其值为1，除去这n项之外，它们的和是n^p-n。由于其每一项都可为p整除，当然其和也可为p所整除。即证明了p可整除n^p-n。

2.62 用n个不同颜色的珠子穿成一个项链，问可以有多少种不同的穿法？

解 根据定理2.2，n个不同颜色的珠子的圆排列数是$(n-1)!$，但项链可以翻转，即以一种圆排列穿成的项链和以此圆排列的逆序穿成的项链是相同的。因此共有

$$(n-1)!/2 \quad (n>2)$$

种不同穿法。

2.63 若不考虑可翻转的情况，现有 n 种不同颜色的珠子，每种个数不限。假定一个项链至少要有 2 种不同颜色的珠子做成，那末用这 n 种不同颜色的珠子可穿制多少种由 p 颗珠子组成的项链?(其中 p 是一个质数)

解 从 n 种珠子当中选出 p 个穿成一串（线排列）共有 n^p 种，但其中有 n 种情况是由单色珠子组成的，因此非单色串共有

$$n^p - n$$

种，把这串首尾相连，可得到

$$(n^p - n)/p$$

种不同的项链。因为这个数表示项链个数，所以它是一个整数，这就间接地证明了 Fermat 小定理。

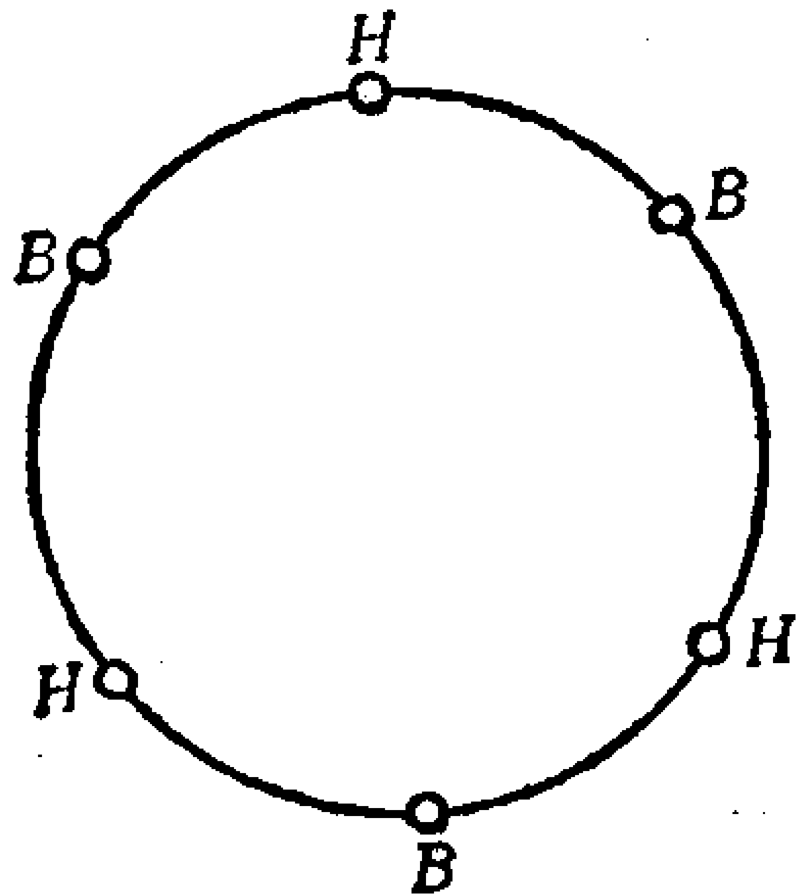


图 2.4

但需注意，当 p 不是质数时，并非每一个圆排列都能展开成 p 个不同的线排列。例如，$p=6$ 时有一个圆排列，如图 2.4 所示，它只能展开成两个不同的线排列：

$$HBHBHB \text{ 和 } BHBHBH$$

2.64 一副纸牌共 n 张，分别标记以 1, 2, …, n，证明把这样的两副纸牌排成一圈的不同方法数是

$$\frac{(2n-1)!}{2^n} + \frac{(n-1)!}{2}$$

证 问题等价于 $S=\{2\cdot 1, 2\cdot 2, \cdots, 2\cdot n\}$ 的圆排列数。

S 的线排列数等于

$$\frac{(2n)!}{2^n}$$

除了 S 的所有相同的元素都相邻的 $n!$ 排列之外，每 $2n$ 个线排

列将对应于一个圆排列，而 S 的所有相同元素都相邻的圆排列数是$(n-1)!$，于是可得方法数为

$$\frac{(2n)!-n!\cdot 2^n}{2^n\cdot(2n)}+(n-1)!=\frac{(2n-1)!}{2^n}+\frac{(n-1)!}{2}$$

命题得证。

2.65 再做题1.27——计算没有三条对角线交于一点的凸 n 边形各边各对角线所组成的互不重迭的区域个数。

解 （参阅图1.26）设想我们逐条"揭起"（取消）对角线。显然，每揭起一条对角线都将减小若干区域，而减少的区域数恰好等于这条对角线与其它对角线相交的交点数目加1，即等于这条对角线被其它对角线所截得的线段的数目。另外，当所有对角线揭完时，图形上还余留一个面。因此，设N_i是第 i 次揭起的对角线上的交点数目，我们有

$$\begin{aligned}\text{区域总数}&=(N_1+1)+(N_2+1)+\cdots+(N_k+1)+1\\&=[\text{内部交点数}]+[\text{对角线条数}]+1\\&=C(n,\ 4)+[C(n,\ 2)-n]+1\\&=C(n,\ 4)+C(n-1,\ 2)\end{aligned}$$

式中的 k 是对角线条数，N_k 是最后一条对角线的交点数。

评注 本题介绍的这一方法是十分巧妙的。当然，我们也可以从逐步添加对角线的角度来进行组合分析。从这里读者会进一步领略到组合分析方法的丰彩。

2.66 用算法2.1生成{1, 2, 3}的所有排列。

解 经过两次递归调用算法2.1，此时

$n=1$，算法写下{1}的唯一排列

$$1$$

完成第二次递归调用后，回到第一次递归调用，此时

$n=2$，算法把1复写2次，再把2交替写在1的右左两边

成为

1 2

2 1

这就完成了第一次递归调用，回到原始调用，此时

$n=3$，算法把{1, 2}的所有排列各复写3次，再把3先从右向左，再从左向右逐个插入{1, 2}的排列中，如下所示

1 2 3

1 3 2

3 1 2

3 2 1

2 3 1

2 1 3

这样便得到{1, 2, 3}的全排列，完成了本题。

若要生成{1, 2, 3, 4}的所有排列，只要在{1, 2, 3}的排列的基础上把4交替地插入，结果如下：

1 2 3 4

1 2 4 3

1 4 2 3

4 1 2 3

4 1 3 2

1 4 3 2

1 3 4 2

1 3 2 4

3 1 2 4

3 1 4 2

3 4 1 2

4 3 1 2

4 3　2　1

　3 4 2　1

　3　2 4 1

　3　2　1 4

....

评注　可以观察出：1. 用算法 2.1 生成的排列是奇偶相间的。2. n 对$\{1, 2, \cdots, n-1\}$的偶排列是自右至左逐个插入，对$\{1, 2, \cdots, n-1\}$的奇排列是自左至右逐个插入。

2.67　用数学归纳法证明：

(a) 算法 2.1 是正确的，即恰好生成$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $n!$ 个不同排列。

(b) 所生成的每个排列，除第一个外，都是由前一个排列互换某两个相邻数而得到。

(c) 生成的第一个排列是 $1\,2\,3\cdots n$，而最后一个排列是 $213\cdots n$。这样把最后一个排列的前两个数 2 和 1 对换便得到第一个排列。

证　(a) 用归纳法证明：

$n=1$ 时，算法显然正确。

设算法能正确生成$\{1, 2, \cdots, n-1\}$的所有排列，现证也能生成$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有排列。

算法 2.1 把 $\{1,2,\cdots, n-1\}$ 的所有排列各复写 n 次，然后把 n 交替地插在原排列的不同位置上。这样得到的排列个数恰是 $n(n-1)!=n!$，而且由于原来$\{1, 2, \cdots, n-1\}$的所有排列全不同，且对原来同一个$\{1, 2, \cdots, n-1\}$的排列，n 所插入的位置也不同，所以 $n!$ 个$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列也全不同。这就证明了算法对任何$\{1, 2, \cdots, n\}$都恰好生成其所有的排列。

(b) $n=1$ 时无疑为真。$n=2$ 时，也显然真。

设对$\{1, 2, \cdots, n-1\}$命题是真，现证对$\{1, 2, \cdots, n\}$时命题也真。

设$i_1i_2\cdots i_n$和$j_1j_2\cdots j_n$是算法2.1所生成的$\{1, 2, \cdots, n\}$的两个相邻排列，那末

(1) 若n不同时出现在两端——第1位或最后一位，则这两个排列是由$\{1, 2, \cdots, n-1\}$的同一排列，把n插在相邻的间隔所得，显然$j_1j_2\cdots j_n$是把排列$i_1i_2\cdots i_n$中的n和与n左(或右)邻接的数交换而得。

(2) 若n同时出现在一端，比如说，$i_n=j_n=n$，那末由归纳假设得$j_1j_2\cdots j_{n-1}$是由$i_1i_2\cdots i_{n-1}$交换某两个相邻数而得，因而$j_1j_2\cdots j_n$是由$i_1i_2\cdots i_n$交换某两个相邻数而得。若是$j_1=i_1=n$，证法类似。

这样就证明了命题(b)。

(c) 证明第一个排列是$12\cdots n$，只需对n作简单归纳即可，因为算法2.1总是把n最先插入原来第一个排列之后。

现证最后一个排列是$213\cdots n(n\geqslant2)$，仍用归纳法。

$n=2$，显然成立。

设$\{1, 2, \cdots, n-1\}$的最后一个排列是$213\cdots n-1$。$n\geqslant3$时，$\{1, 2, \cdots, n-1\}$共有$(n-1)!$(偶数)个排列，对每个排列，n的插入是自右至左，和自左至右交替地进行。对第一个排列，n是自左至右，因此，对排列$213\cdots n-1$是自左至右插入，所以最后一个排列是$213\cdots n-1\,n$。证毕。

评注 上题的观察结论，实际上是本题(c)和(b)的推论。因为：1.交换排列中一对相邻数，其倒置个数必相应地增(或减)1，这意味着排列的奇偶性要改变，根据(b)，全体排列可以看作从$12\cdots n$开始，通过交换上一排列的一对相邻数逐步产生，因此所产生的全体排列必然奇偶相间。2.奇偶排列是交替的，n对每一

排列的插入方向也是交替的，而第一个排列 $12\cdots n-1$ 是偶排列，n 自右至左插入。这样，n 对所有偶排列必然都是自右至左插入，对奇排列都是自左至右插入。

2.68 试求用算法2.1所生成的 {1, 2, 3, 4, 5} 的排列 3 1 5 2 4 之前和之后的那个排列。

解 因为排列 3 1 5 2 4 中 $n=5$ 不在首位和末位，那末生成排列的次序有两种可能，如图2.5(*a*)和(*b*)所示。

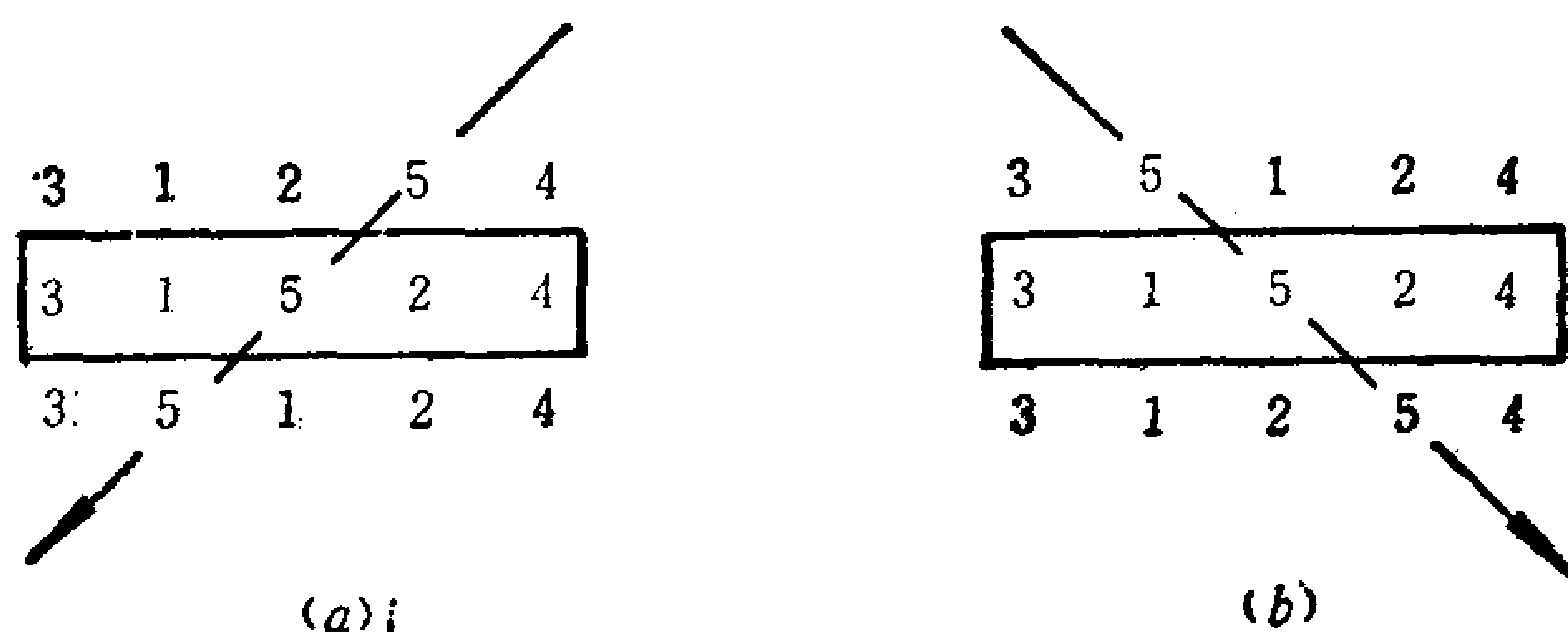


图 2.5 箭头表示 5 的可能走向

但 3 1 2 4 是偶排列，5 插入的次序必然是自右至左，因此图(*a*)是正确的。即 3 1 5 2 4 的前一个排列是 3 1 2 5 4，后一个排列是 3 5 1 2 4。

2.69 试分别确定 {1, 2, …, 8} 的两个排列 35168274 和 83476215 的倒置个数序列。

解 (1) 对排列 35168274。

因为没有大于 3, 5, 6 和 8 的数分别排在 3, 5, 6 和 8 之前，因而 $a_3=0$, $a_5=0$, $a_6=0$, $a_8=0$。排在 1 之前大于 1 的数有两个，即 3, 5，所以 $a_1=2$。排在 2 之前大于 2 的数有 3, 5, 6, 8 共 4 个，所以 $a_2=4$，类似可得 $a_4=4$, $a_7=1$，因此排列 3516827 的倒置个数序列是

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8=24040010$$

同理，排列 83476215 的倒置个数序列是 65113210。

2.70 已知 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的两个排列的倒置个数序列分别是 25502110 和 66142100 求其对应的排列。

解 由算法 2.2，先在纸上画出 8 个空格子

$$_\ _\ _\ _\ _\ _\ _\ _$$

然后从 $j=1$ 起，顺序地把数 j 填入第 a_j+1 个空格上。对序列 25502110 有 $a_1=2$, $a_2=a_3=5$, $a_4=0$, $a_5=2$, $a_6=a_7=1$, $a_8=0$。于是按算法把 1 写入第 $a_1+1=3$ 个空格子上，即成为

$$_\ _\ \underline{1}\ _\ _\ _$$

再把 2 写入第 $a_2+1=6$ 个空格子上，变成

$$_\ _\ \underline{1}\ _\ _\ _\ \overset{2}{_}\ _$$

余类推，最后得

$$\underline{4}\ \ \underline{8}\ \ \underline{1}\ \ \underline{6}\ \ \underline{5}\ \ \underline{7}\ \ \underline{2}\ \ \underline{3}$$

同理，对倒置个数序列 66142100，其对应排列是 73658412。

评注 显然，这一算法是正确的，因为在写 j 时，必须在 j 之前留下 a_j 个空格，以便在这些空格上填写大于 j 的数，严格证明可应用这一理由对 j 作归纳得出。

2.71 $\{1, 2, \cdots, 6\}$的所有排列中，倒置总个数为 15, 14, 13 的排列个数分别是多少？试构造一倒置总个数为 13 的排列。

解 设倒置个数序列为 $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$，由倒置的性质：$0\leqslant b_i\leqslant 6-i$, $i=1, 2, \cdots, 6$。而倒置总个数等于 $b_1+b_2+b_3+b_4$。$+b_5+b_6$。显然，倒置总个数为 15 的排列个数是满足

$$0\leqslant b_i\leqslant 6-i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$$

$$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=15$$

的整数解个数，而这一问题又相当于求 $S=\{5\cdot b_1,\ 4\cdot b_2,\ 3\cdot b_3\ 2\cdot b_4,\ 1\cdot b_5\}$ 的 $r=15$ 的组合数。求有限重复系数的 r 组合的一

般问题须用包含-排斥原理，我们暂时不能解，有待于第四章解决，但本题是特殊情况，我们仍有办法解它。

因为 S 的元素恰有 $1+2+3+4+5=15$ 个，S 的 $r=15$ 组合只有一个。因此，$\{1, 2, \cdots, 6\}$ 的所有排列中只有一个其倒置总个数是 15，这个排列就是 654321。

求 S 的 $r=14$ 的组合数，相当于求 S 的 $r'=15-14=1$ 的组合数。S 的 $r'=1$ 的组合数是 5，因此 $\{1, 2, \cdots, 6\}$ 有 5 个排列其倒置总个数为 14。

类似地，求 S 的 $r=13$ 的组合数，相当于求 S 的 $r'=2$ 的组合数，也相当于求 $S'=\{1\cdot b_5, \infty\cdot b_1, \infty\cdot b_2, \infty\cdot b_3, \infty\cdot b_4\}$ 的 $r'=2$ 的组合数。由题 2.27 的结果，用 $t=1$，$k=5$，$r=2$ 代入，得组合数为

$$\binom{0}{1}\binom{5+2-0-1-1}{2-0}+\binom{1}{1}\binom{5+2-1-1-1}{2-1}=14$$

即有 14 个排列，其倒置总个数为 13。

欲构造一个倒置总个数为 13 的排列，可先构造倒置总个数为 13 的倒置个数序列。我们从 S' 中任取两个元素，比如 b_5, b_4。这相当于从 S 中取出 $5\cdot b_1$，$4\cdot b_2$，$3\cdot b_3$，$1\cdot b_4$ 等 13 个元素，得到倒置个数序列为 543100。引用算法 2.2 得排列为 546321。

2.72 (a) 证明 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列的最大倒置总个数是 $n(n-1)/2$。

(b) 试确定倒置总个数为 $n(n-1)/2$ 的唯一排列。

(c) 试确定倒置总个数为 $n(n-1)/2-1$ 的所有排列。

解 (a) 由定义 2.2，倒置个数 a_j 满足 $0\leqslant a_j\leqslant n-j$，$j=1, 2, \cdots, n$，和倒置总个数 $k=\sum_{j=1}^{n} a_j$。所以，倒置总个数的最大值是每一倒置个数取最大值之和，即

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=n(n-1)/2$$

(b) 具有最大倒置总个数序列显然是$(n-1)(n-2)\cdots210$，它对应的排列是$n(n-1)(n-2)\cdots 3\ 2\ 1$。

(c) 倒置总个数为$\frac{n(n-1)}{2}-1$的所有排列个数显然只有$n-1$个。这是因为倒置总个数仅比最大倒置总个数少1，肯定是某个i其$a_i=(n-i)-1$而其余各倒置个数都达到最大值$n-j$。按照$i=1, 2, \cdots, n-1$的顺序，这$n-1$个排列依次为：

$$n\quad n-1\cdots 3\,1\,2$$
$$n\quad n-1\cdots 2\,3\,1$$
$$n\quad n-1\cdots 3\,4\,2\,1$$
$$\cdots\cdots$$
$$n-1\quad n\cdots 3\,2\,1$$

2.73 试通过由倒置个数序列求其列的排列的方法，构造一个生成$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有排列的算法。

解 倒置个数序列$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$中a_n常为0，所以只需考虑其子序列$a_1a_2\cdots a_{n-1}$。

我们把$a_1a_2\cdots a_{n-1}$看作一个特殊的$n-1$位数，它从左端起，第i位实行$n-i+1$进制，因为$0\leqslant a_i\leqslant n-i$。

现在从

$$0\,0\,0\cdots 0$$

起，不断地在最末位加1，同时各位按自身规定的进制实行进位，直到序列$n-1, n-2, \cdots, 2, 1$止。每加一个1就得出一个倒置个数序列，引用算法2.2，产生相应的一个排列。这样共可构造出$n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$个倒置个数序列，且互不相同。从而也就正确地构造出$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有排列。

2.74 设计一个生成$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有排列的算法，使这些排列按字典序生成。

解　设 $S=\{1, 2, \cdots n\}$，使用树形结构来描述生成 S 的所有排列的算法。步骤如下：

(1) 先构造一个点，称之为树根 r，使 r 与集合 S 对应。

(2) 构造 r 的 $|S|$ 个儿子，并按 S 中各元素的值的大小，由小到大从左至右依次标记 r 到各儿子的边。

(3) 如果 r 到其某个儿子 v 的边标记为 i，则使 v 与集合 $S-\{i\}$ 对应；并用 $S-\{i\}$ 代替 S，用 v 代替 r。

若 S 不空，重复地做(2)(3)步，直至树中没有一个点能产生新的儿子。

(4) 从左到右对树中每片叶结点写下从根到该叶的路径上各边的标记，便得到 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全部排列。

生成 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的树见图 2.6。

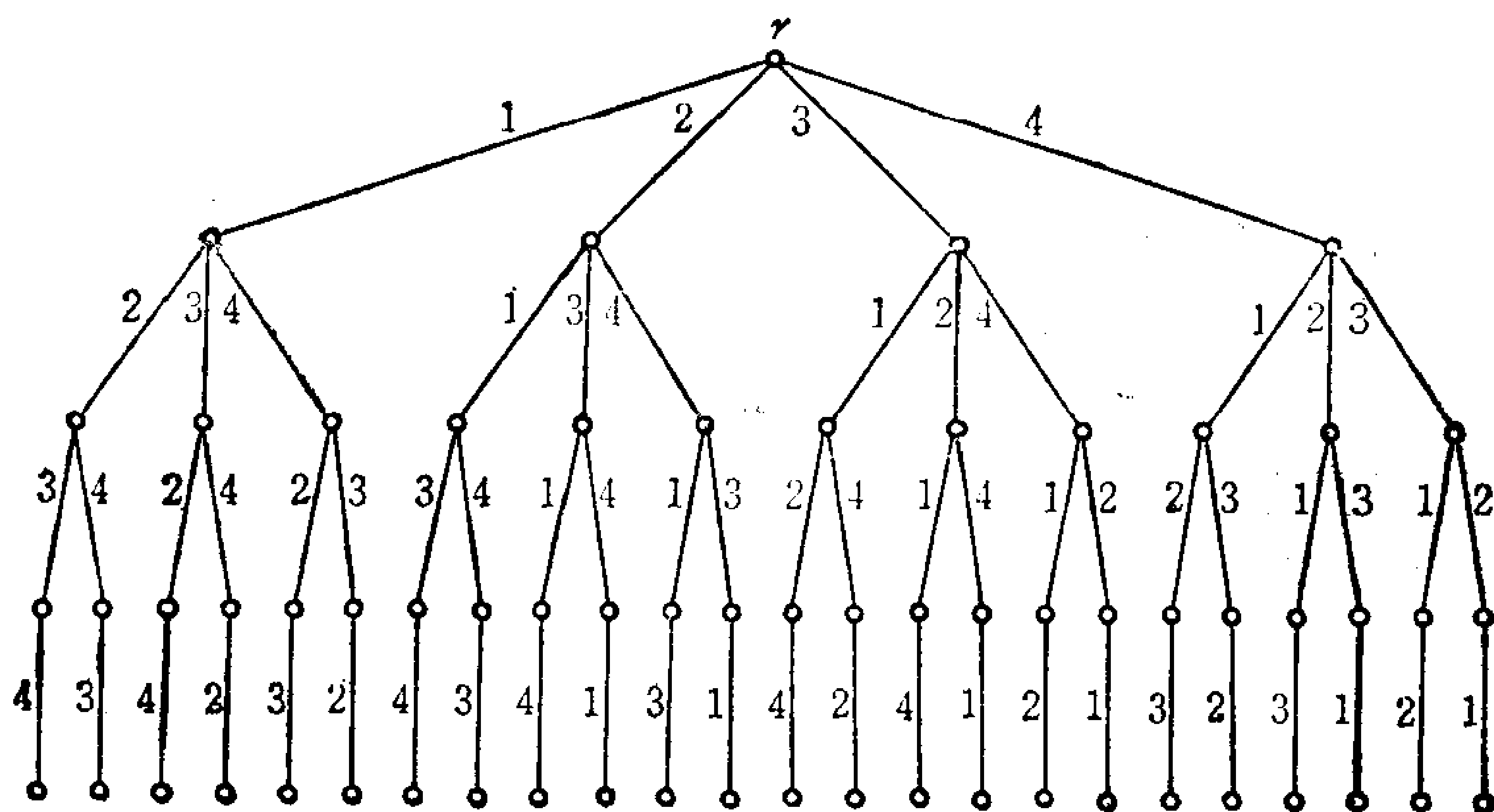


图　2.6

因为从根起第 i 层(规定根为第 0 层)的结点有 $n-i$ 个儿子，故共有 $n!$ 个叶。又根到每片叶的路径编号全不相同，所以算法正确地生成出 S 的所有排列。

2.75 用算法 2.3 生成 {1, 2, 3, 4, 5, 6}的 3 组合。

解 生成的 3 组合依次是:

123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456。

2.76 用算法 2.3 生成的{1, 2, …, 10} 的 $r=6$ 组合中，紧接在组合 2, 3, 4, 6, 9, 10 之后或之前的组合分别是哪一个?

解 为了叙述方便，把算法 2.3 中满足 $a_j<n-r+j$ 条件的数位称作不饱和位，满足 $a_j=n-r+j$ 的数位称作饱和位。本题 $n=10$, $r=6$, 在组合 2, 3, 4, 6, 9, 10 中，因为

$$a_6=10=10-6+6 \quad 已饱和$$

$$a_5=9=10-6+5 \quad 亦已饱和$$

而

$$a_4=6<10-6+4=8 \quad 不饱和$$

即 6 是该组合中从右端起第一个不饱和的数位。根据算法，紧接着的下一个组合便是:

$$2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9$$

求 {1, 2, …, n}的某个 r 组合 $a_1a_2\cdots a_r$ 的前一个组合的方法，实际上是算法 2.3 之逆。具体方法如下:

1) 若给定的组合是 1, 2, …, r, 则它是第一个组合，它的前边不再有其它组合。

2) 否则，

a) 若 $a_r=n$(已饱和)，则寻找最小的饱和数位 a_j, (即 a_{j-1} 不饱和，而 $a_j, a_{j+1}, \cdots, a_r$ 都饱和)。那末，组合 $a_1, a_2, \cdots, a_{j-1}, a_j-1, a_{j+1}, a_{j+2}, \cdots, a_r$ 便是所求之组合。

b) 否则。($a_r<n$, 不饱和)找最长的连续的子序列 $a_j, a_{j+1}, \cdots, a_r$, (即 $a_{j+1}=a_j+1$, $a_{j+2}=a_{j+1}+1$, …, $a_r=a_{r-1}+1$, 但 $a_j\neq a_{j-1}+1$)那末要求的组合便是:

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1},\ a_j-1,\ n-(r-j-1),\ \cdots,\ n-1,\ n$$

即使得处于 a_j 之后的各数位都达到饱和。

上述方法显然正确，因为对所生成的组合 a_1', a_2', $\cdots$, a_r', 用算法 2.3 求其后继组合便得到 a_1, a_2, $\cdots$, a_r。

应用上述方法，即求得紧接于组合 2, 3, 4, 6, 9, 10 之前的组合是 2, 3, 4, 6, 8, 10。

2.77 试确定 $\{1, 2, \cdots, 15\}$ 的 $r=7$ 组合 1, 2, 4, 6, 8, 14, 15 的前一个和后一个组合，前后按字典序而言。

解 算法 2.3 生成的组合是按字典序的，所以可引用题 2.76中所描述的方法。

由于 $a_7=15=n$, $a_6=14=n-1$ 都已饱和，而 $a_5=8<n-2=13$, 未饱和。这样，$a_6=14$ 便是最右的饱和数位。于是原组合的前个组合便是

$$1, 2, 4, 6, 8, 13, 15$$

用算法 2.3 求原组合的下一个组合，便得结果是:

$$1, 2, 4, 6, 9, 10, 11$$

2.78 证明用算法 2.3 以字典序生成$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有 r 组合中，组合 $a_1a_2\cdots a_r$ 处在第 k 个位置上，其中

$$k=C(n, r)-\sum_{j=1}^{r}C(n-a_j, r-j+1)$$

证 只要计算出排在组合 $a_1a_2\cdots a_r$ 之后的组合个数，即可确定 k。

由于算法 2.3 生成的所有组合是按字典序排列的。按字典序的含义，若对所有的 $i<j$, 有 $b_i=a_i$, 但 $b_j>a_j$, 则组合 $b_1b_2\cdots b_{j-1}b_j\cdots b_r$ 应排在 $a_1a_2\cdots a_r$ 之后。让我们考察一下，对固定的 j, 符合这一条件的组合 $b_1b_2\cdots b_{j-1}b_j\cdots b_r$ 有多少个？我们知道在集合$\{1, 2, \cdots, n\}$中，大于 a_j 的数之个数为 $n-a_j$, 而每个组合中的元素是递增排列的，因此，符合上述条件的组合 $b_1b_2\cdots b_{j-1}b_j\cdots b_r$

有 $C(n-a_j, r-j+1)$ 个。让 j 遍历 1, 2, …, r, 即得排在组合 $a_1a_2\cdots a_r$ 之后的组合个数是 $\sum_{j=1}^{r}C(n-a_j, r-j+1)$ 个。而 {1, 2, …, n}的所有 r 组合个数是 $C(n, r)$。于是组合 $a_1a_2\cdots a_r$ 处在第

$$C(n, r)-\sum_{j=1}^{r}C(n-a_j, r-j+1)$$

个位置。证毕。

评注 上述证明是从字典序含义入手的。此外，还可通过归纳法，对 k 作归纳，按算法 2.3 的生成步骤，作出证明，读者可自证之。

2.79 试通过联合算法 2.1 和算法 2.3，构造一个生成 {1, 2, …, n} 的所有 r 排列的算法。并用此算法生成 {1, 2, 3, 4} 的所有 3 排列。

解 具体步骤是:

1) 用算法 2.1 生成 {1, 2, …, r} 的所有排列。这些排列就是{1, 2, …, n}的所有排列的第 1 组，共 $r!$ 个。

2) 用算法 2.3 生成{1, 2, …, n}的所有 r 组合。

3) 对 2)步中生成的每个组合（除了第一个组合 1, 2, …, r 之外）$a_1a_2\cdots a_r$ 作下述代换:

用 a_1 代换第一组中的所有排列中的 1,

用 a_2 代换第一组中的所有排列中的 2,

……

用 a_r 代换第一组中的所有排列中的 r，以得出 {1, 2, …, n}的其余各组排列。

因为{1, 2, …, n}共有$C(n, r)$个 r 组合，每一个组合对应 $r!$ 个排列，共得 $C(n, r)r!=P(n, r)$ 个排列，容易看出，这些排列都是不同的，所以算法是正确的。

生成{1, 2, 3, 4}的所有 $r=3$ 的排列过程如下：

1) 生成{1, 2, 3}的所有排列，即第一组排列：

123, 132, 312, 321, 231, 213

2) 生成{1, 2, 3, 4}的所有 3 组合：

123, 124, 134, 234

3) 对应于组合 124 的排列是：

124, 142, 412, 421, 241, 214

对应于组合 134 的排列是：

134, 143, 413, 431, 341, 314

对应于组合 234 的排列是：

234, 243, 423, 432, 342, 324

这样就得到了{1, 2, 3, 4}的所有 3 排列。

第三章　二项式系数

内容提要

从 n 个不同元素中取 k 个不同元素的组合数为 $C(n,k)$（或 $\binom{n}{k}$, C_n^k。本章为使公式的形式特征更明晰，将采用记号 $\binom{n}{k}$，它有许多引人入胜的性质。由于它还出现于著名的牛顿二项式定理之中，因而又名**二项式系数**。

3-1　二项式系数基本性质

1．基本定义：对任意非负整数 n, k

$$\binom{n}{k}=C(n,\ k)=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

规定 $0!=1$，因此 $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$；规定 $\binom{n}{k}=0$，当 $n<k$。以下除特别说明，i, j, k, l, m, n 均表示非负整数。

2．$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}\quad(k\leqslant n)$。

3．$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\quad(k\geqslant 1)$。

3-2　二项式定理

$$(x+y)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+y^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

3-3 重要的二项式系数恒等式

1. $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$;

2. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$;

3. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$;

4. $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$;

5. $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$;

6. $\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$。

3-4 二项式系数的单峰性

当 n 是偶数时我们有

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{n/2},\quad \binom{n}{n/2}>\binom{n}{n/2+1}>\cdots>\binom{n}{n}$$

当 n 是奇数时我们有

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{\frac{n+1}{2}}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}$$

3-5 多项式定理

$$(x_1+x_2+\cdots+x_l)^n=\sum\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_l}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_l^{n_l}$$

其中求和对方程 $n_1+n_2+\cdots+n_l=n$ 的所有非负整数解 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_l$ 进行。

3-6 牛顿二项式定理

对满足$\left|\dfrac{x}{y}\right|<1$的任意实数 x, y, α

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{\alpha-k}y^{k}$$

其中 $\dbinom{\alpha}{k}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$。

题解及评注

3.1 证明

(a) $3^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}$;

(b) $2^{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}3^{n-k}$;

(c) $l^{n}=\sum\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_l}$。

证 注意到 $3^{n}=(1+2)^{n}$, $2^{n}=(3-1)^{n}$, (a), (b)易证。同理, (c) $l^{n}=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{l\text{个}1})^{n}=\sum\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_l}$。

评注 本题直接套用牛顿二项式定理等，因此叙述简略。限于篇幅，也为了使题解更有启发性，本章将省略某些平凡的等式推演和推理步骤。其它各章的编写也有同样的意向。

3.2 对实数 r 和自然数 k 证明:

(a) $\dbinom{r}{k}=\dfrac{r}{r-k}\dbinom{r-1}{k}$;

(b) $\dbinom{r}{k}=\dfrac{r}{k}\dbinom{r-1}{k-1}$。

证 (a) $\binom{r}{k}=\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$

$$=\frac{r}{r-k}\cdot\frac{(r-1)\cdots(r-k+1)(r-k)}{k!}$$

$$=\frac{r}{r-k}\binom{r-1}{k}$$

(b) $\binom{r}{k}=\frac{r}{k}\cdot\frac{(r-1)\cdots(r-k+1)}{(k-1)!}$

$$=\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$$

3.3 对正整数 n 证明

(a) 对 $n\geqslant 2$ 有

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-4\binom{n}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0$$

(b) $1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

(c) $1-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\frac{1}{4}\binom{n}{3}$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{1}{n+1}$$

(d) $\binom{n}{1}^2+2\binom{n}{2}^2+3\binom{n}{3}^2+\cdots+n\binom{n}{n}^2=n\binom{2n-1}{n-1}$

证

(a) 左边$=n\binom{n-1}{0}-n\binom{n-1}{1}+n\binom{n-1}{2}$

$$-n\binom{n-1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n-1}{n-1}$$ （据上题(b)）

$=n\cdot 0$（据内容提要 3-3 之 3 式）

＝右边

(b) 左边$=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n+1}\binom{n+1}{2}$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n+1}\binom{n+1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n+1}$$

（据上题(b)）

$=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$ （据内容提要 3-3 之 2 式）

＝右边

(c) 证法同(b)，不赘。

(d) 左边$=n\binom{n-1}{0}\binom{n}{1}+n\binom{n-1}{1}\binom{n}{2}$

$$+n\binom{n-1}{2}\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n-1}{n-1}\binom{n}{n}$$

（据上题(b)）

$$=n\left(\binom{n-1}{0}\binom{n}{1}+\binom{n-1}{1}\binom{n}{2}\right.$$

$$\left.+\binom{n-1}{2}\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\binom{n}{n}\right)$$

$=n\binom{2n-1}{n-1}$ （据题 1.26）

＝右边

3.4 对任意自然数 n 和 k 证明：

(a) $\binom{2n}{n}\cdot 2^{-2n}=(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}$

(b) $\binom{n}{k}\binom{n+\frac{1}{2}}{k}=\frac{1}{4^k}\binom{2n+1}{k}\binom{2n+1-k}{k}$

证 (a) 右边 $=(-1)^n\dfrac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{(1+2)(1+4)\cdots(1+2n-2)}{n!}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{(2n)!}{n!\cdot2\cdot4\cdots(2n)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$=2^{-2n}\binom{2n}{n}=\text{左边}$$

(b)

$$\text{左边}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n-2k+3)}{k!}\cdot2^{-k}$$

$=(n!/k!(n-k)!))\cdot((2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots$
$(2n-2k+3)(2n-2k+2)/k!(2n)(2n-2)\cdots$
$(2n-2k+2)))\cdot2^{-k}$

$=(n(n-1)\cdots(n-k+1)/k!)\cdot((2n+1)(2n)(2n-1)$
$(2n-2)\cdots(2n-2k+3)(2n-2k+2)/(k!n(n+1)$
$\cdots(n-k+1))\cdot2^{-2k}$

$$=(((2n+1)(2n)(2n-1)\cdots(2n+1-k+1)(2n+1-k)\cdots$$
$$(2n+1-2k+1)/k!k!)2^{-2k}$$
$$=\binom{2n+1}{k}\cdot\binom{2n+1-k}{k}\cdot 2^{-2k}$$
=右边

评注 题3.1～3.4主要是利用二项式系数的性质进行推演，而关于二项式系数恒等式的证明还有许多方法，下面两题用的是：微分方法和利用二项式定理的方法。

3.5 证明 $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$。

证 据二项式定理，有

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

对等式两边取 x 的微商得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1} \tag{1}$$

等式(1)两边乘以 x 得：

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k \tag{2}$$

再对(2)式两边取 x 的微商得

$$n((1+x)^{n-1}+(n-1)x(1+x)^{n-2})=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1} \tag{3}$$

在(3)式中令 $x=1$，那么

$$n(2^{n-1}+(n-1)2^{n-2})=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k} \tag{4}$$

将(4)式略加整理便得到欲证的等式。

评注 若在(1)式中令 $x=1$，可以得到另一个恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

而在(3)式两边同乘 x 后对 x 求微商，并令 $x=1$，我们便可得到计算 $\sum_{k=0}^{n} k^3\binom{n}{k}$ 的公式。

3.6 证明

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}$$

证 我们知道

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$$

利用二项式定理展开等式两边，则得

$$\left(\binom{m}{0}+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\cdots+\binom{m}{r}x^r+\cdots+\binom{m}{m}x^m\right)$$

$$\cdot\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{r}x^r+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right)$$

$$=\binom{m+n}{0}+\binom{m+n}{1}x+\cdots+\binom{m+n}{r}x^r$$

$$+\cdots+\binom{m+n}{m+n}x^{m+n}$$

展开左边并比较等式两边 x^r 的系数即可得：

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

评注 在题1.26中曾给出过本题的另一证法，读者不妨作一比较。值得一提的是，本题有一个十分清楚的组合直观：从 m 个甲类物品和 n 个乙类物品中取 r 个的组合数，等于从甲类中取0个并从乙类中取 r 个，或从甲类中取1个并从乙类中取 $r-1$ 个，……或从甲类中取 r 个但从乙类中取0个的组合数的总和。由此表明，组合直观也可用以证明组合恒等式，下题是又一例子。当然，这种解法未必更好。

3.7 证明 $\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$。

证 展开等式两边进行证明是不困难的。以下利用组合直观进行证明。

从 r 个元素中取 k 个元素的组合数是 $\binom{r}{k}$。分两阶段做这件事：先从 r 个元素中取 m 个元素，再从 m 个元素中取 k 个元素，共有取法 $\binom{r}{m}\binom{m}{k}$ 种。但是，这样做会使 k 个元素的同一种选取被重复计算，例如$\{a, b, c\}$可以取自$\{a, b, c, d\}$，也可取自$\{a, b, c, e\}$，而这两者同是集合$\{a, b, c, d, e, f\}$的子集。我们注意到，含有相同的 k 个元素的 m 个元素的子集共有 $\binom{r-k}{m-k}$ 个(因为取定 k 个元素后，从 r 个元素中取 m 个元素的取法，等于从 $r-k$ 个元素中取 $m-k$ 个元素的取法)，因此

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}\Big/\binom{r-k}{m-k}=\binom{r}{k}$$

即
$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

3.8 假定 $\frac{1}{z+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$ $(|z|<1)$。求证：当 $|z|<1$ 时有 $\frac{1}{(z+1)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k$。

证 对 n 归纳证明本命题。

$n=1$ 时命题由题设确认。

设 $n=m$ 时命题成立，即

$$\frac{1}{(z+1)^m}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m+k-1}{k}z^k$$

当 $n=m+1$ 时，

$$\frac{1}{(z+1)^{m+1}}=\frac{1}{1+z}\cdot\frac{1}{(1+z)^m}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m+k-1}{k}z^k$$

考虑等式右边 z^i 的系数，它应当是

$$(-1)^i\left(\binom{m+i-1}{i}+\binom{m+i-2}{i-1}+\binom{m+i-3}{i-2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\binom{m-1}{0}\right)$$

$$=(-1)^i\left(\binom{m+i-1}{i}+\binom{m+i-2}{i-1}-\binom{m+i-1}{i-1}\right.$$

$$\left.+\binom{m+i-1}{i-1}+\binom{m+i-3}{i-2}+\cdots+\binom{m-1}{0}\right)$$

$$=(-1)^i\left(\binom{m+i}{i}-\binom{m+i-1}{i-1}-\binom{m+i-2}{i-1}\right.$$

$$\left.-\binom{m+i-3}{i-2}-\cdots-\binom{m-1}{0}\right)$$

$$=(-1)^i\left(\binom{m+i}{i}-\binom{m+i-2}{i-2}-\binom{m+i-3}{i-2}\right.$$

$$\left.-\cdots-\binom{m-1}{0}\right)$$

....

$$=(-1)^i\binom{m+i}{i}$$

因此 $$\frac{1}{(1+z)^{m+1}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{m+1+i-1}{i}z^i$$

由归纳法命题得证。

评注 题3.1～3.8都是组合恒等式的证明，但采用的方法却差别很大，这里我们作一小结。组合恒等式的证明方法中常见的有：

1．利用不同角度对同一问题考虑计数的方法（即殊途同归的方法）建立组合恒等式。

2．利用二项式系数的定义及性质展开左右两边，通过计算证明恒等式。

3．利用牛顿二项式定理及多项式相等条件，通过系数比较建立恒等式。

4．利用$(a+x)^n$的各阶导数，通过置x为一常数以建立恒等式。

5．利用组合直观证明组合恒等式。

6．利用数学归纳法。

3.9 证明 $\binom{2n}{n}$ 总是偶数。

证 因为$\binom{2n}{n}=2\binom{2n-1}{n-1}$，所以$\binom{2n}{n}$总是偶数。

3.10 证明：$\dfrac{(n^2!)!}{(n!)^{n+1}}$是一个整数。（参见题2.55，这里给出一个直接的证明。）

证 当$n=1$时，$\dfrac{(n^2!)!}{(n!)^{n+1}}=1$，它显为一整数。

当$n\geqslant 2$时，$(n+1)n!\leqslant n^2!$，因此$(n^2!)!$可以写作

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n!\cdot(n!+1)\cdot\cdots\cdot 2(n!)\cdot(2(n!)+1)$$
$$\cdots\cdot(n+1)n!\cdot\cdots\cdot(n^2)!$$

从而

$$\frac{(n^2!)!}{(n!)^{n+1}}=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n!-1)\cdot 1\cdot(n!+1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot(2(n!)+1)$$

$$\cdots\cdots(n+1)\cdot\cdots\cdot(n^2)!$$

它当然是一个整数。

3.11 证明 当 n 大于 2 时，$(n!)^2>n^n$。

证 对 n 用归纳法证明

$n=3$ 时，

$$(n!)^2=6^2=36>3^3=27$$

设 $n=k$ 时命题成立，即 $(k!)^2>k^k$。当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}
n^n&=(k+1)^{k+1}\\
&=\left(k^k+k^k+\binom{k}{2}k^{k-2}+\cdots+\binom{k}{k}k^0\right)(k+1)\\
&<(\underbrace{k^k+k^k+k^k+\cdots+k^k}_{k+1\text{个}})(k+1)\\
&=k^k(k+1)^2\\
&<(k!)^2(k+1)^2\\
&=((k+1)!)^2=(n!)^2
\end{aligned}$$

命题归纳证得。

3.12 证明 n 大于 3 时 $1!+2!+\cdots+n!$ 永不为完全平方数。

证 $1!+2!+3!+4!=33$，它不是完全平方数。此外，$5!$，$6!$，$7!$，…，个位上都是零（它们都有因子 2 和 5），因此当 $n\geqslant 4$ 时，$1!+2!+3!+\cdots+n!$ 个位上总是 3，它不可能是任何数的平方数。

3.13 对 $n\geqslant 2$ 证明：

(a) $2^n<\binom{2n}{n}<4^n$；

(b) $\binom{2n-1}{n}<4^{n-1}$。

证 (a) 对 n 归纳:

$n=2$ 时，$2^2<6=\binom{2\times2}{2}<4^2$。设 $2^k<\binom{2k}{k}<4^k$成立。

当 $n=k+1$ 时，

$$\binom{2n}{n}=\binom{2k+2}{k+1}=2\binom{2k+1}{k}$$

$$>2\binom{2k}{k}>2\cdot2^k=2^{k+1}=2^n$$

$$\binom{2n}{n}=\binom{2k+2}{k+1}=2\binom{2k+1}{k}=2\cdot\frac{2k+1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

$$<2\cdot2\binom{2k}{k}<4\cdot4^k=4^{k+1}=4^n$$

因此，

$$2^n<\binom{2n}{n}<4^n$$

(b) $4^{n-1}=2^{2n-2}$

$$=\frac{1}{2}\cdot2^{2n-1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\binom{2n-1}{0}+\binom{2n-1}{1}+\cdots+\binom{2n-1}{2n-1}\right)$$

$$=\binom{2n-1}{0}+\binom{2n-1}{1}+\cdots+\binom{2n-1}{n-1}$$

$$>\binom{2n-1}{n-1}$$

$$=\binom{2n-1}{n}$$

3.14 (a) 证明

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$$

(b) 利用(a)证明 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(c) 利用(a)证明

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(d) 利用(a)证明

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

证 (a) 反复引用内容提要3-1之3。有

$$\text{右边}=\binom{n+r+1}{r}$$
$$=\binom{n+r}{r}+\binom{n+r}{r-1}$$
$$=\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r-1}{r-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r-2}{r-2}$$
$$+\cdots+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}$$
$$=\text{左边}$$

(b) 左边 $=1+2+3+\cdots+n$

$$=\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}$$

$$=\binom{n+1}{n-1} \quad (\text{在(a)中令 } n=1,\ r=n-1)$$

$$=\binom{n+1}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

=右边

(c) 左边 $=2\left(\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right)$

$$=2\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}\right)$$

$$=2\left(\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n+1}{n-1}\right)$$

$$=2\binom{n+2}{n-1} \quad (\text{在(a)中令 } n=2,\ r=n-1)$$

$$=2\binom{n+2}{3}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)n}{3}$$

=右边

(d) 证法同(c)，不赘，读者可自行练习。

3.15 利用上题结论证明：

(a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

证　(a) 由于 $n^2=n(n-1)+n=2\binom{n}{2}+\binom{n}{1}$, 因而

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=2\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{2}\right)+(1+2+\cdots+n)$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(b) 由于 $n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$

$$=6\binom{n}{3}+6\binom{n}{2}+\binom{n}{1}$$

因而

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

$$=6\left(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\cdots+\binom{n}{3}\right)+6\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{2}\right)+(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4}+3\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

***3.16**　证明　对每一自然数 n, 都有唯一的整数集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$, 使得

$$n=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+a_3\cdot 3!+\cdots$$

其中 $a_i\leqslant i$(对每一 $i\geqslant 1$)。

证　首先注意以下事实: 对任一正整数 k,

$$1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+k\cdot k!+1=(k+1)!$$

这是因为在左边有

$$1!+1=2!$$
$$2!+2\cdot 2!=3!$$
$$3!+3\cdot 3!=4!$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

从而左边的和为$(k+1)!$。

另外，由上述事实直接可知：

$$(k+1)!>1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k! \qquad (1)$$

现对n归纳证明本命题：

$n=0$时，可取$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}=\{0, 0, 0, \cdots\}$。选取的唯一性是明显的，因为$a_1, a_2, a_3, \cdots$中若有非零的$a_i$，可设$i$为最大的这样的足码，据(1)式

$$|a_i\cdot i!|>1!+2\cdot 2!+\cdots+(i-1)\cdot(i-1)!$$
$$\geqslant|a_1\cdot 1!|+|a_2\cdot 2!|+\cdots+|a_{i-1}\cdot(i-1)!|$$

从而 $$a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\cdots+a_{i-1}\cdot(i-1)!+a_i\cdot i!\neq 0$$

现设$n=m$时命题成立，即有唯一的

$$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, 0, 0, 0, \cdots\}$$

使得 $$m=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\cdots+a_k\cdot k!$$

若$a_1=1, a_2=2, a_3=3, \cdots, a_k=k$，那么

$$m+1=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+k\cdot k!+1=(k+1)!$$

此时，可取$\{0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots\}$(其中$a_{k+1}=1$)表示$n=m+1$。

若$a_1, a_2, \cdots, a_k$中至少有一个i使$a_i<i$，设i_0是最小的这样的数。那么

$$m+1=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+(i_0-1)(i_0-1)!+a_{i_0}\cdot i_0!$$
$$+\cdots+a_k\cdot k!+1$$
$$=i_0!+a_{i_0}\cdot i_0!+\cdots+a_k\cdot k!$$
$$=(a_{i_0}+1)i_0!+\cdots+a_k\cdot k!$$

由于$a_{i_0}<i_0$，故$a_{i_0}+1\leqslant i_0$。此时，可取

$$\{0,\ \cdots,\ 0,\ a_{i_0}+1,\ a_{i_0+1},\ \cdots,\ a_k,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\}$$

表示$n=m+1$。

上述归纳过程证明了，任何自然数n均可表示成

$$n=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+a_3\cdot 3!+\cdots$$

现证这种表示是唯一的。如若不然，设n还可如下表示：

$$n=b_1\cdot 1!+b_2\cdot 2!+b_3\cdot 3!+\cdots$$

那么

$$0=(a_1-b_1)\cdot 1!+(a_2-b_2)\cdot 2!+(a_3-b_3)\cdot 3!+\cdots$$

据归纳基础部分的讨论，零的表示是唯一的，即$a_1-b_1=0$, $a_2-b_2=0$, $a_3-b_3=0$, $\cdots$，因此

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3,\ \cdots$$

这就是说，任何自然数n的上述表示形式是唯一的。

3.17 定义$\left\langle {n \atop r} \right\rangle=\binom{n+r-1}{r}$，证明

(a) $\left\langle {n \atop r} \right\rangle=\left\langle {n \atop r-1} \right\rangle+\left\langle {n-1 \atop r} \right\rangle$;

(b) $\left\langle {n \atop r} \right\rangle=\dfrac{n}{r}\left\langle {n+1 \atop r-1} \right\rangle=\dfrac{n+r-1}{r}\left\langle {n \atop r-1} \right\rangle$;

(c) $\left\langle {n+1 \atop r} \right\rangle=\left\langle {n \atop 0} \right\rangle+\left\langle {n \atop 1} \right\rangle+\cdots+\left\langle {n \atop r} \right\rangle$;

(d) 证明 Pascal 三角形(杨辉三角形)的对角线恰好给出数$\left\langle {n \atop r} \right\rangle$，如图 3.1 所示。

证 (a) 右边$=\binom{n+r-2}{r-1}+\binom{n+r-2}{r}$

$$=\binom{n+r-1}{r}=\left\langle {n \atop r} \right\rangle=\text{左边}$$

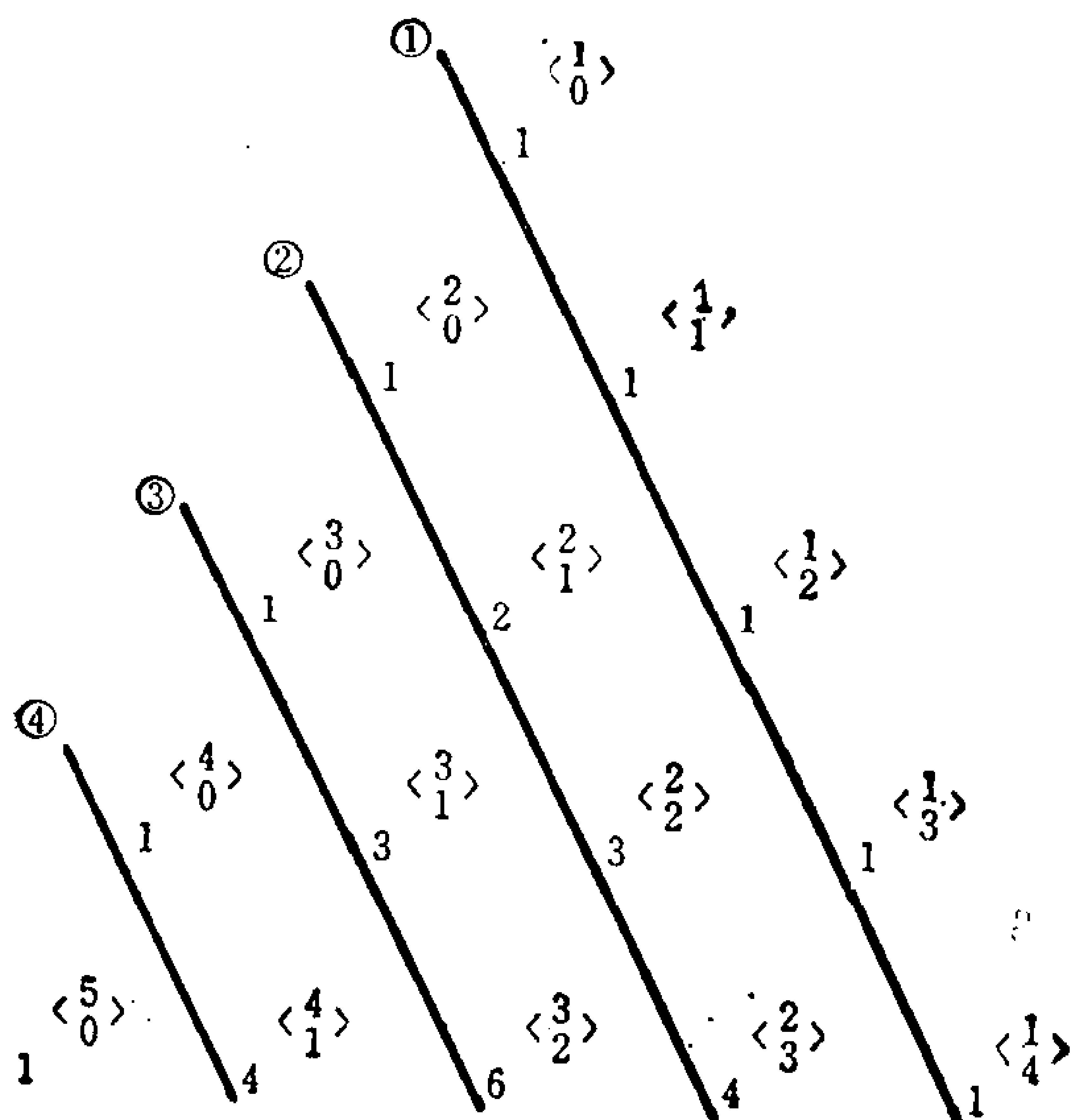


图 3.1

(b) $\frac{n}{r}\left\langle \begin{matrix} n+1 \\ r-1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{n}{r}\binom{n+r-1}{r-1}$

$$= \binom{n+r-1}{r}$$

$$= \left\langle \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\rangle$$

$$\frac{n+r-1}{r}\left\langle \begin{matrix} n \\ r-1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{n+r-1}{r}\binom{n+r-2}{r-1}$$

$$= \binom{n+r-1}{r}$$

$$= \left\langle \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\rangle$$

(c) 右边$=\binom{n-1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n+1}{2}+\cdots+\binom{n+r-1}{r}$

$$=\binom{n+r}{r}\quad(\text{据题 } 3.14(\text{a}))$$

$$=\left\langle\begin{matrix}n+1\\r\end{matrix}\right\rangle$$

$=$左边

(d) 须证结论：第 n 条对角线上第 $r+1$ 个元素是$\left\langle\begin{matrix}n\\r\end{matrix}\right\rangle$。对 n 归纳证明之。

$n=1$ 时，第一条对角线上第 $r+1$ 个元素是 1，而

$$\left\langle\begin{matrix}1\\r\end{matrix}\right\rangle=\binom{1+r-1}{r}=1$$

结论成立。

设 $n\leqslant k$ 时结论成立。当 $n=k+1$ 时，再对 r 归纳：

$r=0$ 时，由于每条对角线上第一个元素均为 1，而

$$\left\langle\begin{matrix}k+1\\0\end{matrix}\right\rangle=\binom{k+1-1}{0}=1$$

故 $k+1$ 条对角线上的第一个元素是$\left\langle\begin{matrix}k+1\\0\end{matrix}\right\rangle$。

设 $r\leqslant i$ 时结论成立。当 $r=i+1$ 时，考虑第 $k+1$ 条对角线上的第 $i+2$ 个元素 x，它的肩上两个元素分别是第 k 条对角线上的第 $i+2$ 个元素和第 $k+1$ 条对角线上的第 $i+1$ 个元素。据归纳假设，这两个元素分别是$\left\langle\begin{matrix}k\\i+1\end{matrix}\right\rangle$，$\left\langle\begin{matrix}k+1\\i\end{matrix}\right\rangle$。又据 Pascal 三角形的性质，$x=\left\langle\begin{matrix}k\\i+1\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}k+1\\i\end{matrix}\right\rangle$。由本题(a)可知

$x=\left\langle \begin{matrix} k+1 \\ i+1 \end{matrix} \right\rangle$。这就是说：第 $k+1$ 条对角线上第 $i+2$ 个元素正是 $\left\langle \begin{matrix} k+1 \\ i+1 \end{matrix} \right\rangle$，即 $r=i+1$ 时命题也成立。至此对 r 的归纳完成。

对 n 的归纳完成了本命题的证明。

评注 本题使用的两层嵌套的归纳方法也是常见的归纳证明方法，读者宜细细玩味，努力掌握。

3.18 证明：

$$\binom{n+r-1}{r}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+k-1}{k}\binom{n-m+r-k-1}{r-k}$$

这里 $m\leqslant n$。

证 我们知道 $\binom{n+r-1}{r}$ 表示从 n 个元素中选取 r 个元素，允许元素重复选取的 r 组合的个数。由于上述过程等价于从 n 个元素中的 m 个元素里选取 k 个 $(k=0, 1, 2, \cdots, r)$，又从 $n-m$ 个剩余元素中选取 $r-k$。因此，根据乘法原则和加法原则可知

$$\begin{aligned}\binom{n+r-1}{r}&=\binom{n-m+r-1}{r}\binom{m-1}{0}\\&\quad+\binom{n-m+r-2}{r-1}\binom{m}{1}\\&\quad+\cdots+\binom{n-m+r-m-1}{r-m}\binom{m+m-1}{m}\\&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+k-1}{k}\binom{n-m+r-k-1}{r-k}\end{aligned}$$

3.19 利用从 m 个元素中选取 n 个元素的重复组合数公

式$\binom{m+n-1}{n}$，证明组合恒等式

$$\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{n}{n}$$
$$=\binom{m+n}{n}$$

证 当 $n=0$ 时等式显然成立。

当 $n\neq 0$ 时，考虑从 $m+1$ 个元素中选取 n 个元素的重复组合问题。设计选取过程如下：先从 $m+1$ 个元素中选取 k 个不同元素，然后再从这 k 个元素中选取 $n-k$ 个元素，允许元素重复。当 k 遍历 1, 2, …, n 时，我们便可得到一切取自 $m+1$ 个元素的 n 组合(元素可重复出现)。因此

$$\binom{m+n}{n}=\binom{m+1+n-1}{n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{m+1}{k}\binom{n-k+k-1}{n-k}$$
$$=\binom{m+1}{1}\binom{n-1}{0}+\binom{m+1}{2}\binom{n-1}{1}$$
$$+\cdots+\binom{m+1}{n-1}\binom{n-1}{n-2}+\binom{m+1}{n}\binom{n-1}{n-1}$$

另外，我们有

$$\binom{m}{k}\binom{n}{k}-\binom{m+1}{k}\binom{n-1}{k-1}$$
$$=\binom{m}{k}\binom{n-1}{k}+\binom{m}{k}\binom{n-1}{k-1}-\binom{m}{k}\binom{n-1}{k-1}$$
$$-\binom{m}{k-1}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=\binom{m}{k}\binom{n-1}{k}-\binom{m}{k-1}\binom{n-1}{k-1} \tag{1}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{m+1}{k}\binom{n-1}{n-k}$$

$$=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\left(\binom{m}{1}\binom{n}{1}-\binom{m+1}{1}\binom{n-1}{0}\right)$$

$$+\left(\binom{m}{2}\binom{n}{2}-\binom{m+1}{2}\binom{n-1}{1}\right)$$

$$+\cdots+\left(\binom{m}{n}\binom{n}{n}-\binom{m+1}{n}\binom{n-1}{n-1}\right)$$

$$=\underline{\binom{m}{0}\binom{n}{0}}+\underline{\underline{\binom{m}{1}\binom{n-1}{1}}}-\underline{\binom{m}{0}\binom{n-1}{0}}$$

$$+\underline{\underline{\binom{m}{2}\binom{n-1}{2}}}-\underline{\underline{\binom{m}{1}\binom{n-1}{1}}}+\binom{m}{3}\binom{n-1}{3}$$

$$-\underline{\underline{\binom{m}{2}\binom{n-1}{2}}}+\cdots+\underline{\binom{m}{n-1}\binom{n-1}{n-1}}$$

$$-\binom{m}{n-2}\binom{n-1}{n-2}+\binom{m}{n}\binom{n-1}{n}-\underline{\binom{m}{n-1}\binom{n-1}{n-1}}$$

(据(1)式)

$$=0\quad\left(\text{各项互相抵消, 而}\binom{m}{n}\binom{n-1}{n}=0\right)$$

这就是说,

$$\binom{m+n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\binom{m+1}{k}\binom{n-1}{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{k}$$

评注 本题曾在题 2.23 中出现过，那里所使用的解法不同。

本题与上题又是恒等式的证明，所使用的方法依旧是组合直观。但这两题都涉及到重复组合，因此问题更复杂一些。下面我们还要讨论几个恒等式，它们比前面的那些恒等式要难证一些，但解法上仍是大同小异。

3.20 证明 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}=(-1)^n\binom{m-1}{n}$。

证 对 n 进行归纳证明。

$n=0$ 时等式显然成立。

设 $n=i$ 时等式成立，即

$$\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{m}{k}=(-1)^i\binom{m-1}{i}$$

当 $n=i+1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{i+1}(-1)^k\binom{m}{k}&=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{m}{k}+(-1)^{i+1}\binom{m}{i+1}\\&=(-1)^i\binom{m-1}{i}+(-1)^{i+1}\binom{m}{i+1}\\&=(-1)^{i+1}\left(\binom{m}{i+1}-\binom{m-1}{i}\right)\\&=(-1)^{i+1}\binom{m-1}{i+1}\end{aligned}$$

因此等式 $n=i+1$ 时仍成立。

本命题归纳证得。

***3.21** 证明 $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}$。

证 左边$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}$ $\left(\text{当} k>r \text{时}\binom{r}{k}=0\right)$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\sum_{j=0}^{p+q}\binom{k}{j}\binom{n}{p+q-j}\quad(\text{据题 } 3.6)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{p+q-j}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{k}{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{p+q-j}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\frac{q!}{(q-k)!\,j!\,(k-j)!}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{p+q-j}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\frac{q!}{(q-j)!\,j!}$$

$$\times\frac{(q-j)!}{(q-k)!\,(k-j)!}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{p+q-j}\binom{q}{j}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\binom{q-j}{q-k}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{p+q-j}\binom{q}{j}\binom{p+q-j}{q}\quad(\text{据题 } 3.6)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-p-q+j)!\,(q-j)!\,(p-j)!\,j!}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}n!\,p!\,(n-p)!/(p!\,(n-p)!\,j!\,(p-j)!\,(q-j)!$$

$$\cdot(n-p-q+j)!)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{p}\binom{p}{j}\binom{n-p}{q-j}$$

$$=\binom{n}{p}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{p}{j}\binom{n-p}{q-j}$$

$$=\binom{n}{p}\binom{n}{q}\quad(\text{据题 } 3.6)$$

$=$右边

评注注意本题应用组合数展开并重新配置的技术。

*3.22 计算 $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}z^k$，其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示 $\frac{n}{2}$ 的整数部分。

解 令 $a_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}z^k$，那么

$$
\begin{aligned}
a_n&=1+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\binom{n-1-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}\right)z^k\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-1-k}{k}z^k+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k-1}{k-1}z^k
\end{aligned}
$$

第一和式的界 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 可用 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 代替。这是因为，n 为奇数时 $\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]$，而 n 为偶数时，由于

$$
\binom{n-1-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}z^{\frac{n}{2}}=\binom{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}}z^{\frac{n}{2}}=0
$$

使得 $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-1-k}{k}z^k=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{-1-k}{k}z^k$。于是第一和式即为 a_{n-1}。

类似地，第二和式可表为

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-1-k}{k-1}z^k&=z\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-2-k}{k}z^k\\
&=z\sum^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\binom{n-2-k}{k}z^k\\
&=za_{n-2}
\end{aligned}
$$

综上所述，我们有：

$$a_n=a_{n-1}+za_{n-2},\ a_0=a_1=1$$

我们把这一递推关系的解法留到第五章去讨论。

3.23 证明 $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}=2^n\binom{m}{n}$。

证 考虑 $\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$，展开并计算可得

$$\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}=\binom{n}{k}\binom{m}{n}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{n}\\&=\binom{m}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\&=2^n\binom{m}{n}\end{aligned}$$

3.24 证明 $\sum_{k=0}^{n}\binom{m-k}{n-k}\binom{r+k}{k}=\binom{m+r+1}{n}$。

证 如图 3.2 所示，考虑从 $(0,\ 0)$ 点到 $(m-n+r+1,\ n)$ 点的递增路径条数。首先，我们知道这些路径共

$$\binom{m-n+r+1+n}{n}=\binom{m+r+1}{n}$$

条(参阅题 1.11)。其次，这些路径可以分为 $n+1$ 类，第一类经过图中边 l_0，第二类经过图中边 l_1，……，第 $n+1$ 类经过图中边 l_n。我们计算第 k 类的路径条数 $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。如图，$l_k$ 的两个端点分别是 $(r,\ k)$，$(r+1,\ k)$。这类路径经过 l_k，必先后经过这两个端点，因此这类路径的条数是：从 $(0,\ 0)$ 点到

(r, k)点路径条数乘以从$(r+1, k)$点到$(m-n+r+1, n)$点的路径条数，即

$$\binom{r+k}{k}\binom{m-n+r+1-r-1+n-k}{n-k}=\binom{r+k}{k}\binom{m-k}{n-k}$$

因此我们有

$$\binom{m+r+1}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k}\binom{m-k}{n-k}$$

评注 本题用展开计算的方法未必象上题那样容易如愿，而上题用本题的方法也未必行得通，尽管两题外表很相似。因此，在解题时要注意用不同的方法去尝试，不要"吊死在一棵树上"。这就要求读者对组合等式证明的主要方法要很熟练掌握（参见题3.8 评注）。

以后各题注重二项式系数的其它性质，当然，仍有一些性质与等式有关。

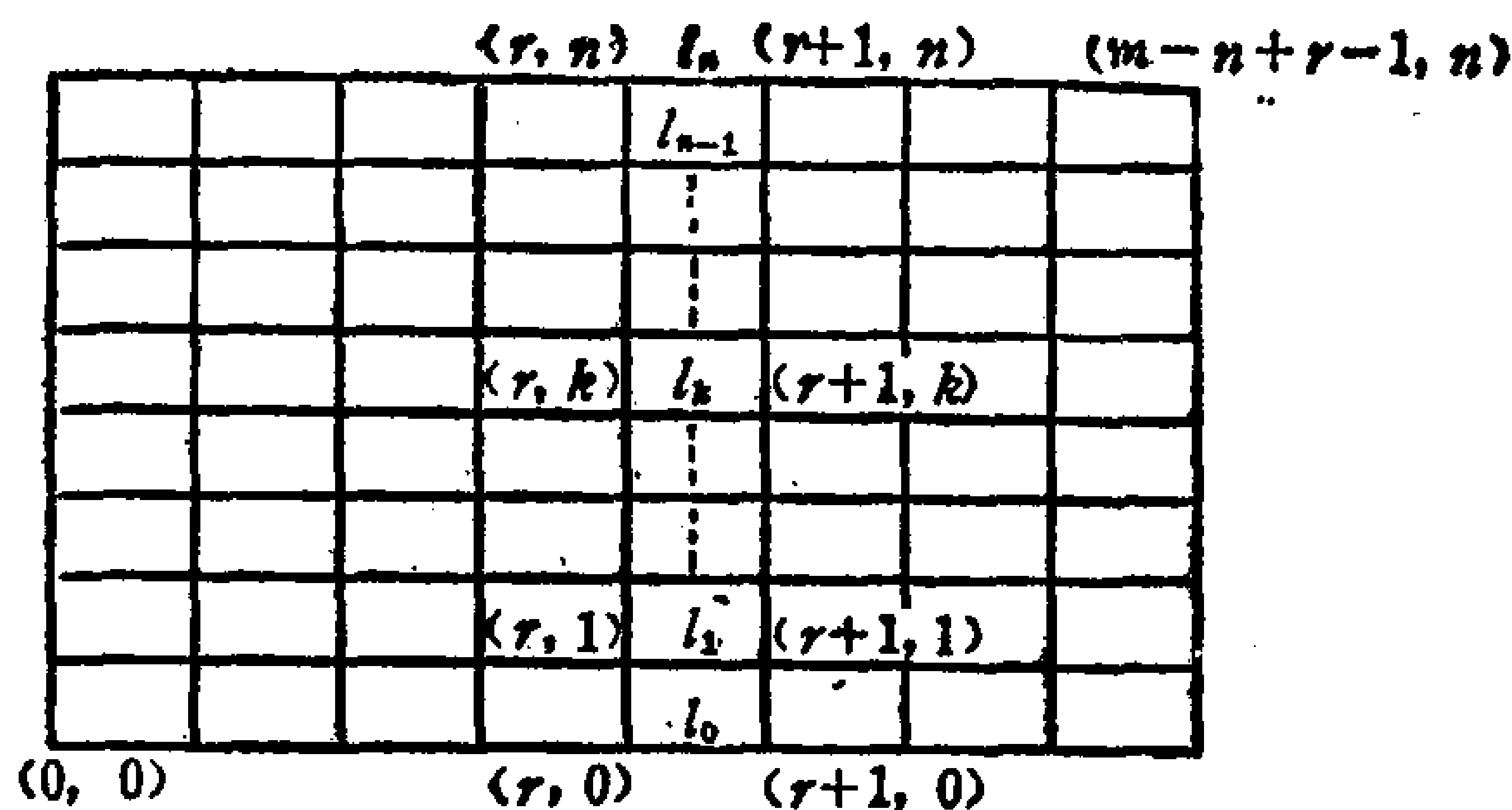


图 3.2

3.25 证明 没有四个连续的二项式系数$\binom{n}{r}$, $\binom{n}{r+1}$, $\binom{n}{r+2}$, $\binom{n}{r+3}$组成等差数列。

证 反设有$\binom{n}{r}$, $\binom{n}{r+1}$, $\binom{n}{r+2}$, $\binom{n}{r+3}$组成等差数列，那么

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+2}=2\binom{n}{r+1}$$

$$\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r+3}=2\binom{n}{r+2}$$

即

$$\begin{cases} 4r^2-4nr+n^2+16r-9n+14=0 \\ 4r^2-4nr+n^2+8r-5n+2=0 \end{cases}$$

解这个方程组得 $r=-2$，这是不可能的。

3.26 第一组卡片 n 张分别标记 1, 2, …, n; 第二组卡片 $r-1$ 张，第一张标记"重复第一个数"，第二张标记"重复第二个数"等等。证明：第一组卡片中选取 r 张卡片的重复组合数，等于两组卡片中选取 r 张卡片的组合数(不允许重复选取同一卡片)。

证 我们用 n_j 表示第一组中的第 j 张卡片，用 m_j 表示第二组中的第 j 张卡片。我们在两种选取

$$n_{j_1},\ n_{j_2},\ \cdots,\ n_{j_r}\quad (\text{设 } n_{j_1}\leqslant n_{j_2}\leqslant\cdots\leqslant n_{j_r})$$

$$n_{l_1},\ n_{l_2},\ \cdots,\ n_{l_i},\ m_{l_{i+1}},\ m_{l_{i+2}},\ \cdots,\ m_{l_r}$$

$$(\text{设 } n_{l_1}<n_{l_2}<\cdots<n_{l_i},\ l_{i+1}<l_{i+2}<\cdots<l_r)$$

之间建立一一对应。

给定第二种选取 $n_{l_1}, n_{l_2}, \cdots, n_{l_i}, m_{l_{i+1}}, m_{l_{i+2}}, \cdots, m_{l_r}$。由于两组卡片共 $n+r-1$ 张，其中只有 $r-1$ 张第二组卡片。因此，这样选取的 r 张卡片中至少有一张卡片是第一组的(即至少有 n_{l_1})。此外，l_{i+1}(m 的最小足码)不超过 i，因为 $l_{i+1}\leqslant(r-1)-(r-i-1)=i$。这就是说，$m_{l_{i+1}}$ 的标记："重复第 l_{i+1} 个数"指示

我们重复的数恰在 $n_{l_1}, n_{l_2}, \cdots, n_{l_i}$ 中。我们可如下唯一地确定第一种选取：以 $m_{l_{i+1}}, \cdots, m_{l_{r-i}}$ 的标记所给出的信息，逐步重复前面第一组卡片的标记和新生成的标记，所得标记序列恰对应一个第一种的选取。例如给定第二种选取 n_1, n_2, m_1, m_2, m_3，可生成标记序列 1, 2, 1, 2, 1，它对应第一种选取 n_1, n_2, n_1, n_2, n_1。而第二种选取 n_1, n_2, m_2, m_3, m_4，可生成标记序列 1, 2, 2, 2, 2，它对应第一种选取 n_1, n_2, n_2, n_2, n_2。对应的一一性是明显的。

反之，对给定的一个第一种选取 $n_{j_1}, n_{j_2}, \cdots, n_{j_r}$，我们将其标记重新排列，先将全部标记中的不同元素以递增序排在第一段，再将剩余元素中的不同元素排在第二段，如此等等。例如，对第一种选取 $n_1, n_1, n_1, n_2, n_3, n_3$，可产生重排的标记序列 (1, 2, 3), (1, 3), (1)。然后改写这个标记序列为一个第二种的选取，改写规则如下：从最后一段起，找出每个元素重复了上一段中的哪个元素，并确定该元素是整个序列的第几个元素（例如第 i 个），然后将此元素改为第二组卡片中的一张(m_i)。第一段中的标记则全部改写为它所对应的第一组的卡片。例如(1, 2, 3), (1, 3), (1)，可依次改写为(1, 2, 3), (1, 3), m_4; (1, 2, 3), m_1, m_3, m_4; $n_1, n_2, n_3, m_1, m_3, m_4$。显然，这样的改写也是一对一的。

综上所述，两种选取是一一对应的，因此两种组合数相等。

*3.27 证明 对任意 n, $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 中值为奇数的项的个数是 2 的幂。

证 如图 3.3，我们将 Pascal 三角形改为由 0, 1 组成，它们分别对应于三角形中的偶数与奇数。

首先我们注意到，$n=2^k-1$ (k 为正整数)时，$\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，$\cdots$，$\binom{n}{n}$ 全为奇数，因而三角形中第 2^k-1 行全为 1。这是因为

$$\binom{2^k-1}{i}=\frac{(2^k-1)(2^k-2)\cdots(2^k-1-i+1)}{i!}$$
$$=((2^k-1)2(2^{k-1}-1)2^k-3)2^2(2^{k-2}-1)(2^k-5)2(2^{k-1}-3)(2^k-7)2^3(2^{k-3}-1)\cdots/(1\cdot2\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot\cdots)$$
$$=(2^k-1)(2^{k-1}-1)(2^k-3)(2^{k-2}-1)(2^k-5)(2^{k-1}-3)(2^k-7)(2^{k-3}-1)/(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots)$$
$$=\text{奇数}$$

(上述计算过程中，将分子分母中的偶数 2^k-2，2^k-4，2^k-6，$\cdots$ 以及 2，4，6，$\cdots$ 同时化为 2^l 与一个奇数相乘的形式。)

							1									$n=0$
						1		1								$n=1$
					1		0		1							$n=2$
				1		1		1		1						$n=3$
			1		0		0		0		1					$n=4$
		1		1		0		0		1		1				$n=5$
	1		0		1		0		1		0		1			$n=6$
1		1		1		1		1		1		1		1		$n=2^3-1$
							·········									·········

图 3.3

现在我们对 $n\leqslant2^k-1$ 中的 k 归纳证明本命题的结论。

当 $k=1$，显然对一切 $n\leqslant2^k-1=1$ 本命题结论真(图 3.3 前两排均为 1，奇数值的项分别是 2^0 个和 2^1 个)。

设 $n\leqslant2^k-1$ 时 $\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，$\cdots$，$\binom{n}{n}$ 中奇数个数是 2 的

幂，即三角形的第 2^k-1 行和其以上各行中 1 的个数均为 2 的幂。欲证 $2^k\leqslant n\leqslant 2^{k+1}-1$ 本命题真，即须证图 3.4 中标出的那些行里，每一行中 1 的个数是 2 的幂。

由于 $n=2^k-1$ 行全部为 1，那么图 3.4 中三角形 T_0' 中全为 0，而三角形 T_1，T_2 的两侧都是 1，因此 T_1，T_2 中 0，1 的分布完全等同于 T_0。据归纳假设，T_0 中各行 1 的个数是 2 的幂，因而 T_1，T_2 中各行也是 2 的幂，例如 2^l。因此，在 $2^k\leqslant n\leqslant 2^{k+1}-1$ 的各行上，1 的个数也是 2 的幂，即 $2\cdot 2^l=2^{l+1}$。

归纳证明确认，对一切正整数 k，Pascal 三角形中 $n\leqslant 2^k-1$ 的各行中 1 的个数是 2 的幂。也就是说，对一切自然数 n，$\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，…，$\binom{n}{n}$ 中值为奇数的项的个数是 2 的幂。

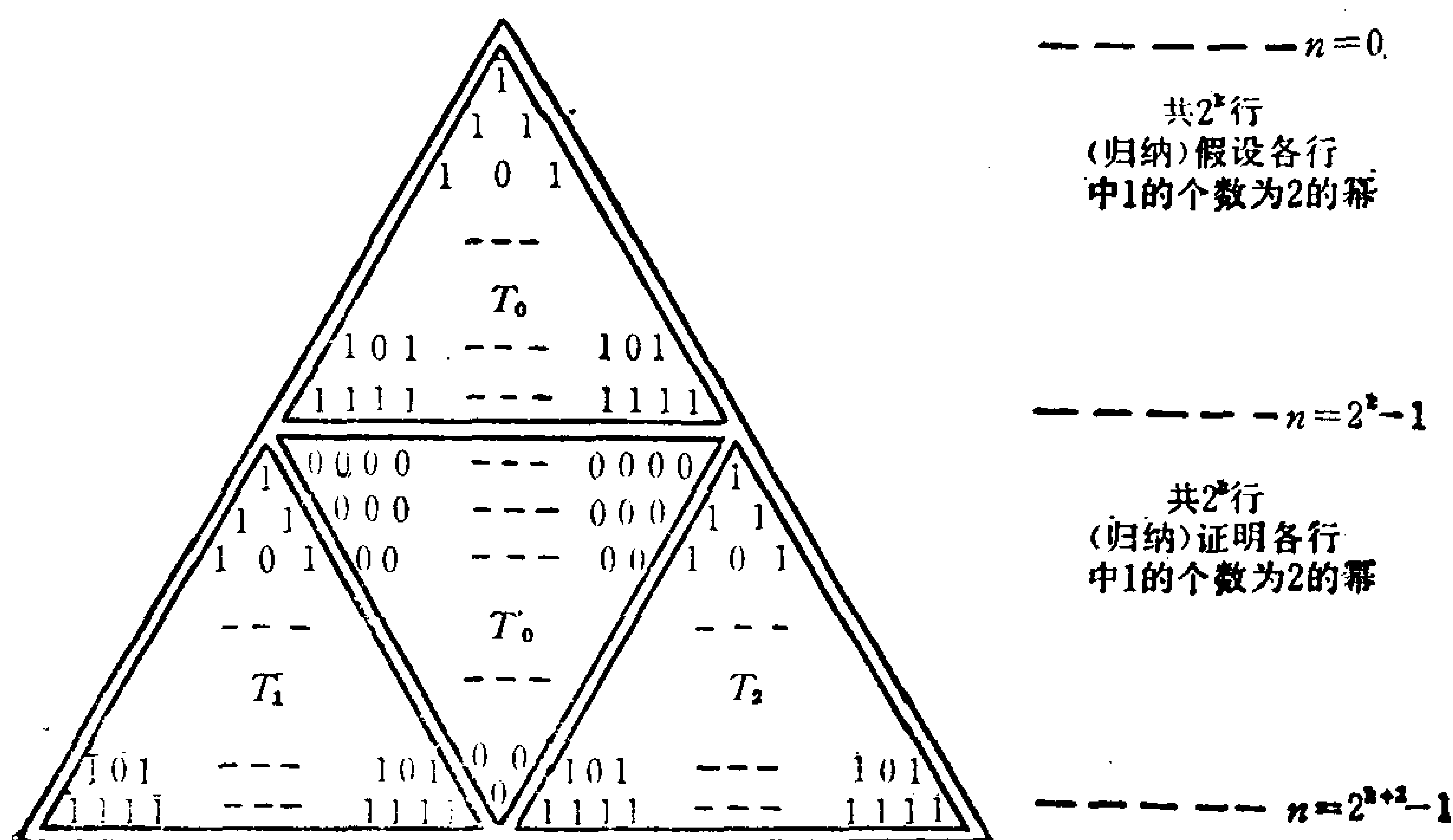


图 3.4

3.28 a 证明 $(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2m+1}$ 是一个整数。

(b) 证明 $(1-\sqrt{3})^{2m+1}$ 是 0 和 -1 之间的一个数，并且 $-(1-\sqrt{3})^{2m+1}$ 是 $(1+\sqrt{3})^{2m+1}$ 的小数部分。

(c) 用(a)(b)证明 $(1+\sqrt{3})^{2m+1}$ 的整数部分含有因子 2^{m+1}。

证 (a) 运用二项式定理展开

$$(1+\sqrt{3})^{2m+1}+(1-\sqrt{3})^{2m+1}$$

所有含 $\sqrt{3}$ 的项全部抵消，而其它各项均为整数，故结论是明显的。

(b) 显然 $-1<1-\sqrt{3}<0$。由于 $2m+1$ 为一奇数，因此 $-1<(1-\sqrt{3})^{2m+1}<0$。又因为

$$(1-\sqrt{3})^{2m+1}+(1+\sqrt{3})^{2m+1}$$

是一整数，有

$$(1+\sqrt{3})^{2m+1}>0$$

故 $-(1-\sqrt{3})^{2m+1}$ 是 $(1+\sqrt{3})^{2m+1}$ 的小数部分。

(c) 据(a)(b)知

$$(1+\sqrt{3})^{2m+1}+(1-\sqrt{3})^{2m+1}$$

是 $(1+\sqrt{3})^{2m+1}$ 的整部，因此，只要证 $(1+\sqrt{3})^{2m+1}+(1-\sqrt{3})^{2m+1}$ 含有因子 2^{m+1}。

对 m 归纳。

$m=0$ 时 $(1+\sqrt{3})^{2m+1}+(1-\sqrt{3})^{2m+1}=2$，它含有因子 $2^1(2^{m+1}=2)$。命题成立。

设 $m=k$ 时命题成立，即 $(1+\sqrt{3})^{2k+1}+(1-\sqrt{3})^{2k+1}$ 含有因子 2^{k+1}。$m=k+1$ 时

$$\begin{aligned}
&(1+\sqrt{3})^{2m+1}+(1-\sqrt{3})^{2m+1}\\
&=(4+2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{2k+1}+(4-2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^{2k+1}\\
&=2((1+\sqrt{3})^{2k+1}+(1-\sqrt{3})^{2k+1})+2(1+\sqrt{3})^{2k+2}\\
&\quad+2(1-\sqrt{3})^{2k+2}
\end{aligned}$$

$$=2((1+\sqrt{3})^{2k+1}+(1-\sqrt{3})^{2k+1})+2((4+2\sqrt{3})^{k+1}+(4-2\sqrt{3})^{k+1})$$

$$=2((1+\sqrt{3})^{2k+1}+(1-\sqrt{3})^{2k+1})+2^{k+2}((2+\sqrt{3})^{k+1}+(2-\sqrt{3})^{k+1})$$

据归纳假设 $2((1+\sqrt{3})^{2k+1}+(1-\sqrt{3})^{2k+1})$ 含有因子 2^{k+2}，而 $2^{k+2}((2+\sqrt{3})^{k+1}+(2-\sqrt{3})^{k+1})$ 中含有因子 2^{k+2}（易证

$$(2+\sqrt{3})^{k+1}+(2-\sqrt{3})^{k+1}$$

为一整数），因此 $(1+\sqrt{3})^{2m+1}+(1-\sqrt{3})^{2m+1}$ 在 $m=k+1$ 时也含有因子 $2^{m+1}(2^{k+2})$。

归纳完成，命题得证。

3.29 令 $A=(\sqrt{27}+5)^{2n+1}$，设 F 是 A 的小数部分。证明：$2AF=4^{n+1}$。

证 同题 3.28，我们可证 $(\sqrt{27}-5)^{2n+1}$ 是 $\sqrt{27}+5$ 的小数部分，即 $F=(\sqrt{27}-5)^{2n+1}$。因此

$$\begin{aligned}2AF&=2(\sqrt{27}+5)^{2n+1}(\sqrt{27}-5)^{2n+1}\\&=2(27-25)^{2n+1}\\&=2^{2n+2}\\&=4^{n+1}\end{aligned}$$

3.30 (a) 证明　若 p 是质数，而 k 不是 0 和 p，那么 $\binom{p}{k}$ 是 p 的倍数。

(b) 证明　若 p 是奇质数，那么 $\binom{2p}{p}$ 被 p^2 除余数为 2。

证 (a) 显然 $\binom{p}{k}=\dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k(k-1)\cdots2\cdot1}$ 是整数，又因为 $k<p$ $\left(若 p<k, \binom{p}{k}=0, 命题真\right)$，$k, k-1, \cdots, 2$ 均非 p 的

因子，所以 $\binom{p}{k}$ 是 p 的倍数。

(b) $$\binom{2p}{p}=\binom{p}{0}\binom{p}{0}+\binom{p}{1}\binom{p}{1}+\cdots+\binom{p}{p}\binom{p}{p}$$

由于 p 是质数，据(a)，$\binom{p}{1}$，$\binom{p}{2}$，…，$\binom{p}{p-1}$ 均含有因子 p。而 $\binom{p}{0}\binom{p}{0}+\binom{p}{p}\binom{p}{p}=2$，故 $\binom{2p}{p}$ 被 p^2 除余数为 2。

3.31 令 $a_n=\dfrac{1}{\binom{n}{0}}+\dfrac{1}{\binom{n}{1}}+\cdots+\dfrac{1}{\binom{n}{n}}$，证明

$$a_n=\frac{n+1}{2n}a_{n-1}+1$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$。

证 $$a_n-1=\frac{1}{\binom{n}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{2}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{n}{\binom{n-1}{n-1}}\right)$$

当 n 为偶数时，

$$a_n-1=\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{n+1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{n+1}{\binom{n-1}{\frac{n}{2}}}\right)$$

$$=\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n-1}{\frac{n}{2}}}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2n}\left(\frac{1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2n}\ a_{n-1}$$

当 n 为奇数时，

$$a_n-1=\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{n+1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{n+1}{2\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}}\right)$$

$$=\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{1}{2\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2n}\left(\frac{1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2n}\ a_{n-1}$$

总之，$a_n=\dfrac{n+1}{2n}\ a_{n-1}+1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}+1$。令

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n-1}=x$$

则 $x=\dfrac{1}{2}x+1$，$x=2$。

3.32 (a) 证明

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{\binom{n}{0}}{x}-\frac{\binom{n}{1}}{x+1}+\frac{\binom{n}{2}}{x+2}-\cdots\pm\frac{\binom{n}{n}}{x+n}$$

(b) 在(a)中等式里令 $x=1$，得到一个二项式系数恒等式，试用其它方法证明这一等式。

证 (a) 对 n 归纳证明本命题。

$n=0$ 时，左边$=\dfrac{1}{x}=$右边。

设 $n=k$ 时等式成立。当 $n=k+1$ 时，

$$\text{右边}=\frac{\binom{k+1}{0}}{x}-\frac{\binom{k+1}{1}}{x+1}+\frac{\binom{k+1}{2}}{x+2}-\cdots\pm\frac{\binom{k+1}{k}}{x+k}$$

$$\mp\frac{\binom{k+1}{k+1}}{x+k+1}$$

$$=\frac{\binom{k}{0}}{x}-\frac{\binom{k}{0}}{x+1}-\frac{\binom{k}{1}}{x+1}+\frac{\binom{k}{1}}{x+2}+\frac{\binom{k}{2}}{x+2}$$

$$-\cdots\pm\frac{\binom{k}{k-1}}{x+k}\pm\frac{\binom{k}{k}}{x+k}\mp\frac{\binom{k}{k}}{x+k+1}$$

$$=\frac{k!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}$$

$$-\left(\frac{\binom{k}{0}}{x+1}-\frac{\binom{k}{1}}{x+2}+\cdots\mp\frac{\binom{k}{k-1}}{x+k}\pm\frac{\binom{k}{k}}{x+k+1}\right)$$

（据归纳假设）

$$=\frac{k!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}$$

$$-\frac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)(x+k+1)} \qquad (*)$$

$$=\frac{(x+k+1)k!-x\cdot k!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)(x+k+1)}$$

$=$左边

归纳完成，(a)得证。

(b) 在(a)中等式里令 $x=1$ 便得

$$\frac{1}{n+1}=\binom{n}{0}-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\cdots\pm\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

它的证明见题 3.3(c)。

评注 (*)标记的一步仍由归纳假设得。我们对 n 归纳时，x 看作参数，它是任意的。因此归纳假设对任意 x 成立，对 $x+1$ 也成立。

3.33 定义 $x^{(0)}=1$, $x^{(n)}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$，证明

$$(x+y)^{(n)}=\binom{n}{n}x^{(n)}+\binom{n}{n-1}x^{(n-1)}y^{(1)}+\binom{n}{n-2}x^{(n-2)}y^{(2)}+\cdots+\binom{n}{0}y^{(n)}$$

证 对 n 归纳证明本命题。

$n=0$ 时，$(x+y)^{(0)}=1$, $\binom{0}{0}x^0=1$，等式成立。

设 $n=k$ 时等式成立，并注意到 $x^{(1)}=x$, $y^{(1)}=y$。那么当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=(x+y)^{(k+1)}\\
&=(x+y)^{(k)}(x+y-k)\\
&=\left(\binom{k}{k}x^{(k)}+\binom{k}{k-1}x^{(k-1)}y^{(1)}+\binom{k}{k-2}x^{(k-2)}y^{(2)}+\cdots+\binom{k}{0}y^{(k)}\right)(x+y-k)\\
&=\binom{k}{k}x^{(k)}(x-k)+\binom{k}{k}x^{(k)}y^{(1)}\\
&\quad+\binom{k}{k-1}x^{(k-1)}(x-k+1)y^{(1)}
\end{aligned}$$

$$+\binom{k}{k-1}x^{(k-1)}y^{(1)}(y-1)$$

$$+\binom{k}{k-2}x^{(k-2)}(x-k+2)y^{(2)}$$

$$+\binom{k}{k-2}x^{(k-2)}y^{(2)}(y-2)+\cdots+\binom{k}{0}y^{(k)}x^{(1)}$$

$$+\binom{k}{0}y^{k}(y-k)$$

$$=\binom{k}{k}x^{(k+1)}+\left(\binom{k}{k}x^{(k)}y^{(1)}+\binom{k}{k-1}x^{(k)}y^{(1)}\right)$$

$$+\left(\binom{k}{k-1}x^{(k-1)}y^{(2)}+\binom{k}{k-2}x^{(k-1)}y^{(2)}\right)$$

$$+\cdots+\left(\binom{k}{1}y^{(k)}x^{(1)}+\binom{k}{0}y^{(k)}x^{(1)}\right)+\binom{k}{0}y^{k+1}$$

$$=\binom{k+1}{k+1}x^{(k+1)}+\binom{k+1}{k}x^{(k)}y^{(1)}+\binom{k+1}{k-1}x^{(k-1)}y^{(2)}$$

$$+\cdots+\binom{k+1}{1}y^{(k)}x^{(1)}+\binom{k+1}{0}y^{(k+1)}$$

=右边

归纳完成，本题得证。

3.34 设p是小于m的素数，$\left[\frac{m}{p}\right]$表示商$\frac{m}{p}$的整数部分。

(a) 证明 序列$p, 2p, 3p, \cdots, \left[\frac{m}{p}\right]p$中恰有$\left[\frac{m}{p}\right]$个项可被$p$整除，恰有$\left[\frac{m}{p^2}\right]$个项可被$p^2$整除，恰有$\left[\frac{m}{p^3}\right]$个项可被$p^3$整除，如此等等。

(b) 证明：p 整除 $m!$ 恰为 $\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\cdots$ 次（p 整除 m k 次指 p^k 整除 m，但 p^{k+1} 则不然）。

证 (a) 首先我们证明

$$\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p}\right]=\left[\frac{m}{p^2}\right]$$

设 $\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p}\right]=k$，那么 $\left[\frac{m}{p}\right]=kp+r\ (r<p)$。另外，$m=\left[\frac{m}{p}\right]p+r'\ (r'<p)$，故 $m=(kp+r)p+r'=kp^2+rp+r'$。由于 $rp+r'<p^2$，因此 $k=\left[\frac{m}{p^2}\right]$，即 $\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p}\right]=\left[\frac{m}{p^2}\right]$。同理 $\left[\frac{\left[\frac{m}{p^2}\right]}{p}\right]=\left[\frac{m}{p^3}\right]$。

现设 $m=k_1p+r_1$，$k_1=k_2p+r_2$，$k_2=k_3p+r_3$（$r_1<p$，$r_2<p$，$r_3<p$）。据上述讨论 $k_1=\left[\frac{m}{p}\right]$，$k_2=\left[\frac{k}{p}\right]=\left[\frac{m}{p^2}\right]$，$k_3=\left[\frac{k_2}{p}\right]=\left[\frac{m}{p^3}\right]$。

于是所给序列

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \cdots,\ k_1p \tag{1}$$

可详析为

$$\left.\begin{array}{c} p,\ 2p,\ 3p,\ \cdots,\ \underline{p^2},\ p^2+p,\ \cdots,\ \underline{2p^2},\ 2p^2+p,\ \cdots,\ \underline{k_2p^2}, \\ k_2p^2+p,\ \cdots,\ k_2p^2+r_2p \end{array}\right\} \tag{2}$$

或者

$$\left.\begin{array}{c} p,\ 2p,\ \cdots,\ \underline{p^3},\ p^3+p,\ \cdots,\ \underline{2p^3},\ 2p^3+p,\ \cdots,\ \underline{k_3p^3}, \\ k_3p^3+p,\ \cdots,\ k_3p^3+r_3p^2,\ \cdots,\ k_3p^3+r_3p^2+r_2p \end{array}\right\} \tag{3}$$

显然，序列(1)中有 $k_1=\left[\frac{m}{p}\right]$ 个项可被 p 整除，序列(2)中恰有 $k_2=\left[\frac{m}{p^2}\right]$ 个项可被 p^2 整除，而序列(3)中恰有 $k_3=\left[\frac{m}{p^3}\right]$

个项可被 p^3 整除，如此等等。

(b) 将 $m!$ 展开

$$m!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot p\cdot(p+1)\cdot\cdots\cdot2p\cdot(2p+1)\cdot\cdots$$
$$\cdot\left[\frac{m}{p}\right]p\cdot\left(\left[\frac{m}{p}\right]p+1\right)\cdot\cdots\cdot m$$

其中 $m=\left[\frac{m}{p}\right]p+r\ (r<p)$。由于 p 是质数，这里只有 p, $2p$, $3p$, …, $\left[\frac{m}{p}\right]p$ 能被 p 整除。据(a)，这些因子中能被 p 整除而不能被 p^2 整除的因子是

$$\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{p^2}\right]\text{个}$$

能被 p^2 整除而不能被 p^3 整除的因子是

$$\left[\frac{m}{p^2}\right]-\left[\frac{m}{p^3}\right]\text{个}$$

能被 p^3 整除而不能被 p^4 整除的因子是

$$\left[\frac{m}{p^3}\right]-\left[\frac{m}{p^4}\right]\text{个}$$

如此等等。因而 $m!$ 的质因子分解式中，p 的指数恰为

$$\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{p^2}\right]+2\left(\left[\frac{m}{p^2}\right]-\left[\frac{m}{p^3}\right]\right)+3\left(\left[\frac{m}{p^3}\right]-\left[\frac{m}{p^4}\right]\right)+\cdots$$

即
$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\cdots$$

也就是说，$m!$ 恰能被 p 整除 $\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\cdots$ 次。

评注 上述和式都是有穷和，因为总有正整数 i，使 $\left[\frac{m}{p^i}\right]=0$，详见下题。

3.35 证明 （继续上题）p 整除 $m!$ 恰为

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{p^r}\right]$$

次，其中$r=[\log_p m]$（$[\log_p m]$表示$\log_p m$的整数部分）。

证 因为$r=[\log_p m]$，故$m=p^r\cdot n$，$n<p$，从而$m<p^{r+1}$，也就是说$\left[\frac{m}{p^{r+1}}\right]=\left[\frac{m}{p^{r+2}}\right]=\cdots=0$。因此$p$整除$m!$恰$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{p^r}\right]$次。

3.36 (a) 证明 p整除$\binom{2n}{n}$恰

$$\left(\left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{2n}{p^2}\right]-2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right)+\left(\left[\frac{2n}{p^3}\right]-2\left[\frac{n}{p^3}\right]\right)$$
$$+\cdots+\left(\left[\frac{2n}{p^r}\right]-2\left[\frac{2n}{p^r}\right]\right)$$

次，其中p是大于2的质数，$r=[\log_p 2n]$。

(b) 证明 p整除$\binom{2n}{n}$至多$[\log_p 2n]$次。

(c) 证明 若p^r整除$\binom{2n}{n}$，那么$p^r\leqslant 2n$。

证 (a) 我们知道

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$$

据题3.35的结论，$(2n)!$中质因子p的指数是

$$\left[\frac{2n}{p}\right]+\left[\frac{2n}{p^2}\right]+\left[\frac{2n}{p^3}\right]+\cdots+\left[\frac{2n}{p^r}\right]$$

其中 $r=[\log 2n]$。而$n!n!$中质因子p的指数是

$$2\left[\frac{n}{p}\right]+2\left[\frac{n}{p^2}\right]+2\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots+2\left[\frac{n}{p^{r'}}\right]$$

其中，$r'=[\log_p n]$。由于 $p>2$，$r=r'=[\log_p 2n]$。因此 $\frac{(2n)!}{n!n!}$ 中质因子 p 的指数是

$$\left(\left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{2n}{p^2}\right]-2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right)+\cdots+\left(\left[\frac{2n}{p^r}\right]-2\left[\frac{n}{p^r}\right]\right)$$

故本题结论(a)成立。

评注 $p=2$ 时本命题也成立。这是因为此时 $r'=[\log_p n]=r-1$，而 $\left[\frac{n}{p^r}\right]=0$，故 $n!n!$ 中质因 p 的指数也可写为

$$2\left[\frac{n}{p}\right]+2\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+2\left[\frac{n}{p^{r'}}\right]+2\left[\frac{n}{p^r}\right]。$$

(b) 对任意正整数 i，我们可证

$$\left[\frac{2n}{p^i}\right]-2\left[\frac{n}{p^i}\right]\leqslant 1$$

令 $n=kp^i+l$，其中 k 为整数，$0\leqslant l<p^i$，那么

$$\left[\frac{2n}{p^i}\right]=\left[\frac{2kp^i+2l}{p^i}\right]=2k+\left[\frac{2l}{p^i}\right]\leqslant 2k+1$$

$$2\left[\frac{n}{p^i}\right]=2k$$

因此 $\left[\frac{2n}{p^i}\right]-2\left[\frac{n}{p^i}\right]\leqslant 1$。从而

$$\left(\left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{2n}{p^2}\right]-2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right)+\cdots+\left(\left[\frac{2n}{p^r}\right]-2\left[\frac{n}{p^r}\right]\right)$$

$$\leqslant r=[\log_p 2n]$$

本命题结论(b)得证。

(c) 若 p^r 整除 $\binom{2n}{n}$，那么

$$r\leqslant\left(\left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{2n}{p^2}\right]-2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right)+\cdots+\left(\left[\frac{2n}{p^r}\right]-2\left[\frac{n}{p^r}\right]\right)$$

$$\leqslant[\log_p 2n]$$

因此 $p^r \leqslant p^{[\log_p 2n]} \leqslant p^{\log_p 2n} = 2n$。

3.37 设 $\pi(x)$ 表示小于或等于 x 的质数个数。

(a) 证明 $\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$。

(b) 证明 所有 n 和 $2n$ 之间的质数的乘积小于 $\binom{2n}{n}$，但大于 $n^{\pi(2n)-\pi(n)}$。

(c) 证明 $n^{\pi(2n)-\pi(n)} < 4^n$ 或者 $\pi(2n) - \pi(n) < \dfrac{n\log 4}{\log n}$。

(d) 证明 $\dfrac{n\log 2}{\log 2n} < \pi(2n) \quad (n>1)$。

(e) 证明 $\pi(2n) < \dfrac{n}{\log n}\log 64$。

(f) 证明 $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\log x}$。

证 (a) 令 $p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot p_3^{r_3} \cdot \cdots \cdot p_k^{r_k}$ 是 $\binom{2n}{n}$ 的质因子分解式，据上题结论(c)，$p_1^{r_1} \leqslant 2n$，$p_2^{r_2} \leqslant 2n$，…，$p_k^{r_k} \leqslant 2n$。因此

$$\binom{2n}{n} = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{r_k} \leqslant (2n)^k \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$$

(b) 设 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 是 n 和 $2n$ 之间的全部质数。$p_1, p_2, \cdots, p_l$ 当然都整除 $(2n)!$，但它都不能整除 $n!$，从而也不整除 $n!n!$。因此 $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_l$ 整除 $\dfrac{(2n)!}{n!n!}$，因此 $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_l < \dfrac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$。

另一方面，$p_1 > n$，$p_2 > n$，…，$p_l > n$，当然地

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_l > n^l = n^{\pi(2n)-\pi(n)}$$

(c) 由于

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!}$$

$$=\frac{p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_l\cdot q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_s}{p_1'\cdot p_2'\cdot\cdots\cdot p_m'}\quad（记为 Q）$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 为 n 和 $2n$ 间的质数，$q_1, q_2, \cdots, q_s$ 是 n 和 $2n$ 间的合数，而 $p_1'\cdot p_2'\cdot\cdots\cdot p_m'$ 是 $n!$ 的质因子分解式（p_i' 为某一小于 n 的质数的幂）。显然，Q 为一整数，且仍含有质因子 $p_1, p_2, \cdots, p_l$。据结论(b)及题 3.13(a)有

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)}<p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_l$$

$$\leqslant Q=\binom{2n}{n}$$

$$<4^n$$

或
$$\pi(2n)-\pi(n)<\frac{n\log 4}{\log n}$$

(d) 先证 $\binom{2n}{n}>2^n$。对 n 归纳：

$n=2$ 时，$\binom{2n}{n}=\binom{4}{2}=6$，而 $2^n=4$，命题成立。

设 $n=k$ 时，$\binom{2k}{k}>2^k$。当 $n=k+1$ 时

$$\binom{2(k+1)}{k+1}=\frac{2(k+1)}{k+1}\binom{2k+1}{k}$$

$$=2\cdot\frac{2k+1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

$$>2\cdot 2^k=2^{k+1}$$

另一方面，我们已知$(2n)^{\pi(2n)}\geqslant\binom{2n}{n}$，因而

$$2^n<(2n)^{\pi(2\pi)}$$

两边取对数便得

$$\pi(2n)>\frac{n\log 2}{\log 2n}$$

(e) $$\pi(2n)=\pi(2n)-\pi(n)+\pi(n)-\pi\left(\frac{n}{2}\right)+\pi\left(\frac{n}{2}\right)-\pi\left(\frac{n}{4}\right)+\cdots$$

$$<\frac{n\log 4}{\log n}+\frac{\frac{n}{2}\log 4}{\log\frac{n}{2}}+\frac{\frac{n}{4}\log 4}{\log\frac{n}{4}}+\cdots$$

$$=\log 4\left(\frac{n}{\log n}+\frac{\frac{n}{2}}{\log\frac{n}{2}}+\frac{\frac{n}{4}}{\log\frac{n}{4}}+\cdots\right)\qquad(1)$$

现在我们对$n\geqslant4$证明$\frac{n}{\log n}\geqslant\frac{\frac{n}{2}}{\log\frac{n}{2}}$，对$n\geqslant8$证明$\frac{n}{2\log n}\geqslant\frac{\frac{n}{4}}{\log\frac{n}{4}}$，…。一般地可证，对$n\geqslant2^{k+1}$时有$\frac{n}{2^{k-1}\log n}\geqslant\frac{\frac{n}{2^k}}{\log\frac{n}{2^k}}$。为此，我们只须证

$$\log\frac{n}{2^k}\geqslant\log n^{\frac{1}{2}}$$

或$\frac{n}{2^k}\geqslant n^{\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{n^2}{2^{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant n^{\frac{1}{2}}$。由于$n\geqslant2^{k+1}$，故$\frac{n^2}{2^{k+1}}\geqslant n$，因而上述不等式确成立。

另一方面，等式

$$\pi(2n)=\pi(2n)-\pi(n)+\pi(n)-\pi\left(\frac{n}{2}\right)+\pi\left(\frac{n}{2}\right)-\pi\left(\frac{n}{4}\right)+\cdots$$

中 $\pi\left(\frac{n}{2^k}\right)\neq 0$（否则不必列入和式），因此 $n\geqslant 2^{k+1}$。从而，在(1)式中可以使用不等式

$$\frac{n}{2^{k-1}\log n}\geqslant\frac{\frac{n}{2^k}}{\log\frac{n}{2^k}}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\pi(2n)&<\log 4\left(\frac{n}{\log n}+\frac{\frac{n}{2}}{\log\frac{n}{2}}+\frac{\frac{n}{4}}{\log\frac{n}{4}}+\cdots\right)\\&<\log 4\left(\frac{n}{\log n}+\frac{n}{2\log n}+\frac{n}{4\log n}+\cdots\right)\\&=\frac{n}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)\log 4\\&<\frac{n}{\log n}\log 4^3\\&=\frac{n}{\log n}\log 64\end{aligned}$$

(f) 由(d)我们有

$$\pi(x)>\frac{\frac{x}{2}\log 2}{\log x}=\frac{x}{\log x}c_1\quad(c_1\text{ 为一常数})$$

由(e)我们有

$$\pi(x)<\frac{x}{\log x}\log 64=\frac{x}{\log x}c_2\quad(c_2\text{ 为一常数})$$

即存在常数 c_1，c_2，使

$$\frac{c_1 x}{\log x} < \pi(x) < \frac{c_2 x}{\log x}$$

故
$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$$

3.38 定义 Gaussian(高斯)二项式系数

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdot \cdots \cdot \frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1}$$

其中 $0 < r \leqslant n$, 规定$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1$。

(a) 证明 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n+1-r} = \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}$。

(b) 证明 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}$。

(c) 证明 $\lim\limits_{q \to 1} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$。

(d) 证明

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots(1+q^{n-1}x)$$
$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} qx^2 + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} q^{1+2}x^3$$
$$+ \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} q^{1+2+\cdots+(n-1)} x^n$$

证 (a) $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n+1-r}$

$$= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q^{n-r+1} - 1)}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^r - 1)}$$
$$+ \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q^{n-r+2} - 1)q^{n+1-r}}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^{r-1} - 1)}$$

$$=(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+2}-1)(q^{n-r+1}-1$$

$$+(q^r-)q^{n+1}1^{1-r})/((q-1)(q^2-1)\cdots(q^r-1))$$

$$=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+2}-1)(q^{n+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^r-1)}$$

$$=\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}$$

(b) 当 $r\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$时,

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}=\frac{q^n-1}{q-1}\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q^2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{q^{n-r+1}-1}{q^r-1}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}=\frac{q^n-1}{q-1}\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q^2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{q^{r+1}-1}{q^{n-r}-1}$$

$$=(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)(q^{n-r}-1)\cdots(q^{r+1}-1)$$

$$/((q-1)(q^2-1)\cdots(q^r-1)(q^{r+1}-1)\cdots(q^{n-r}-1)),$$

$$=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^r-1)}$$

$$=\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$$

当 $r>\left[\frac{n+1}{2}\right]$时,可令$r'=n-r$, $\begin{bmatrix} n \\ r' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}$。

(c) 对 n 归纳证明本命题:

$n=1$ 时, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{q-1}{q-1}=1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

设 $n=k$ 时, $\lim\limits_{q\to1}\begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix}$。当 $n=k+1$ 时,

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix}k+1\\r\end{bmatrix}=\lim_{q\to 1}\left(\begin{bmatrix}k\\r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k\\r-1\end{bmatrix}q^{n+1-r}\right)$$

$$=\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix}k\\r\end{bmatrix}+\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix}k\\r-1\end{bmatrix}q^{n+1-r}$$

$$=\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}$$

$$=\binom{k+1}{r}$$

归纳完成，(c)得证。

(d) 对 n 归纳证明本命题。

$n=1$ 时，左边 $=1+x$

$$\text{右边}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x=1+x$$

即 $n=1$ 时，命题成立。

设 $n=k$ 时，命题真。当 $n=k+1$ 时，

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots(1+q^{k-1}x)(1+q^kx)$$

$$=\left(\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}qx^2+\begin{bmatrix}k\\3\end{bmatrix}q^{1+2}x^3\right.$$

$$\left.+\cdots+\begin{bmatrix}k\\k\end{bmatrix}q^{1+2+\cdots+(k-1)}x^k\right)(1+q^kx)$$

$$=\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}qx^2+\begin{bmatrix}k\\3\end{bmatrix}q^{1+2}x^3$$

$$+\cdots+\begin{bmatrix}k\\k\end{bmatrix}q^{1+2+\cdots+(k-1)}x^k+\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}q^kx$$

$$+\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}q^kx^2+\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}q^{k+1}x^3+\begin{bmatrix}k\\3\end{bmatrix}q^{k+1+2}x^4$$

$$+\cdots+\begin{bmatrix}k\\k\end{bmatrix}q^{1+2+\cdots+(k-1)+k}x^{k+1}$$

$$=\begin{bmatrix}k+1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k+1\\1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}k+1\\2\end{bmatrix}qx^2+\begin{bmatrix}k+1\\3\end{bmatrix}q^{1+2}x^3$$

$$+\cdots+\begin{bmatrix}k+1\\k+1\end{bmatrix}q^{1+2+\cdots+(k-1)+k}x^{k+1}$$

故命题亦成立。

归纳完成，(d)得证。

评注 由本题结论(d)和(c)，令(d)中等式里的 $q=1$ 便得到二项式定理。

***3.39** 设 N, K 是常数，且 $1\leqslant K<N$。证明：$\dfrac{\binom{N-K}{n-1}}{\binom{N}{n}}$ 在 $n=\left[\dfrac{N}{K}\right]$ 时达到最大值(这里 $\left[\dfrac{N}{K}\right]$ 表示 $\dfrac{N}{K}$ 的整部)。

证 先化简原式

$$\frac{\binom{N-K}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{n\binom{N-K}{n-1}}{N\binom{N-1}{n-1}}$$

$$=\frac{n(N-K)!(n-1)!(N-n)!}{N(N-1)!(n-1)!(N-K-n+1)!}$$

$$=\frac{(N-K)!(K-1)!n(N-n)!}{N!(K-1)!(N-K-n+1)!}$$

$$=\frac{(N-K)!(K-1)!}{N!}n\binom{N-n}{K-1}$$

由于 $(N-K)!(K-1)!/N!$ 是常数，原式在 $n=\left[\dfrac{N}{K}\right]$ 处取得最

大值等价于 $n\binom{N-n}{K-1}$ 在 $n=\left[\frac{N}{K}\right]$ 时取得最大值。

以下 n_0 表示 $\left[\frac{N}{K}\right]$，考虑

$$A=n_0\binom{N-n_0}{K-1}-(n_0+1)\binom{N-n_0-1}{K-1}$$

及
$$B=n_0\binom{N-n_0}{K-1}-(n_0-1)\binom{N-n_0+1}{K-1}$$

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{n_0(N-n_0)}{N-n_0-K+1}-(n_0+1)\right)\binom{N-n_0-1}{K-1}\\&=\frac{K(n_0+1)-N+n_0+K-1}{N-n_0-K+1}\binom{N-n_0-1}{K-1}\\&>0\end{aligned}$$

这是因为 $N-n_0-K+1>0(N>K)$，而

$$K(n_0+1)=K\left(\left[\frac{N}{K}\right]+1\right)>N$$

即 $K(n_0+1)-N>0$。另一方面

$$\begin{aligned}B&=\left(n_0-(n_0-1)\left(\frac{N-n_0+1}{N-n_0-K+2}\right)\right)\binom{N-n_0}{K-1}\\&=\frac{N-n_0K+1}{N-n_0-K+2}\binom{N-n_0}{K-1}\\&>0\end{aligned}$$

这是因为 $N-n_0K+1=N-K\left[\frac{N}{K}\right]+1>0$，$N-n_0-K+2>0$。

我们还能用完全类似的运算证明，对任一整数 i，有

$$(n_0+i)\binom{N-n_0-i}{K-1}\geqslant(n_0+i\pm1)\binom{N-n_0-i\mp1}{K-1}$$

因此，我们可以得出结论，对任一整数 i

$$n_0\binom{N-n_0}{K-1}>(n_0+i)\binom{N-n_0-i}{K-1}$$

也就是说，当 $n=n_0=\left[\frac{N}{K}\right]$ 时 $n\binom{N-n}{K-1}$ 取得最大值，从而 $\dfrac{\binom{N-K}{n-1}}{\binom{N}{n}}$ 也在此时取得最大值。

第四章　包含-排斥原理

内容提要

包含-排斥原理（也称容斥原理）是求解计数问题常用工具之一，它是加法原理的推广。我们知道，若对所讨论的集合 A 作直接计数有困难，我们可以把 A 分解成若干个子集，如果 A 的这些子集既易计数且两两不相交，那末我们可分别对各子集计数，然后应用加法原理解出问题；如果 A 的这些子集虽易计数，但并非两两不相交，就不能应用加法原理了。求解这种场合的计数问题，包含-排斥原理就担当了加法原理的角色。

包含-排斥原理本身并不深奥，关键是要善于从问题中抽象出若干性质，使 A 能按照这些性质分解为若干易于计数的子集。我们将给出许多这方面的范例，通过这些范例，读者也可体会到这一原理应用的广泛性。

4-1　包含-排斥原理

S 是事物的有限集合，$p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是 S 中的事物可能具有的 m 种性质。$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 分别表示具有性质 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 的 S 的子集。那末

1. 逐步淘汰公式　S 中不具有 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 的任何性质的事物个数为

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m| = |S| - \sum|A_i| + \sum|A_i\cap A_j| \\
- \sum|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots \\
+ (-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|
\end{aligned}
\tag{4-1}
$$

其中各和式分别取遍{1, 2, …, m}的所有1组合，2组合，3组合，…，m组合。

2．容斥公式　S中至少含有性质$p_1, p_2, \cdots, p_m$之一的事物的个数为

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|=\sum|A_i|-\sum|A_i\cap A_j| +\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots +(-1)^{m+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m| \tag{4-2}$$

式中$\sum$符号含义同式(4-1)。

以上两个公式就是包含-排斥原理。

为了书写方便，引入下列符号：

$W(0)=|S|$

$W(1)=\sum|A_i|$

$W(2)=\sum|A_i\cap A_j|$

$W(3)=\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|$

……

$W(m)=|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$

于是上述公式可写成

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m|=W(0)-W(1)+W(2)-W(3)+\cdots+(-1)^mW(m)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^iW(i) \tag{4-3}$$

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|=W(1)-W(2)+W(3)-\cdots+(-1)^{m+1}W(m)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}W(i) \tag{4-4}$$

3．S中恰具有$r(0\leqslant r\leqslant m)$种性质的事物的个数为

$$W(r)-\binom{r+1}{r}W(r+1)+\binom{r+2}{r}W(r+2)$$

$$-\cdots\pm\binom{m}{r}W(m)$$

$$=\sum_{i=0}^{m-r}(-1)^i\binom{r+i}{i}W(r+i) \qquad (4\text{-}5)$$

本公式是包含-排斥原理的一个推广，当 $r=0$ 时与公式(4-3)一致。

4-2 对称筛

在所讨论的问题中，如果性质 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是对称的，即具有 k 个性质的事物个数不依赖于这 k 个性质的选取，总是等于同一个数值，则称这个值为**公共数**，记作 $N(k)$。例如

$$N(2)=|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=\cdots=|A_{m-1}\cap A_m|$$

$$N(3)=|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_4|$$

$$=\cdots=|A_{m-2}\cap A_{m-1}\cap A_m|$$

$$\cdots\cdots$$

另外，记

$$N(0)=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap A_m|$$

$$N=|S|$$

这样公式(4-1)可写成

$$N(0)=N-\binom{m}{1}N(1)+\binom{m}{2}N(2)-\cdots\pm\binom{m}{m}N(m)$$

$$=N+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}N(i) \qquad (4\text{-}6)$$

这个式子称之为**对称筛公式**。对称筛公式应用十分广泛。

4-3 有禁止位的排列

1. 错置 设集合 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$，如果 S 的一个排列

$i_1 i_2 \cdots i_n$ 满足 $i_1 \neq 1$, $i_2 \neq 2$, …, $i_n \neq n$, 则称该排列是 S 的一个错置。S 的所有的错置个数记作 D_n。那末

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$
$$= n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!} \tag{4-7}$$

再定义 $D_0=1$,那末公式(4-7)对所有自然数成立,此外 D_n 还满足

$$D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1}) \quad (对\ n=2,\ 3,\ \cdots) \tag{4-8}$$
$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n \quad (对\ n=1,\ 2,\ 3\cdots) \tag{4-9}$$

(见题 4.22)

2．相邻禁位排列　设集合 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$, 如果 S 的一个排列的任何两个相邻位置上不出现 i, $i+1$($i=1, 2, \cdots, n-1$)的模式, 则称这个排列是 S 的一个相邻禁位排列。S 的所有相邻禁位排列的个数记作 Q_n。那末

$$Q_n=n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!-\binom{n-1}{3}(n-3)!$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(n-i)! \tag{4-10}$$

(见题 4.29)

题解及评注

4.1　证明公式(4-1)和公式(4-2)。

证　公式(4-1)

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m|$$
$$=|S|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$$

只须证明对任意一个$x\in S$，它对公式(4-1)的左右两端参加计数的值都相等即可。分情况讨论：

i）若x不具有$p_1, p_2, \cdots, p_m$中任何性质，即$x\in \overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m$。显然它对左边参加计数为1。而$x\in S$，所以它对右边的$|S|$项参加计数为1。又$x\notin A_i(i=1, 2, \cdots, m)$，因此它对$\sum|A_i|$，$\sum|A_i\cap A_j|\cdots$等和式的计数都为0，这样

$$1=1-0+0-\cdots\pm 0$$

说明x对公式(4-1)的左右两边的计数是相等的。

ii）若x恰具有$k(1\leqslant k\leqslant m)$种性质，不妨设$x$恰具有性质$p_1, p_2, \cdots, p_k$。显然$x$对左边的计数为0。

对于公式的右边，x对$|S|$项计数为1。又因$x\in A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k$，因而对和式：

$\sum|A_i|$项，x参加计数k次，每次计数为1。

$\sum|A_i\cap A_j|$项，设(i, j)是$\{1, 2, \cdots, m\}$的任一个2组合。显然每当(i, j)是$\{1, 2, \cdots, k\}$的2组合时x参加计数为1，其余情况计数为0。而这样的2组合个数为$\binom{k}{2}$，则x对$\sum|A_i\cap A_j|$项的计数是$\binom{k}{2}$。

其余类推。并注意到，对于多于k个集合的交的那些项(例如$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap A_{k+1}|$)，$x$对其和式的计数均为0。因而$x$对公式右边的计数之和为

$$\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}+(-1)^{k+1}\binom{k}{k+1}$$
$$+\cdots+(-1)^m\binom{k}{m}$$

$$=\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}$$
$$=0$$

最后一步是利用二项式公式。这样 x 对左右两边的计数相等。

这就证明了公式(4-1)。

因为

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|=|S|-|\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m}|$$
$$=|S|-|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m|$$

把公式(4-1)代入上式,立即得到公式(4-2)。

4.2 求1到10000之间(含两端)不能为4, 6, 7或10除尽的整数个数。

解 设 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示1到10000之间能被4, 6, 7, 10除尽的整数集合。于是问题变成求 $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|$。可直接利用逐步淘汰公式。

$$W(1)=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|$$
$$=\left[\frac{10000}{4}\right]+\left[\frac{10000}{6}\right]+\left[\frac{10000}{7}\right]+\left[\frac{10000}{10}\right]$$
$$=2500+1666+1428+1000$$
$$=6594$$

$$W(2)=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|$$
$$+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|$$
$$=\left[\frac{10000}{\operatorname{lcm}(4,\ 6)}\right]+\frac{10000}{\operatorname{lcm}(4,\ 7)}\Big]+\left[\frac{10000}{\operatorname{lcm}(4,\ 10)}\right]$$
$$+\left[\frac{10000}{\operatorname{lcm}(6,\ 7)}\right]+\left[\frac{10000}{\operatorname{lcm}(6,\ 10)}\right]$$
$$+\left[\frac{10000}{\operatorname{lcm}(7,\ 10)}\right]$$

$$=\left[\frac{10000}{12}\right]+\left[\frac{10000}{28}\right]+\left[\frac{10000}{20}\right]+\left[\frac{10000}{42}\right]$$

$$+\left[\frac{10000}{30}\right]+\left[\frac{10000}{70}\right]$$

$$=833+357+500+238+333+142$$

$$=2403$$

其中 $\text{lcm}(a, b)$ 表示 a, b 的最小公倍数。下边的 $\text{lcm}(a, b, c)$ 的意义类同。

$$W(3)=|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|$$

$$+|A_2\cap A_3\cap A_4|$$

$$=\left[\frac{10000}{\text{lcm}(4,6,7)}\right]+\left[\frac{10000}{\text{lcm}(4,6,10)}\right]$$

$$+\left[\frac{10000}{\text{lcm}(4,7,10)}\right]+\left[\frac{10000}{\text{lcm}(6,7,10)}\right]$$

$$=\left[\frac{10000}{84}\right]+\left[\frac{10000}{60}\right]+\left[\frac{10000}{140}\right]+\left[\frac{10000}{210}\right]$$

$$=119+166+71+47$$

$$=403$$

$$W(4)=|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$

$$=\left[\frac{10000}{\text{lcm}(4,6,7,10)}\right]$$

$$=\left[\frac{10000}{420}\right]$$

$$=23$$

代入逐步淘汰公式得

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|=W(0)-W(1)+W(2)-W(3)+W(4)$$

$$=10000-6594+2403-403+23$$

$$=5429$$

4.3 求 1 到 10000 之间的非完全平方，非完全立方，更不

是完全四次方数的个数。

解 因为$[\sqrt{10000}]=100$，凡是小于100的数其平方一定落在1到10000之间。那就意味着1到10000之间有100个数是完全平方数。同样地

$[\sqrt[3]{10000}]=21$，所以有21个数是完全立方数。

$[\sqrt[6]{10000}]=4$，所以有4个数是完全六次方数。

代入公式(4-1)，则非完全平方、非完全立方数的个数为

$$10000-(100+21)+4=9,883$$

评注 因为一个完全四次方数也一定是一个完全平方数。所以这9,883个数中，一定不含有完全四次方数。因而解题时不必考虑完全四次方数。

4.4 试求多重集$S=\{4\cdot a, 3\cdot b, 4\cdot c, 5\cdot d\}$的$r=12$的组合数。

解 构造集合$S'=\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c, \infty\cdot d\}$。从$S'$的$r=12$的组合中除掉那些含有多于4个$a$，或多于3个$b$，或多于4个$c$，或多于5个$d$的组合，便得$S$的$r$组合。

设A_1, A_2, A_3, A_4分别表示S'的r组合中，含有多于4个a, 3个b, 4个c, 5个d的组合的集合。S'的所有12组合数是

$$\binom{4+12-1}{12}=\binom{15}{12}=455$$

为了求$|A_1|$，可设想先从S'中取5个a，而后再任取$12-5=7$个元素，以构成S'的12组合。所以

$$|A_1|=\binom{4+(12-5)-1}{12-5}=\binom{10}{7}=120$$

类似地

$$|A_2|=\binom{4+(12-4)-1}{12-4}=\binom{11}{8}=165$$

$$|A_3| = |A_1| = 120$$

$$|A_4| = \binom{4+(12-6)-1}{12-6} = \binom{9}{6} = 84$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{4+(12-5-4)-1}{12-5-4} = \binom{6}{3} = 20$$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{4+(12-5-5)-1}{12-5-5} = \binom{5}{2} = 10$$

$$|A_1 \cap A_4| = \binom{4+(12-5-6)-1}{12-5-6} = \binom{4}{1} = 4$$

$$|A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2| = 20$$

$$|A_3 \cap A_4| = |A_1 \cap A_4| = 4$$

$$|A_2 \cap A_4| = \binom{4+(12-4-6)-1}{12-4-6} = \binom{5}{2} = 10$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0 \quad (\text{这是因为 } 5+4+5=14>12)$$

同样

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$= |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

这样，S 的 $r=12$ 的组合数为

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4| = 455-(120+165+120+84)$$
$$+(20+4+10+20+4+10)-0+0$$
$$=34$$

评注 这类问题还可用第六章生成函数方法求解。

4.5 试求多重集 $S=\{\infty \cdot a,\ 3 \cdot b,\ 5 \cdot c,\ 7 \cdot d\}$的 $r=10$ 组合数。

解 解法同上题。设 A_1, A_2, A_3 分别表示 $S'=\{\infty \cdot a, \infty \cdot b,\ \infty \cdot c,\ \infty \cdot d\}$的至少含有 4 个 b, 6 个 c, 8 个 d 的 10 组合的集合。

S' 的 10 组合数是 $\binom{10+4-1}{10}=286$

$$|A_1|=\binom{10-4+4-1}{10-4}=84$$

$$|A_2|=\binom{10-6+4-1}{10-6}=35$$

$$|A_3|=\binom{10-8+4-1}{10-8}=10$$

$$|A_1\cap A_2|=\binom{10-4-6+4-1}{10-4-6}=1$$

$$|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

所以 S 的 10 组合个数为

$$286-(84+35+10)+1=158$$

4.6 一个面包店中在某时只剩下 6 个巧克力面包圈，7 个黄棕色面包圈和 3 个普通面包圈。这时要从这 16 个面包圈中任选 12 个装成一盒，问有多少种选法？

解 问题相当于求 $S=\{6\cdot c,\ 7\cdot y,\ 3\cdot a\}$的 12 组合数。应用上题的方法直接求出答案为

$$\binom{3+12-1}{12}-\left[\binom{3+(12-7)-1}{5}+\binom{3+(12-8)-1}{4}+\binom{3+(12-4)-1}{8}\right]+\left[\binom{3+(12-11)-1}{1}+\binom{3+12-15-1}{12-15}+\binom{3+12-12-1}{12-12}\right]-\binom{3+12-4-7-8-1}{12-4-7-8}$$

$$=\binom{14}{2}-\left[\binom{7}{5}+\binom{6}{4}+\binom{10}{8}\right]$$

$$+\left[\binom{3}{1}+\binom{-1}{-3}+\binom{2}{0}\right]-\binom{-5}{-7}$$

$$=91-(21+15+45)+(3+0+1)-0$$

$$=14$$

4.7 求 $A=\{a\cdot x,\ b\cdot y,\ c\cdot z\}$的 r 组合数。并证明

(a) 当 $a,\ b,\ c$ 都大于等于 r 时，A 的 r 组合数为

$$\binom{n+r-1}{r},\ \text{其中 } n=3。$$

(b) 当 $a+b+c<r$ 时，A 的 r 组合数为 0。

证 用上题的方法，写出求 A 的 r 组合数的式子

$$\binom{3+r-1}{r}-\left[\binom{3+r-a-1-1}{r-a-1}+\binom{3+r-b-1-1}{r-b-1}\right.$$

$$\left.+\binom{3+r-c-1-1}{r-c-1}\right]+\left[\binom{3+r-a-b-2-1}{r-a-b-2}\right.$$

$$\left.+\binom{3+r-a-c-2-1}{r-a-c-2}+\binom{3+r-b-c-2-1}{r-b-c-2}\right]$$

$$-\binom{3+r-a-b-c-3-1}{r-a-b-c-3}$$

$$=\binom{r+2}{2}-\left[\binom{r-a+1}{2}+\binom{r-b+1}{2}+\binom{r-c+1}{2}\right]$$

$$+\left[\binom{r-a-b}{2}+\binom{r-a-c}{2}+\binom{r-b-c}{2}\right]$$

$$-\binom{r-a-b-c-1}{2}$$

下面进行证明:

(a) 当 $a\geqslant r$ 时,上式中 $\binom{r-a+1}{2}=0$。同样,当 $b\geqslant r$, $c\geqslant r$ 时 $\binom{r-b+1}{2}=\binom{r-c+1}{2}=0$, 及以后的各项都为 0。所以上式等于

$$\binom{r+2}{2}=\binom{n+r-1}{r} \quad (n=3)$$

(b) 当 $a+b+c<r$ 时,取尽 A 的全部元素尚不足 r 个,因此 A 的 r 组合数为 0。实际上,此时展开上式也可证明等于 0。

4.8 求方程 $x_1+x_2+x_3=14$ 的整数解的个数,若

(a) 每个变元都满足 $0\leqslant x_i\leqslant 6\,(i=1, 2, 3)$。

(b) 每个变元都满足 $1\leqslant x_i\leqslant 8\,(i=1, 2, 3)$。

解 (a) 问题相当于求 $S=\{6\cdot a_1, 6\cdot a_2, 6\cdot a_3\}$的 $r=14$ 的组合数。这是因为 S 的每个 14 组合都含有 x_1 个 a_1, x_2 个 a_2 和 x_3 个 a_3, 其中 $x_1+x_2+x_3=14$, 而且满足 $0\leqslant x_i\leqslant 6\,(i=1, 2, 3)$。

用 $r=14$, 各重复系数 $a=6$, $b=6$, $c=6$ 代入上题,得到

$$\binom{16}{2}-3\binom{9}{2}+3\binom{2}{2}-\binom{-5}{2}=15$$

(b) 因为 x_1, x_2, x_3 都大于等于 1, 因此可把问题转化为求方程 $x_1+x_2+x_3=11$ 且满足 $0\leqslant x_i\leqslant 7$ $(i=1, 2, 3)$的整数解的个数。类似(a), 结果为

$$\binom{13}{2}-3\binom{5}{2}=48$$

4.9 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ 的整数解的个数,其中 $1\leqslant x_1\leqslant 6$, $0\leqslant x_2\leqslant 7$, $4\leqslant x_3\leqslant 8$, $2\leqslant x_4\leqslant 6$。

解 令 $y_1=x_1-1$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3-4$, $y_4=x_4-2$。则原方程转化为 $(y_1+1)+y_2+(y_3+4)+(y_4+2)=20$。即

$$y_1+y_2+y_3+y_4=13$$

其中 $0\leqslant y_1\leqslant 5$, $0\leqslant y_2\leqslant 7$, $0\leqslant y_3\leqslant 4$, $0\leqslant y_4\leqslant 4$。

利用题 4.8 的方法，求出后一个方程解的个数

$$\begin{aligned}
&\binom{4+13-1}{13}-\left[\binom{4+7-1}{7}+\binom{4+5-1}{5}+\binom{4+8-1}{8}\right.\\
&\quad\left.+\binom{4+8-1}{8}\right]+\left[\binom{4+13-14-1}{13-14}+2\binom{4+2-1}{2}\right.\\
&\quad\left.+2\binom{4-1}{0}+\binom{4+3-1}{3}\right]-0+0\\
&=\binom{16}{3}-\left[\binom{10}{3}+\binom{8}{3}+2\binom{11}{3}\right]\\
&\quad+\left[0+2\binom{5}{2}+2\binom{3}{0}+\binom{6}{3}\right]\\
&=560-(120+56+2\times 165)+(2\times 10+2+20)\\
&=96
\end{aligned}$$

因为两个方程是等价的，所以原方程解的个数也是 96。

4.10 证明公式(4–5)，即恰有 $r(0\leqslant r\leqslant m)$ 种性质的元素个数是

$$\begin{aligned}
&W(r)-\binom{r+1}{r}W(r+1)+\binom{r+2}{r}W(r+2)\\
&\quad-\cdots\pm\binom{m}{r}W(m)
\end{aligned}$$

证 用计数法证明。

1) 那些具有少于 r 种性质的元素都与公式无关，它们将不参加计数。因为式中仅含 $W(r)$, $W(r+1)$, $\cdots$, $W(m)$ 项。

2) 那些恰具有 r 种性质的元素的每一个都在 $W(r)$ 项中被计数一次且仅一次，而在以后的各项中不参加计数。

3) 那些具有多于 r 种性质的元素的每一个在 $W(r)$ 等项中将被重复计数。其重复情况是，对恰具有 $r+k$ $(k=1, 2, \cdots, m-r)$ 种性质的元素在 $W(r+l)$ $(l=0, 1, \cdots, k)$ 项中被计数了 $\binom{r+k}{r+l}$ 次。连同 $W(r+l)$ 项的系数，共被计数了

$$(-1)^l\binom{r+l}{r}\binom{r+k}{r+l}=(-1)^l\binom{r+k}{r}\binom{k}{l}$$

$$(l=0, 1, \cdots, k)$$

次。这样，每个恰具有 $r+k$ 种性质的元素在公式中的计数次数是

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{r+k}{r}\binom{k}{l}\\&=\binom{r+k}{r}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\\&=0\end{aligned}$$

这就是说，对于具有多于 r 种性质的元素，实际上在公式计数中是不起作用的。

综合上述，只有那些恰具有 r 种性质的元素才参加公式的计数，且每个这样的元素在公式中恰计数一次。这就证明了公式。

4.11 某班级有学生 25 人，其中有 14 人会西班牙语，12 人会法语，6 人会法语和西班牙语，5 人会德语和西班牙语，还有 2 人对这三种语言都会说，而 6 个会德语的人都会说另一种语言（指这三种语言中的一种）。求不会外语的人数。

解 设会法语，德语，西班牙语的学生的集合分别为 F, G,

S。那么显然

$$|F|=12,\ |S|=14,\ |G|=6,\ |F\cap S|=6,\ |G\cap S|=5,$$
$|F\cap S\cap G|=2$。

现在考虑$|G\cap F|$，因 6 个会德语的人都会另一种语言，其中 5 人会西班牙语，那末另一人肯定会法语。又 5 个会西班牙语的人中也有两个会法语。所以$|G\cap F|=6-5+2=3$。由公式(4-1)

$$|\overline{F}\cap\overline{G}\cap\overline{S}|=25-(12+14+6)+(6+5+3)-2=5$$

即不会外语的有 5 人。

4.12 具有 n 个事物的集合有 A, B, C 三个子集。试证明 $3n+|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|\geqslant 2(|A|+|B|+|C|)$。

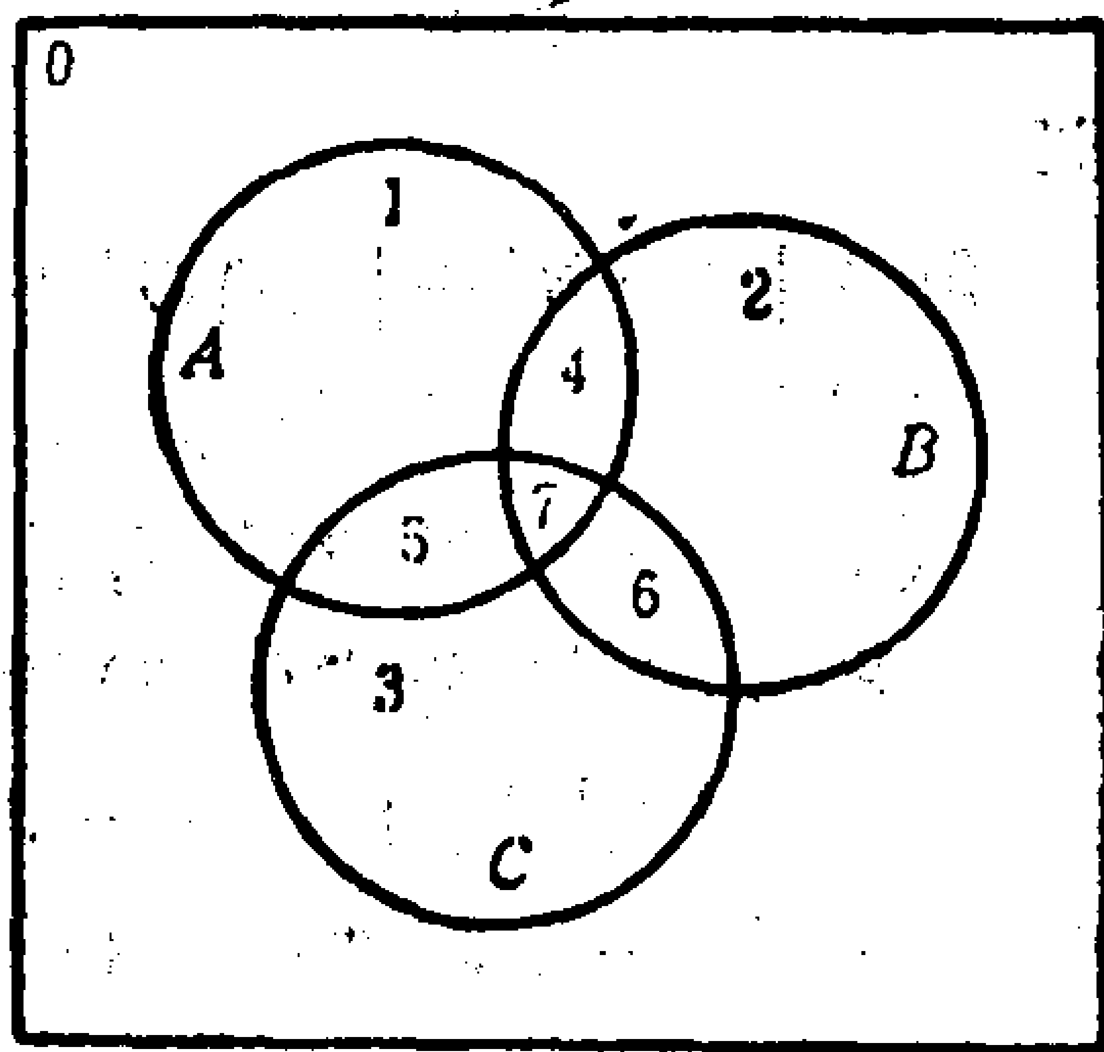


图 4.1

证 一个简单的证明方法是用文氏图，如图 4.1 所示。A、B、C 把全集分割成 8 个部分，分别标以 0, 1, 2, …, 7。并设各部分的元素个数为 a_0, a_1, …, a_7。那末

$$\begin{aligned}&3n+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\\&=3(a_0+a_1+\cdots+a_7)+((a_4+a_7)+(a_5+a_7)+(a_6+a_7))\\&=3a_0+3a_1+3a_2+3a_3+4a_4+4a_5+4a_6+6a_7 \qquad (1)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&2(|A|+|B|+|C|)\\&=2((a_1+a_4+a_5+a_7)+(a_2+a_4+a_6+a_7)+(a_3+a_5+a_6+a_7))\\&=2a_1+2a_2+2a_3+4a_4+4a_5+4a_6+6a_7 \qquad (2)\end{aligned}$$

比较(1)式和(2)式，又因为 $3a_0+a_1+a_2+a_3\geqslant 0$，所以原不等式

成立。

评注 因 $a_0=|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$，$(a_1+a_2+a_3)$ 表示"恰具有 1 个性质"的元素个数。以上解法提示我们也可用公式(4-3)和公式(4-5)直接解出。

$$\begin{aligned}&3a_0+a_1+a_2+a_3\\&\quad=3(W(0)-W(1)+W(2)-W(3))\\&\quad\quad+\left(W(1)-\binom{2}{1}W(2)+\binom{3}{1}W(3)\right)\\&\quad=3W(0)-2W(1)+W(2)\\&\quad\geqslant 0\end{aligned}$$

即

$$3n+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\geqslant 2(|A|+|B|+|C|)$$

4.13 (a) 证明对称筛公式。

(b) 在对称的情况下，公式(4-5)具有什么样的形式。

证 (a) 因公式(4-1)的各和式

$$\sum|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

中的 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k$ 要取遍$\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$的所有 k 组合，因而共有 $\binom{m}{k}$ 项。又每一项的值都等于公共数 $N(k)$。于是

$$\sum|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=\binom{m}{k}N(k)$$

再用 $N(0)$ 代 $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m|$ 和 N 代 $|S|$，便得到对称筛公式

$$N(0)=N-\binom{m}{1}N(1)+\binom{m}{2}N(2)-\cdots\pm\binom{m}{m}N(m)$$

(b) 用 $\binom{m}{k}N(k)$ 代替公式(4-5)中的 $W(k)$ 得

$$\binom{m}{r}N(r)-\binom{r+1}{r}\binom{m}{r+1}N(r+1)$$

$$+\binom{r+2}{r}\binom{m}{r+2}N(r+2)-\cdots\pm\binom{m}{r}\binom{m}{m}N(m)$$

$$=\binom{m}{r}N(r)-\binom{m}{r}\binom{m-r}{m-r-1}N(r+1)$$

$$+\binom{m}{r}\binom{m-r}{m-r-2}N(r+2)$$

$$-\cdots\pm\binom{m}{r}\binom{m-r}{0}N(m)$$

$$=\binom{m}{r}\left[N(r)-\binom{m-r}{1}N(r+1)\right.$$

$$\left.+\binom{m-r}{2}N(r+2)-\cdots\pm\binom{m-r}{m-r}N(m)\right]$$

$$=\binom{m}{r}\sum_{i=0}^{m-r}(-1)^i\binom{m-r}{i}N(r+i)$$

评注 对称筛公式很重要，后续题目大多是这一公式的应用。

4.14 (a) 用包含-排斥原理证明放置5枚硬币至少可提供三个正面的方法数是16。

(b) 用对称性解释，为什么也能得到同样的结果？

证 (a) 把5枚硬币分别记作a_1, a_2, a_3, a_4, a_5。因为每个硬币都有正面和反面。所以任意地放置可产生$2^5=32$种不同的结果。

用$p_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$表示a_i出现正面的性质，显然这些性质是对称的。这样$N(k)=2^{5-k}$。这是因为当有k个硬币是正面时，其余$5-k$个硬币可以任意放置。

用 $m=5$ 和 $r=3, 4, 5$ 分别代入上题(b)中的结果，则恰有三个硬币出现正面的方法数为

$$\binom{5}{3}\left[N(3)-\binom{5-3}{1}N(4)+\binom{5-3}{2}N(5)\right.$$

$$=\binom{5}{3}\left[2^2-\binom{2}{1}2^1+\binom{2}{2}2^0\right]=10(4-4+1)=10$$

恰有四个硬币出现正面的方法数为

$$\binom{5}{4}\left[N(4)-\binom{5-4}{1}N(5)\right]=5(2-1)=5$$

恰有五个硬币出现正面的方法数为

$$\binom{5}{5}N(5)=1$$

把上述三项相加，则至少出现三个正面的方法数是16。

(b) 因为任一硬币或出现正面或出现反面，二者必居其一。而5枚硬币的任何放置，或者至少有三个出现正面或者至少有三个出现反面，二者也必居其一。如果一种放法至少出现了三个反面，那末把所有的硬币都翻转过来，就变成了一种至少出现三个正面的放法。因此在$2^5=32$种放法中，至少有三个出现正面和至少有三个出现反面的情况各占一半。所以答案为 $32\div2=16$。

评注 不用包含-排斥原理可以更简便地求解问题(a)。例如直接用组合公式求出 $\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=16$。

4.15 证明恒等式

(a) $$0=\binom{n}{0}\binom{n}{m}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{m-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{m-2}$$

$$-\cdots\pm\binom{n}{m}\binom{n-m}{0}$$

(b) $0=\binom{n}{0}\binom{n+m-1}{m}-\binom{n}{1}\binom{n+m-2}{m-1}$

$+\cdots\pm\binom{n}{n}\binom{m-1}{m-n}$ （当 $m\geqslant n$ 时）

$0=\binom{n}{0}\binom{n+m-1}{m}-\binom{n}{1}\binom{n+m-2}{m-1}$

$+\cdots\pm\binom{n}{m}\binom{n-1}{0}$ （当 $m<n$ 时）

证 (a) 构造集合 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$。设 p_i 表示 S 的 m 组合中含有元素 $i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的性质。显然这些性质是对称的。求出各公共数：

$N(0)=0$。因为 S 的每个 m 组合至少具有某个性质 p_i。

$N(1)=\binom{n-1}{m-1}$。这是因为当 S 的某个元素，例如 1，属于 S 的 m 组合时，另外 $m-1$ 个元素可从 $\{2, 3, \cdots, n\}$ 中任取。

类似地

$N(2)=\binom{n-2}{m-2}$

……

$N(m)=1$

$N(m+1)=N(m+2)=\cdots=N(n)=0$

又 $N=\binom{n}{m}$ 表示 S 的 m 组合数。代入对称筛公式

$$N(0)=N-\binom{n}{1}N(1)+\binom{n}{2}N(2)-\cdots\pm\binom{n}{m}N(m)$$

$$\mp\cdots\pm\binom{n}{n}N(n)$$

即得 $$0=\binom{n}{m}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{m-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{m-2}-\cdots\pm\binom{n}{m}\binom{n-m}{0}$$

(b) 构造集合 $S=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \cdots, \infty\cdot n\}$。设 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 表示 S 的 m 组合中至少含有一个 i 的性质。这些性质也是对称的。类似(a)求公共数。

$$N=\binom{n+m-1}{m},\ N(0)=0$$

$$N(1)=\binom{n+m-1-1}{m-1}=\binom{n+m-2}{m-1}$$

$$N(2)=\binom{n+m-2-1}{m-2}=\binom{n+m-3}{m-2}$$

……

$$N(n)=\binom{n+m-n-1}{m-n}=\binom{m-1}{m-n}\text{(当 } m\geqslant n \text{ 时)}$$

$$N(m)=\binom{n+m-m-1}{m-m}=\binom{n-1}{0}\text{(当 } m<n \text{ 时)}$$

$$N(m+1)=N(m+2)=\cdots=N(n)=0$$

分别代入对称筛公式得

当 $m\geqslant n$ 时

$$0=\binom{n+m-1}{m}-\binom{n}{1}\binom{n+m-2}{m-1}+\cdots\pm\binom{n}{n}\binom{m-1}{m-n}$$

当 $m<n$ 时

$$0=\binom{n+m-1}{m}-\binom{n}{1}\binom{n+m-2}{m-1}+\cdots\pm\binom{n}{m}\binom{n-1}{0}$$

$$\mp 0\pm 0\mp\cdots$$

即

$$0=\binom{n+m-1}{m}-\binom{n}{1}\binom{n+m-2}{m-1}+\cdots\pm\binom{n}{m}\binom{n-1}{0}$$

4.16 设 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$是一个字符集，由 S 生成长度为 n 的字符串，串中的字符可以相同。

(a) 证明当 $k\leqslant n$ 时，S 中的每个字符至少出现一次的字符串个数是

$$k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^n-\cdots\pm(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}$$

(b) 当 $n=k$ 时，推出一个 $n!$ 的恒等式。

证 (a) 由 S 生成的所有字符串共 k^n 个。把字符串中不出现 $a_i(i=1, 2, \cdots, k)$的性质记作 A_i，那末这些性质是对称的。求公共数

$N(1)=(k-1)^n$，$N(2)=(k-2)^n$，$\cdots$，$N(k-1)=1^n=1$，$N(k)=0^n=0$。

$N(0)$则是 S 的每个字符都出现的字符串个数。代入对称筛公式，得

$$N(0)=k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^n-\cdots\pm(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}$$

(b) 当 $n=k$ 时，$N(0)$表示 S 的每个字符都出一次且仅一次的字符串个数。而这样的字符串恰是 S 的排列。所以 $N(0)=n!$。用 $k=n$ 代入上式得

$$n!=n^n-\binom{n}{1}(n-1)^n+\binom{n}{2}(n-2)^n-\cdots\pm(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}$$

评注 这个题目很有趣。当 $S=\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$时，S 的

不同数字组成的十位数(包括首位为 0 的情况)个数恰是

$$10^{10}-\binom{10}{1}9^{10}+\binom{10}{2}8^{10}-\cdots-10$$

4.17 用公式(4-5)证明恒等式

$$\binom{m}{n}\binom{n}{n}-\binom{m}{n+1}\binom{n+1}{n}+\binom{m}{n+2}\binom{n+2}{n}$$

$$-\cdots\pm\binom{m}{m}\binom{m}{n}=0$$

证 设集合 $S=\{a\}$。$p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是 a 全部满足的 m 种性质。那末对于 $n<m$, 恰满足 n 种性质的元素个数为 0, 公式(4-5)中的 r 用 n 代替, 则$W(n)=\binom{m}{n}, W(n+1)=\binom{m}{n+1}$, $\cdots$。得

$$\binom{m}{n}-\binom{n+1}{n}\binom{m}{n+1}+\binom{n+2}{n}\binom{m}{n+2}$$

$$-\cdots\pm\binom{m}{n}\binom{m}{m}=0$$

即
$$\binom{m}{n}\binom{n}{n}-\binom{m}{n+1}\binom{n+1}{n}+\binom{m}{n+2}\binom{n+2}{n}$$

$$-\cdots\pm\binom{m}{m}\binom{m}{n}=0$$

4.18 $\binom{n-m}{r-m}$表示 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 r 组合中含有子集$\{1, 2, \cdots, m\}$的组合个数。用包含-排斥原理证明恒等式

$$\binom{n-m}{r-m}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}-\binom{m}{1}\binom{n-1}{r}+\binom{m}{2}\binom{n-2}{r}$$

$$-\cdots\pm\binom{m}{m}\binom{n-m}{r}$$

证 设 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 分别表示 S 的 r 组合中不含元素 $1, 2, \cdots, m$ 的性质，那末这些性质是对称的。各公共数为

$N=\binom{n}{r}$, $N(1)=\binom{n-1}{r}$, $N(2)=\binom{n-2}{r}$, $\cdots$, $N(m)=\binom{n-m}{r}$。而 $N(0)=\binom{n-m}{r-m}$，它表示含有子集$\{1, 2, \cdots, m\}$的 S 的 r 组合个数。代入对称筛公式，得

$$\binom{n-m}{r-m}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}-\binom{m}{1}\binom{n-1}{r}+\binom{m}{2}\binom{n-2}{r}-\cdots\pm\binom{m}{m}\binom{n-m}{r}$$

评注 以上是几个利用包含-排斥原理证明恒等式的例子。这类恒等式都具有正负相间项，各项还带有组合系数。只要构造一个适当的集合及集合中的若干性质，证法是很简便的。

4.19 (a) 求 $S=\{1, 2, \cdots, 8\}$的没有偶整数在它的自然位置上（指 i 不排在第 i 个位置上）的排列个数。

(b) 对 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$推出一个一般公式。

解 (a) S 的所有排列个数是 $8!$，有 $i(i=1, 2, 3, 4)$ 个偶数出现在其自然位置上而其余 $8-i$ 个数不加限制的排列数为 $(8-i)!$。此外，i 个偶数有 $\binom{4}{i}$种不同选法。代入对称筛公式得

$$N(0)=\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{4}{i}(8-i)!$$

$$=8!-\binom{4}{1}7!+\binom{4}{2}6!-\binom{4}{3}5!+\binom{4}{4}4!$$

$$=24,024$$

(b) 只要取$m=\left[\frac{n}{2}\right]$，并用$n$和$m$分别代替(a)中的8和4，立即得到$S=\{1, 2, \cdots, n\}$的没有偶数在其自然位置上的排列个数为$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(n-i)!$。

4.20 (a) 求$S=\{1, 2, \cdots, 8\}$的恰有4个整数在其自然位置上的排列个数。

(b) 对$S=\{1, 2, \cdots, n\}$的恰有k个整数在其自然位置上的排列个数确定一个一般公式。

解 (a) 在其自然位置上的4个数有$\binom{8}{4}$种选法。余下的不在其自然位置上的4个数有D_4种排法。于是答案为

$$\binom{8}{4}D_4=70\times 9=630$$

(b) 只要把$\binom{8}{4}$换成$\binom{n}{k}$，把D_4换成D_{n-k}，立即得出答案

$$\binom{n}{k}D_{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}$$

（利用公式(4-7)）

$$=\frac{n!}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}$$

4.21 证明 对于$n\geqslant 1$

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

证 设$p_1, p_2, \cdots, p_n$分别是$S=\{1, 2, \cdots, n\}$的排列中1在第1位，2在第2位，…，n在第n位上的性质。这些性质是对称的。各公共数为：

$N(0)=D_n$, $N=n!$, $N(1)=(n-1)!$, $N(2)=(n-2)!$, $\cdots$, $N(n)=0!=1$。

代入对称筛公式得

$$D_n=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}0!$$

$$=n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n!}$$

$$=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

评注 内容提要中已指出，再定义 $D_0=1$，则此公式对一切自然数成立。在后续问题中所含的 D_n，我们都认为定义在全体自然数上，不另说明。

4.22 证明错置数 D_n 的性质公式

(a) $D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$

(b) $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$

证 (a) 因为 D_n 表示 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$的排列中，数 i 不排在第 i 位的排列个数。可以这样计算这些排列的个数。设 S 的一个错置排列为

$$a_1a_2\cdots a_i\cdots a_n$$

因为 $a_1\neq1$，所以 a_1 可以取 2, 3, $\cdots$, n 这 $n-1$ 个数的任一个。因此 a_1 共有 $n-1$ 种取法。当 $a_1=i\,(2\leqslant i\leqslant n)$时，又可分成下列两种情况:

(i) $a_i=1$。因为这时 $a_1=i$, $a_i=1$ 已定，剩下 $n-2$ 个数作排列，而且每个数都不能在它的自然位置上。根据 D_n 的定义，这样的排列个数为 D_{n-2}。

(ii) $a_i\neq1$。因为这时 $a_1=i$ 已定。而 a_i 又不能等于 1，这相当于把 1“看成” i，对$\{2, 3, \cdots, i, \cdots, n\}$这 $n-1$ 个数作错置。所以这样的排列个数为 D_{n-1}。

根据加法原理和乘法原理得

$$D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$$

(用公式(4-7)直接代入也可证得本题。)

(b) 因为 $D_0=1$(定义), $D_1=0$($\{1\}$无法错置), 由(a),

$$D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})=(n-1)D_{n-2}+nD_{n-1}-D_{n-1}$$

所以 $$D_n-nD_{n-1}=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]$$

而 $$D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}=-[D_{n-2}-(n-2)D_{n-3}]$$

(只要用 $n-1$ 代前一式的 n), 这样反复迭代得

$$\begin{aligned}D_n-nD_{n-1}&=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}]\\&=(-1)^2[D_{n-2}-(n-2)D_{n-3}]\\&=\cdots\\&=(-1)^{n-1}[D_1-(n-(n-1))D_0]\\&=(-1)^{n-1}(0-1)\\&=(-1)^n\end{aligned}$$

移项后得 $$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$$

评注 类似(a)中 D_n 与 D_{n-1}, D_{n-2} 的关系式叫递推关系式。用这种分析方法列出递推关系式是求解较复杂计数问题的重要手段。将在第五章中详细讨论。本题中的递推关系式是由欧拉给出的。

另外,有趣的是错置数 D_n 和 $n!$ 有很多相似之处。例如

$$n!=(n-1)((n-2)!+(n-1)!)\quad (n\geqslant 2)$$

$$n!=n(n-1)!\quad (n\geqslant 1)$$

4.23 试用组合推理解释恒等式

$$n!=\binom{n}{0}D_n+\binom{n}{1}D_{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}D_1+\binom{n}{n}D_0$$

解 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$的排列可分成下列情况:

没有一个数在其自然位置上的排列数为 $D_n=\binom{n}{0}D_n$。

恰有 $i\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 个数在其自然位置上的排列数为 $\binom{n}{i}D_{n-i}$。

又 S 的所有排列的个数为 $n!$，根据加法原理得

$$n!=\binom{n}{0}D_n+\binom{n}{1}D_{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-i}D_1+\binom{n}{n}D_0$$

4.24 证明 D_n 是一个偶数当且仅当 n 是一个奇数。

证 命题等价于 n 是奇数时 D_n 是偶数，n 是偶数时 D_n 是奇数。用归纳法证明。

因为 $D_0=1$，$D_1=0$ 归纳基础成立。

假定对任一 $n>2$，$n-1$ 是奇数，$n-2$ 是偶数时命题成立。那么 $D_{n-1}+D_{n-2}$ 是奇数

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})\qquad \text{是奇数}$$

$$D_{n+1}=n(D_n+D_{n-1})\qquad \text{是偶数}$$

命题得证。

4.25 n 个人参加一晚会，每人寄存一顶帽子，会后各人随便戴其一顶，求

(a) 没有任何人戴上自己原来的帽子的概率。

(b) 至少有一个人戴上自己原来的帽子的概率。

(c) 至少有两个人戴上自己原来的帽子的概率。

解 (a) 因为人和帽子都是有区别的，每人随便地戴一顶帽子相当于 n 顶帽子的一个重排。这些重排的个数为 $n!$。而没有一个人戴上自己原来的帽子恰是错置，错置数为 D_n。因而没有任何人戴上自己原来的帽子的概率是

$$D_n/n! = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)/n!$$
$$=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$
$$\approx\frac{1}{e}\approx 37\%$$

(b) 至少有一个人戴上自己原来的帽子的概率是

$$1-\frac{1}{e}\approx 63\%。$$

(c) 因为没有一个人戴上自己原来的帽子的情况有 D_n 种。恰有一个人戴上自己原来的帽子的情况有 $\binom{n}{1}D_{n-1}$ 种（见上题），因此至少有两个人戴上自己原来帽子有

$$n!-\left(D_n+\binom{n}{1}D_{n-1}\right)=n!-(D_n+D_n-(-1)^n)$$
$$=n!-2D_n+(-1)^n$$

种情况。其概率为

$$(n!-2D_n+(-1)^n)/n!=1-2\frac{D_n}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}$$
$$\approx 1-\frac{2}{e}\approx 26\%$$

评注 上题结果说明，当 n 足够大时，没有人戴上自己原来的帽子的概率与 n 无关，大约都是 e^{-1}，而且与 e^{-1} 之差小于 $\frac{1}{(n+1)!}$（因为 e^{-1} 的展开式是一个交错级数）。这样无论 $n=10$ 还是 $n=1000000$ 其概率大约都是 37%。如果你把这一事实说给你的并不知道这个结果的朋友，他一定不会相信吧！

4.26 上题中，如果每人寄存一顶帽子和一把雨伞，而会后各人也是任取一顶帽子和一把伞。

(a) 有多少种可能使得没有人能拿回他原来的任一件物品?

(b) 有多少种可能使得没有人能同时拿回他原来的两件物品?

解 (a) 根据上题的结果，没有人拿回自己原来的帽子有 D_n 种可能。没有人拿回自己原来的伞也有 D_n 种可能。这两件事情是互相无关的。因此答案为 D_n^2。

(b) 每人任取一顶帽子和一把雨伞的取法总数是 $n!^2$。有某个人同时取回了自己原来的帽子和伞的可能性是 $(n-1)!^2$ 种。因此 $W(1)=\binom{n}{1}(n-1)!^2$。类似地，$W(2)=\binom{n}{2}(n-2)!^2,\cdots$ 根据包含-排斥原理，没有人能同时取回他原来的两件物品的方法数是

$$n!^2-\binom{n}{1}(n-1)!^2+\binom{n}{2}(n-2)!^2-\cdots\pm\binom{n}{n}$$

4.27 试由公式(4-9)推出公式(4-7)。

解 由公式(4-9)反复迭代，并注意到 $D_1=0$。

$$\begin{aligned}D_n&=nD_{n-1}+(-1)^n\\&=n\cdot(n-1)D_{n-2}+(-1)^{n-1}n+(-1)^n\\&=n(n-1)(n-2)D_{n-3}+(-1)^{n-2}n(n-1)+(-1)^{n-1}n\\&\quad+(-1)^n\\&=\cdots\cdots\\&=n!D_1+(-1)^2n(n-1)\cdots\cdot3+(-1)^3n(n-1)\cdots\cdot4\\&\quad+\cdots+(-1)^{n-2}n(n-1)+(-1)^{n-1}n+(-1)^n\\&=n!\Big[1-\frac{1}{1!}+(-1)^2\frac{1}{2!}+(-1)^3\frac{1}{3!}\end{aligned}$$

$$+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$\left.+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

$$=n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}$$

评注 本问题也可用归纳法证明。因为公式(4-7)对 $n=0$ 时成立。假设 $D_{n-1}=(n-1)!\sum_{i=0}^{n=1}(-1)^i\frac{1}{i!}$ 成立，代入公式(4-9)，立即可得到公式(4-7)。

4.28 设 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，用包含-排斥原理确定 S 的 r 组合个数，因而导出 $\binom{k}{r}$ 的一个恒等式。

解 记 $T=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \cdots, \infty\cdot a_k\}$，并设 $p_i(i=1,2,\cdots,k)$ 表示 T 的 r 组合中至少含有 2 个 a_i 的性质。显然这些性质是对称的。公共数 $N(i)$ 表示 T 的 i 个元素每一个都至少出现 2 次的 r 组合个数，因此 $N(i)=\binom{k+r-2i-1}{r-2i}$。又 $N(0)=\binom{k}{r}$ 表示 T 的所有元素都不重复的 r 组合个数。$N=\binom{k+r-1}{r}$ 是 T 的所有 r 组合个数。代入对称筛公式得

$$\binom{k}{r}=\binom{k+r-1}{r}+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{k+r-2i-1}{r-2i}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{k+r-2i-1}{r-2i}$$

由于 $r\leqslant k$，为使 $r-2i\geqslant 0$，上述和式的上限只须取到 $\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$。

4.29 证明公式(4-10)。

证 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 分别表示 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的含

有12, 23, …, $(n-1)n$的排列的集合。

$|A_1|=(n-1)!$，因为当12在排列中出现时，可把1, 2合起来看作一个数，和其它 $n-2$ 个数作排列。类似地 $|A_2|=|A_3|=\cdots=|A_{n-1}|=(n-1)!$。

$|A_1\cap A_2|=(n-2)!$，因为排列中同时出现12, 23即意味着数1, 2, 3顺序地排在一起。可把这三个数看作一个数再和其它 $n-3$ 个数作排列。

$|A_1\cap A_3|=(n-2)!$，因为排列中同时出现12, 34, 可把1, 2合起来看作一个数，3, 4合起来看作一个数，再和其它 $n-4$ 个数作排列。

经类似地分析，可知这 $n-1$ 个集合是对称的(即它们所对应的性质是对称的)。各公共数为 $N(1)=(n-1)!$, $N(2)=(n-2)!$, …, $N(n-1)=1!$。而 $N(0)=Q_n$, $N=n!$ 是 S 的所有排列个数。代入对称筛公式得

$$Q_n=n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

4.30 证明 Q_n 的两个公式

(a) $Q_n=(n-1)!\left(n-\frac{n-1}{1!}+\frac{n-2}{2!}-\frac{n-3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)$

(b) $Q_n=D_n+D_{n-1}$

证 (a) 由上题

$$Q_n=n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-2}{2}(n-2)!-\binom{n-1}{3}(n-3)!$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

$$=n!-(n-1)(n-1)!+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}(n-2)!$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$=(n-1)!\left(n-\frac{n-1}{1!}+\frac{n-2}{2!}-\frac{n-3}{3!}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)$$

(b) 由公式(4-7)

D_n+D_{n-1}

$$=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

$$+(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)$$

$$=(n-1)!\left(n-\frac{n}{1!}+\frac{n}{2!}-\frac{n}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{n}{n!}\right.$$

$$\left.+1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)$$

$$=(n-1)!\left(n-\left(\frac{n}{1!}-1\right)+\left(\frac{n}{2!}-\frac{1}{1!}\right)-\left(\frac{n}{3!}-\frac{1}{2!}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left((-1)^n\frac{n}{n!}-(-1)^n\frac{1}{(n-1)!}\right)\right)$$

又 $\frac{n}{k!}-\frac{1}{(k-1)!}=\frac{n-k}{k!}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，所以

$$上式=(n-1)!\left(n-\frac{n-1}{1!}+\frac{n-2}{2!}-\frac{n-3}{3!}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{0}{n!}\right)=Q_n$$

评注 D_n 和 Q_n 是两种不同性质禁位排列数。有趣的是这两种排列数还有上述关系($Q_n=D_n+D_{n-1}$)。由这个关系可看出当 $n>2$ 时,$Q_n>D_n$。这说明错置排列限制得更严。下边的一个禁位排列也和 D_n 有关。

4.31 令 A_n 表示 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的圆排列中没有 $1\,2$, $2\,3$, $\cdots$, $(n-1)n$, $n\,1$ 出现的排列个数。

(a) 求 A_n。

(b) 证明 $A_n=D_{n-1}-D_{n-2}+D_{n-3}-\cdots\pm D_2$。

解 (a) 设 p_1, p_2, $\cdots$, p_{n-1}, p_n 分别表示 S 的圆排列中出现了 $1\,2$, $2\,3$, $\cdots$, $(n-1)n$, $n\,1$ 的性质。根据上题的分析,这些性质是对称的,各公共数为 $N=(n-1)!$, $N(1)=(n-2)!$, $N(2)=(n-3)!$, $\cdots N(n-1)=0!$, $N(n)=1$, $N(0)=A_n$。代入对称筛公式得

$$A_n=(n-1)!-\binom{n}{1}(n-2)!+\binom{n}{2}(n-3)!$$

$$-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}0!+(-1)^n$$

(b) A_n-D_{n-1}

$$=\left((n-1)!-\binom{n}{1}(n-2)!+\binom{n}{2}(n-3)!\right.$$

$$\left.-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}0!+(-1)^n\right)$$

$$-\left((n-1)!-\binom{n-1}{1}(n-2)!+\binom{n-1}{2}(n-3)!\right.$$

$$\left.-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}0!\right)$$

$$= -\left(\binom{n}{1}-\binom{n-1}{1}\right)(n-2)! + \left(\binom{n}{2}-\binom{n-1}{2}\right)(n-3)!$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1}\left(\binom{n}{n-1}-\binom{n-1}{n-1}\right)0! + (-1)^n$$

$$= -\binom{n-1}{0}(n-2)! + \binom{n-1}{1}(n-3)!$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-2}0! + (-1)^n$$

$$= -A_{n-1}$$

于是 $$A_n = D_{n-1} - A_{n-1}$$

以 $n-1$ 代替 n, $A_{n-1}=D_{n-2}-A_{n-2}$, 这样反复迭代，并注意到 $A_2=0$, 得

$$\begin{aligned} A_n &= D_{n-1} - A_{n-1} \\ &= D_{n-1} - D_{n-2} + A_{n-2} \\ &= D_{n-1} - D_{n-2} + D_{n-3} - A_{n-3} \\ &= \cdots \\ &= D_{n-1} - D_{n-2} + D_{n-3} - \cdots \pm D_2 \end{aligned}$$

评注 $A_n=D_{n-1}-A_{n-1}$ 是一种递推关系式。利用递推关系反复迭代来求解递推关系式或证明恒等式是常用的一种方法。回忆一下，我们在题 4.22 中已经用到过这种方法。

***4.32** n 对夫妇($n\geqslant3$)，围圆桌就座，且男女交错。有多少种就座方法，使得没有任何一对夫妇相邻？

解 为了简化问题，可使女士们先间隔地就座，并把她们按顺时针方向编号为 1, 2, …, n。而后丈夫们就座。在这种情况下把满足没有任何一对夫妇相邻的就座方法数记作 U_n(称作家庭问题数)。

丈夫们任意地入座，总坐法数为 $n!$。但有下列 $2n$ 种性质是被禁止的：

R_1：丈夫 1 坐在他妻子的右边。

L_1：丈夫 1 坐在他妻子的左边。

R_2：丈夫 2 坐在他妻子的右边。

L_2：丈夫 2 坐在他妻子的左边。

……

R_n：丈夫 n 坐在他妻子的右边。

L_n：丈夫 n 坐在他妻子的左边。

但是这些性质不是独立的，例如出现 L_1 时就不能出现 R_1，也不能出现 R_2。若把这 $2n$ 个性质看作 $2n$ 个点，按上述顺序排成一个圆周（L_n 与 R_1 相邻）。可以看出任何两个相邻的性质不能同时出现。根据题 2.33 的结果，在这 $2n$ 个性质中，同时有 k 种性质出现有

$$\frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

种可能。又当有一个性质出现（如 R_1 出现，表示丈夫 1 坐在他妻子的右边）时，而其他 $n-1$ 个人可任意地排列，其排列数为 $(n-1)!$，这样

$$W(1)=\frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1}(n-1)!$$

类似地

$$W(2)=\frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}(n-2)!$$

……

$$W(n)=\frac{2n}{2n-n}\binom{2n-n}{n}0!=2$$

$$W(n+1)=W(n+2)=\cdots=W(2n)=0$$

代入公式(4-1)得

$$U_n=n!-\frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1}(n-1)!+\frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}(n-2)!$$
$$-\cdots+2\cdot(-1)^n$$

再则，对 n 位妻子的每一次重排，都有 U_n 种不同的入座方式。若把 n 位妻子的排列看作圆排列，则家庭问题的排列数

$$M_n=(n-1)!U_n$$

评注 这个问题的精采解法提醒我们，用包含-排斥原理解题时，有可能涉及的事物性质之间并不互相独立，某些性质会发生冲突。需用特殊的技巧避开这些冲突。如果这些冲突不是对称的或不易消除，将给解题带来困难，甚至失败。下一题是这种技巧的一个模仿。

4.33 (a) n 个小朋友排成一列纵队散步。假定每位小朋友只能看到他前面那一位小朋友(第一名除外)。问有多少种变换队形的方法，使得每个小朋友不再看到他当初看到的那个小朋友？

*(b) 若有 n 个男的和 n 个女的共 $2n$ 个小朋友，列队时排成男女男女…的队形。假定变换队形时始终保持男女交错且第一名是男的，使得没有一个女孩能看到她当初看到的男孩，有多少种变换队形的方法？

*(c) 重解问题(a)，要求在变换队形时，当初相邻的不再相邻。

解 (a) 把 n 个小朋友按初始队形顺序地编号为 1, 2, …, n。则问题等价于求{1, 2, …, n}的排列中没有 1 2, 2 3, … 形式出现的排列数。所以答案为 Q_n。

(b) 与(a)类似地把男孩编号为 1, 2, …, n。女孩编号为

$1', 2', \cdots, n'$。在变换队形时，可使女孩们先排列，其排列数为 $n!$。对应她们的每一种排列，把 n 个男孩插入队列，插入方法也有 $n!$ 种，但要除去含有 $11', 22', \cdots, nn'$ 的排列。

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 分别表示排列中出现 $11', 22', \cdots, nn'$ 的性质。那么这些性质是对称的。各公共数为：$N(1)=(n-1)!$，$N(2)=(n-2)!$，$\cdots$，$N(n)=0!$。代入对称筛公式得

$$N(0)=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\cdots\pm\binom{n}{n}0!$$
$$=Q_n$$

所以共有 $n!Q_n$ 种变换队形的方法。

(c) 象(a)那样把 n 个小朋友编号。于是有下列 $2n$ 个性质被禁止：

A_1: 出现 1 2

B_1: 出现 2 1

A_2: 出现 2 3

B_2: 出现 3 2

……

A_n: 出现 $(n-1)n$

B_n: 出现 $n(n-1)$

如果把性质 $A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, A_n, B_n$ 看成 $2n$ 个点，并且顺序地排成一条直线，那末这条线上任两个相邻点对应的性质不能同时存在。根据题 2.31，从 $2n$ 个点中任取 k 个点使得没有两个点相邻的方法数为 $\binom{2n-k+1}{k}$。用题 4.32 类似的方法求得

$$R_n=n!-\binom{2n}{1}(n-1)!+\binom{2n-1}{2}(n-2)!-\cdots\pm\binom{n+1}{n}0!$$

*4.34 证明题 4.32 中家庭问题数 U_n 满足

$$(n-2)U_n=n(n-2)U_{n-1}+nU_{n-2}+4(-1)^{n+1}$$

证 因为

$$U_n=n!-2n(n-1)!+\cdots+(-1)^r\frac{2n}{2n-r}\binom{2n-r}{r}(n-r)!$$
$$+\cdots+2(-1)^n$$

可以记作

$$U_n=u_{n,0}-u_{n,1}+\cdots+(-1)^r u_{n,r}+\cdots+(-1)^n u_{n,n}$$

那末

$$(n-2)u_{n,0}=(n-2)n!=n(n-2)(n-1)!=n(n-2)u_{n-1,0}$$
$$(n-2)u_{n,1}=2n(n-2)(n-1)!=n(n-2)\cdot 2(n-1)(n-2)!$$
$$=n(n-2)u_{n-1,1}$$

对于 $r=2, 3, \cdots, n-1$

$$n(n-2)u_{n-1,r}+nu_{n-2,r-2}$$
$$=n(n-2)\frac{2(n-1)}{2n-r-2}\binom{2n-r-2}{r}(n-r-1)!$$
$$+n\frac{2(n-2)}{2n-r-2}\binom{2n-r-2}{r-2}(n-r)!$$
$$=n(n-2)\frac{2(n-1)}{2n-r-2}\binom{2n-r}{r}\frac{(2n-2r)(2n-2r-1)}{(2n-r)(2n-r-1)}$$
$$\times\frac{(n-r)!}{n-r}+n\frac{2(n-2)}{2n-r-2}\binom{2n-r}{r}$$
$$\times\frac{r(r-1)}{(2n-r)(2n-r-1)}(n-r)!$$
$$=(n-2)\frac{2n}{2n-r}(n-r)!\left(\frac{2(n-1)(2n-2r-1)}{(2n-r-2)(2n-r-1)}\right.$$
$$\left.+\frac{r(r-1)}{(2n-r-2)(2n-r-1)}\right)\binom{2n-r}{r}$$

$$=(n-2)\frac{2n}{2n-r}\ (n-r)!\ \frac{4n^2-4nr-6n+3r+r^2+2}{4n^2-4nr-6n+3r+r^2+2}$$

$$\times\binom{2n-r}{r}$$

$$=(n-2)u_{n,r}$$

当 $r=n$ 时

$$(n-2)u_{n,n}=(n-2)\cdot 2=n\cdot 2-4=nu_{n-2,n-2}-4$$

由于各项对应相等，所以

$$(n-2)U_n=n(n-2)U_{n-1}+nU_{n-2}+4(-1)^{n+1}$$

评注 这个证明过程虽然纯粹是数学演算，但却为我们提供了对于一个复杂的恒等式的证明方法。可以设想，如果不采用这种分段的证明方法，而把所有的项写在一个式子中，势必相当庞大且不易找出规律。

4.35 $S=\{2\cdot a_1,\ 2\cdot a_2,\ \cdots,\ 2\cdot a_n\}$的排列中，若任何两个相同的字符都不相邻，就叫做"简单字"。例如 $a_2a_1a_3a_2a_1a_3$ 是一个 $n=3$ 的简单字。试用包含-排斥原理，求简单字的个数。

解 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 分别表示 S 的排列中两个 a_1，两个 a_2，$\cdots$，两个 a_n 相邻的性质。那末这些性质是对称的。各公共数为：$N=\frac{(2n)!}{2^n}$，$N(1)=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$，$N(2)=\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}$，$\cdots$，$N(n)=\frac{(2n-n)!}{2^0}$。

代入对称筛公式，得简单字个数为

$$N(0)=\frac{(2n)!}{2^n}-\binom{n}{1}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}+\binom{n}{2}\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}$$

$$-\cdots+\binom{n}{n}\frac{(2n-n)!}{2^0}$$

4.36 设 X, Y 是两个集合，其中 $|X|=n$，$|Y|=m$，且

$n \geqslant m$。求 X 到 Y 的满射函数个数。

解 设 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 分别表示 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 没被射到的性质。那么这些性质是对称的。由函数知识可知 X 到 Y 的所有函数个数为 $N=m^n$, $N(0)$ 表示 Y 的所有元素均被射到的函数——即 X 到 Y 的满射函数——个数。其它各公共数为 $N(1)=(m-1)^n$, $N(2)=(m-2)^n$, $\cdots$, $N(m-1)=1^n=1$, $N(m)=0^n=0$。代入对称筛公式得

$$N(0)=m^n-\binom{m}{1}(m-1)^n+\binom{m}{2}(m-2)^n-\cdots\pm\binom{m}{m-1}\cdot 1^n$$

4.37 设 $A=\{n_1\cdot x_1, n_2\cdot x_2, \cdots, n_k\cdot x_k\}$, N_m 表示把 A 的元素放到 m 个有标记的盒子中，每个盒子中元素个数不限的方法数。由题 2.42

$$N_m=\binom{m+n_1-1}{n_1}\binom{m+n_2-1}{n_2}\cdots\binom{m+n_k-1}{n_k}$$

用包含-排斥原理证明，若要每个盒子不空，则方法数为

$$N_m-\binom{m}{1}N_{m-1}+\binom{m}{2}N_{m-2}-\cdots\pm\binom{m}{m-1}N_1$$

证 设 $p_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 表示第 i 个盒子为空的性质，那末这些性质是对称的。由 N_m 的定义，各公共数为：$N=N_m$, $N(1)=N_{m-1}$, $N(2)=N_{m-2}$, $\cdots$, $N(m-1)=N_1$, $N(m)=0$。又 $N(0)$ 表示每个盒子都不空的放法数。代入对称筛公式得

$$N(0)=N_m-\binom{m}{1}N_{m-1}+\binom{m}{2}N_{m-2}-\cdots\pm\binom{m}{m}N_1$$

4.38 用包含-排斥原理证明把正整数 n 分成互不相同的项的剖分数等于 n 的奇剖分数(每一剖分项都是奇数)。

证 设$p(n)$表示n的所有剖分数。$p_0(n)$表示n的奇剖分数。$p_d(n)$表示把n分成互不相同的项的剖分数。

引理 n的含有数x的剖分数等于数$n-x$的剖分数$p(n-x)$。因为n的任一含有x的剖分，去掉x之后，恰是$n-x$的一个剖分。反之$n-x$的一个剖分加上x之后，恰是n的一个剖分。

上述引理可以推广为n的含有数$x, y, z, \cdots$的剖分数等于$n-x-y-z-\cdots$的剖分数$p(n-x-y-z-\cdots)$。

求$p_0(n)$时，应从$p(n)$中减去那些含有偶数2, 4, 6, $\cdots$的剖分数，即

$$\begin{aligned}p_0(n)=p(n)&-(p(n-2)+p(n-4)+p(n-6)+\cdots)\\&-(p(n-2-4)+p(n-2-6)+p(n-4-6)+\cdots)\\&-(p(n-2-4-6)+p(n-2-4-8)+\cdots)+\cdots\end{aligned}$$

上式最终可以写成

$$p_0(n)=p(n)+a\cdot p(n-2)+b\cdot p(n-4)+c\cdot p(n-6)+\cdots$$

其中$a, b, c, \cdots$是整系数。

求$p_d(n)$时，应从$p(n)$中减去那些带有重复项的剖分个数。即减去含有两个1, 两个2, 两个3, $\cdots$的剖分个数。所以

$$\begin{aligned}p_d(n)&=p(n)-(p(n-1-1)+p(n-2-2)+p(n-3-3)+\cdots)\\&\quad+(p(n-1-1-2-2)+p(n-1-1-3-3)\\&\quad+p(n-2-2-3-3)+\cdots)-(p(n-1-1-2-2-3-3)\\&\quad+p(n-1-1-2-2-4-4)+\cdots)+\cdots\\&=p(n)-(p(n-2)+p(n-4)+p(n-6)+\cdots)\\&\quad+(p(n-2-4)+p(n-2-6)+p(n-4-6)+\cdots)\\&\quad-(p(n-2-4-6)+p(n-2-4-8)+\cdots)+\cdots\end{aligned}$$

比较$p_0(n)$的表达式和$p_d(n)$的表达式得

$$p_0(n)=p_d(n)$$

评注 本题的证明方法很容易推广到一般情况。请看下面两题。

4.39 用包含-排斥原理证明把 n 分成每一部分都不能被 3 除尽的剖分数等于把 n 分成任何一项都不出现两次以上的剖分数。

证 设 $p_x(n)$ 表示 n 的不含 3 的倍数的剖分数。$p_y(n)$ 表示 n 的各项不出现两次以上的剖分数。显然从 $p(n)$ 中减去含有 3, 6, 9, … 的剖分个数就得到 $p_x(n)$。从 $p(n)$ 中减去含有 3 个 1, 3 个 2, 3 个 3… 的剖分个数就得到 $p_y(n)$。于是

$$\begin{aligned}p_x(n)=p(n)&-(p(n-3)+p(n-6)+p(n-9)+\cdots)\\&+(p(n-3-6)+p(n-3-9)+p(n-6-9)+\cdots)\\&-(p(n-3-6-9)+p(n-3-6-12)+\cdots)+\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_y(n)=p(n)&-(p(n-3\times1)+p(n-3\times2)+p(n-3\times3)+\cdots)\\&+(p(n-3\times1-3\times2)+p(n-3\times1-3\times3)\\&+p(n-3\times2-3\times3)+\cdots)-(p(n-3\times1\\&-3\times2-3\times3)+p(n-3\times1-3\times2-3\times4)+\cdots)+\cdots\end{aligned}$$

比较 $p_x(n)$ 和 $p_y(n)$ 的表达式得

$$p_x(n)=p_y(n)$$

4.40 [James Whitebread Lee Glaisher (1848—1928)] 证明把 n 分成各部分不能被 d 所整除的剖分数等于把 n 划分成每一部分不出现 d 次或 d 次以上的剖分数。

证 证法同上题。用 $p_x(n)$ 表示每一部分都不能被 d 所整除的 n 的剖分数。$p_y(n)$ 表示每一部分都不出现 $d-1$ 次以上的 n 的剖分数。因此从 $p(n)$ 中减去含有 d, $2d$, $3d$, …的剖分个数得 $p_x(n)$，从 $p(n)$ 中减去含有 d 个 1, d 个 2, d 个 3, …的剖分个数得 $p_y(n)$，列式为

$$p_x(n)=p(n)-(p(n-d)+p(n-2d)+p(n-3d)+\cdots)$$
$$+(p(n-d-2d)+p(n-d-3d)+p(n-2d-3d)+\cdots)$$
$$-(p(n-d-2d-3d)+p(n-d-2d-4d)+\cdots)+\cdots$$
$$p_y(n)=p(n)-(p(n-d\times1)+p(n-d\times2)+p(n-d\times3)+\cdots)$$
$$+(p(n-d\times1-d\times2)+p(n-d\times1-d\times3)$$
$$+p(n-d\times2-d\times3)+\cdots)-(p(n-d\times1-d\times2-d\times3)$$
$$+p(n-d\times1-d\times2-d\times4)+\cdots)+\cdots$$

比较两式得 $$p_x(n)=p_y(n)$$

***4.41** [Euler]

(a) 证明上题中当 $d=1$ 时有

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)--++\cdots=0$$

(b) 证明上式中 $p(n-i)$ 的系数是数 i 的具有偶数个不同项的剖分数减去其具有奇数个不同项的剖分数。

证 (a) 当 $d=1$ 时，显然 $p_x(n)=0$。用 $d=1$ 代入上题中 $p_x(n)$ 的表达式得

$$0=p(n)-(p(n-1)+p(n-2)+p(n-3)+p(n-4)+p(n-5)$$
$$+p(n-6)+p(n-7)+\cdots)+(p(n-1-2)+p(n-1-3)$$
$$+p(n-1-4)+p(n-1-5)+p(n-1-6)$$
$$+\cdots+p(n-2-3)+p(n-2-4)+p(n-2-5)$$
$$+\cdots+p(n-3-4)+p(n-3-5)+\cdots)-(p(n-1-2-3)$$
$$+p(n-1-2-4)+p(n-1-2-5)+\cdots+p(n-2-3-4)$$
$$+p(n-2-3-5)+\cdots)+\cdots$$
$$=p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)--++\cdots$$

(b) 由于(a)中的式子可以写成

$$0=p(n)-\sum p(n-i)+\sum a_ip(n-i)-\sum b_ip(n-i)+\cdots$$

其中，第一个和式中各项系数(为 1)表示把 i 剖分成 1 项的剖分数。

第二个和式中各项系数表示把 i 剖分成两个互不相同项的剖分数。

第三个和式中各项系数表示把 i 剖分成三个互不相同项的剖分数。

……

而把 $p(n-i)$ 偶数项系数之和减去其奇数项系数之和，便是(a)的式子中 $p(n-i)$ 的系数。因而命题得证。

评注 以上四题都是用包含-排斥原理求解整数剖分问题的例子，证法都很精采。这使我们进一步认识到包含-排斥原理的灵活性和重要性。看了这些精采的证明，一定会使你得益匪浅吧！

4.42 欧拉函数 $\phi(n)$ 表示从1到正整数 n 之间与 n 互质的数的个数(包括1)。求 $\phi(n)$。

解 把 n 作质因子分解，得到 n 的 k 个不同的质因子 p_1, p_2, …, p_k。

设 A_1, A_2, …, A_k 分别表示1到 n 之间的含有因子 p_1, p_2, …, p_k 的集合。那么 $\phi(n)$ 等于从1到 n 之间的 n 个数中减去 A_1, A_2, …, A_k 中的数的个数。根据包含-排斥原理。

$$\phi(n)=n-(|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_k|)+(|A_1\cap A_2| +\cdots+|A_{k-1}\cap A_k|)-\cdots\pm|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|$$

因为 $A_1=\left\{p_1,\ 2p_1,\ 3p_1,\ \cdots,\ \frac{n}{p_1}p_1\right\}$，所以 $|A_1|=\frac{n}{p_1}$。同样地 $|A_i|=\frac{n}{p_i}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，$|A_i\cap A_j|=\frac{n}{p_ip_j}(i\neq j)$ 等等。所以

$$\phi(n)=n-\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_k}\right)+\left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{k-1}p_k}\right)-\cdots\pm\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

4.43 求恰具有28个因子的最小整数。

解 因为任一个整数 n 都可以表示为

$$n=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot 7^{\alpha_4}\cdot\cdots\cdot p^{\alpha_k}$$

n 的因子个数为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)\cdots(\alpha_k+1)$$

因为 $$28=28\times 1=7\times 4=7\times 2\times 2$$

为了使 n 尽量地小，可取28的分解式中最大因子减1为 α_1，次大因子减1为 $\alpha_2\cdots$ 等等。

若取 $28=28\times 1$，则 $\alpha_1=27$，$\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_k=0$。$n=2^{27}$。

若取 $28=7\times 4$，则 $\alpha_1=6$，$\alpha_2=3$，$\alpha_3=\cdots=\alpha_k=0$。$n=2^6\cdot 3^3$。

若取 $28=7\times 2\times 2$，则 $\alpha_1=6$，$\alpha_2=1$，$\alpha_3=1$，$\alpha_4=\cdots=\alpha_k=0$。$n=2^6\cdot 3\cdot 5$。

比较上述三种结果，最小的 n 是

$$2^6\cdot 3\cdot 5=960$$

4.44 [Euler]

(a) 用计数的方法证明若 p 是一个质数，则

$$\phi(p^m)=p^{m-1}(p-1)$$

*(b) 通过计数讨论证明若 m, n 互质，则

$$\phi(m)\phi(n)=\phi(mn)$$

(c) 由(a)，(b)的结果，导出 $\phi(n)$ 的公式。

证 (a) 因为 p 是一个质数，所以1到 p^m 之间与 p^m 不互质的数只能是 p 的整倍数。即是 ip 的形式，$i=1, 2, 3, \cdots, p^{m-1}$。那末与 p^m 互质的数的个数

$$\phi(p^m)=p^m-p^{m-1}=p^{m-1}(p-1)$$

(b) 将1到 mn 之间的数排成一个矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & m+1 & 2m+1 & \cdots & km+1 & \cdots & (n-1)m+1 \\ 2 & m+2 & 2m+2 & \cdots & km+2 & \cdots & (n-1)m+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r & m+r & 2m+r & \cdots & km+r & \cdots & (n-1)m+r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & 2m & 3m & \cdots & (k+1)m & \cdots & mn \end{bmatrix}$$

显然当且仅当与 m, n 都互质的数才与 mn 互质。

考察矩阵的第 r 行，若 r 与 m 不互质，则这一行中将没有和 mn 互质的元素。这是因为若 $d|m$, $d|r$ 则 $d|(km+r)$ ($k=0, 1, \cdots, (n-1)$)。因此只能从那些第一个元素与 m 互质的行中去寻找与 mn 互质的元素。而这样的行恰有 $\phi(m)$ 个。

若 r 与 m 互质，第 r 行中的 n 个元素 $r, m+r, \cdots, (n-1)m+r$ 分别除以 n 所得的余数恰是 $0, 1, 2, \cdots, (n-1)$ 的排列(即余数各不相同)。因为假定有两个余数相同，则必有

$$km+r\equiv jm+r \pmod n \quad 其中\ 0\leqslant k<n,\ 0\leqslant j<n$$

于是

$$km\equiv jm \pmod n$$

又因为 m, n 互质，则

$$k\equiv j \pmod n$$

所以

$$k=j$$

又一个数和 n 互质与否，等价于该数除以 n 所得的余数是否与 n 互质。而 $0, 1, 2, \cdots, (n-1)$ 中恰有 $\phi(n)$ 个与 n 互质的数(这是因为 0 将不予讨论，而 n 与 n 不互质。因此等于 $1, 2, \cdots, n$ 中与 n 互质的数的数目)。所以 r, $m+r$, $2m+r$, $\cdots$, $(n-1)m+r$ 中共有 $\phi(n)$ 个与 n 互质的元素。

因而矩阵中共有 $\phi(m)\phi(n)$ 个与 mn 互质的元素。这就证明了

$$\phi(m)\phi(n)=\phi(mn)$$

(c) 将 n 作质因子分解

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是互不相同的质数。因而 $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}$ 也是互质的。由(b)和(a)得

$$\begin{aligned}\phi(n)&=\phi(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k})\\&=\phi(p_1^{\alpha_1})\cdot\phi(p_2^{\alpha_2})\cdot\cdots\cdot\phi(p_k^{\alpha_k})\\&=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\\&=p_1^{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot p_2^{\alpha_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\\&=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\\&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\end{aligned}$$

评注 与题 4.42 相比较，这个证明显得很复杂。这里再一次体现包含-排斥原理的威力。

4.45 证明

(a) $\phi(n^2)=n\phi(n)$。

(b) 一般地 $\phi(n^m)=n^{m-1}\phi(n)$。

证 (a) 设 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是 n 的 k 个互不相同的质因子，显然 n^2 也有且仅有这 k 个不同的质因子。利用欧拉函数公式得

$$\phi(n^2)=n^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=n\phi(n)$$

(b) 与(a)中的情况完全相同

$$\phi(n^m)=n^m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=n^{m-1}\phi(n)$$

***4.46** [Gauss]

令整数 n 的因子(包括 1 和 n)为 $d_1, d_2, \cdots, d_m$。证明

$$\phi(d_1)+\phi(d_2)+\cdots+\phi(d_m)=n$$

其中，$\phi(1)=1$。

证 考虑集合 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$，把 S 划分成 m 个类 $C_1, C_2, \cdots, C_m$。对任一个 $r\in S$，$r\in C_i$ 当且仅当 $(r, n)=d_i$（这里 (r, n) 表示 r 与 n 的最大公因子，若 $(r, n)=1$，则表示 r 与 n 互质）。而 $(r, n)=d_i$ 当且仅当 $\left(\frac{r}{d_i}, \frac{n}{d_i}\right)=1$。（否则 d_i 不是最大公因子）于是 $r\in C_i$ 当且仅当 $\frac{r}{d_i}$ 与 $\frac{n}{d_i}$ 互质。

又 $r\leqslant n$，$\frac{r}{d_i}\leqslant\frac{n}{d_i}$。由 $\phi(n)$ 的定义得

$$|C_i|=\phi\left(\frac{n}{d_i}\right)$$

又
$$n=\sum_{i=1}^{m}|C_i|=\sum_{i=1}^{m}\phi\left(\frac{n}{d_i}\right)=\sum_{j=1}^{m}\phi(d_j)$$

最后一步是因为 d_i 是 n 的因子，d_i 除 n 等于 n 的另一个因子 d_j，当 d_i 取遍 n 的所有因子时，d_j 也取遍 n 的所有因子。所以

$$\phi(d_1)+\phi(d_2)+\cdots+\phi(d_m)=n$$

4.47 定义正整数 n 的 **Möbius 反演**（**函数**）如下：

$$\begin{cases}\mu(1)=1\\ \mu(n)=0, \text{如果 } n \text{ 能被某素数的平方整除。}\\ \mu(p_1p_2\cdots p_k)=(-1)^k, \text{如果 } p_1, p_2, \cdots, p_k \text{ 是互不相同的素数。}\end{cases}$$

证明欧拉函数

$$\phi(n)=n\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{d}$$

其中和式取遍 n 的所有正因子 d。

证 设 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是互不相同的素数。又设 n 的因子为 $d_1, d_2, \cdots, d_m$（其中 $d_1=1$）那么

$$d_i=\prod_{j=1}^{k}p_j^{\beta_j}\quad(0\leqslant\beta_j\leqslant\alpha_j)$$

考虑和式
$$n\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{d}\tag{1}$$

$$=n\left(\frac{\mu(d_1)}{d_1}+\frac{\mu(d_2)}{d_2}+\cdots+\frac{\mu(d_m)}{d_m}\right) \tag{2}$$

对每个 d_i 作质因子分解,(它们的质因子都属于$\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$)根据 $\mu(n)$的定义,若 d_j 具有重复的因子,则 $\mu(d_j)=0$。这就意味着(2)式中它将不参加计数。去掉这些因子,把具有不同质因子的 d_j 按其因子个数分类。第一类具有一个因子,第二类具有两个因子,…,等等。并考虑到 $d_1=1$, 那么(2)式等于

$$n\left(1-\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}\frac{1}{p_i\cdot p_j}-\cdots+(-1)^k\frac{1}{p_1p_2\cdots p_k}\right) \tag{3}$$

与题 4.42 比较,(3)式等于 $\phi(n)$。因此

$$\phi(n)=n\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{d}$$

4.48 设 n 是正整数,$q_1, q_2, \cdots, q_N$ 是 N 个两两互素的正整数,那么满足条件

$$0<k\leqslant n,\ q_i\nmid k \quad (i=1, 2, \cdots, N)$$

的整数 k 的个数等于

$$n-\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left\lfloor\frac{n}{q_i}\right\rfloor+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\left\lfloor\frac{n}{q_iq_j}\right\rfloor-\cdots+(-1)^N\left\lfloor\frac{n}{q_1q_2\cdots q_N}\right\rfloor$$

证 记 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$, p_i 表示 S 中元素能被 $q_i(i=1, 2, \cdots, N)$整除的性质, $A_i=\{x\in S\mid p_i(x)\}$。由于 q_i 两两互素,因此 $W(r)=|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_r}|$是满足关系

$$0<k\leqslant n,\ q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_r}\mid k$$

的整数 k 的个数,它等于 $\left\lfloor\dfrac{n}{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_r}}\right\rfloor$。从而由上题中的(3)式可直接推得,满足本题条件的 k 的个数是

$$\begin{aligned}&|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_N|\\&=W(0)-W(1)+W(2)-\cdots+(-1)^NW(N)\\&=n-\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left\lfloor\frac{n}{q_i}\right\rfloor+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\left\lfloor\frac{n}{q_iq_j}\right\rfloor-\cdots+(-1)^N\left\lfloor\frac{n}{q_1q_2\cdots q_N}\right\rfloor\end{aligned}$$

4.49 用 $\pi(x)$ 表示小于等于 x 的素数个数。设 n 是正整数，试计算 $\pi(n)-\pi(\sqrt{n})$。

解 设 $q_1, q_2, \cdots, q_N$ 是小于等于 $\sqrt{n}$ 的全体素数。我们断定：所有不能被 $q_1, q_2, \cdots, q_N$ 整除的数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$，必定是大于 $\sqrt{n}$，而小于等于 n 的素数。这是因为：(1)除了数1以外，所有小于等于 $\sqrt{n}$ 的数都可被某个 q_i 整除。(2)所有大于 $\sqrt{n}$ 的合数至少有一个小于等于 $\sqrt{n}$ 的素因子。(3) 大于 $\sqrt{n}$ 的素数不可能被任何一个 q_i 整除。因此，根据上题的结论得

$$
\begin{aligned}
&\pi(n)-\pi(\sqrt{n})\\
&=n-\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left[\frac{n}{q_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\left[\frac{n}{q_iq_j}\right]\\
&\quad-\cdots+(-1)^N\left[\frac{n}{q_1q_2\cdots q_N}\right]-1\\
&=\sum_{d\mid n}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]-1
\end{aligned}
$$

最后一步留给读者自己说明。

4.50 μ 是Möbius 反演函数，试证明对一切正整数 n

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1 & \text{当 } n=1\\ 0 & \text{当 } n>1\end{cases}$$

证 当 $n=1$ 时显然等式成立。对 $n>1$，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，是 n 的素因子分解式。令 $n^*=p_1p_2\cdots p_r$。对于不能整除 n^* 的 n 的因子 d，我们显然可以断定 d 含有因子 $p_k^{\alpha_k}$，而 $\alpha_k>1$，因而 $\mu(d)=0$。因此

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\sum_{d\mid n^*}\mu(d)$$

根据 μ 的定义：

$$
\begin{aligned}
\sum_{d\mid n^*}\mu(d)&=\mu(1)+\mu(p_1)+\mu(p_2)+\cdots+\mu(p_r)+\mu(p_1p_2)\\
&\quad+\cdots+\mu(p_{r-1}p_r)+\cdots+\mu(n^*)
\end{aligned}
$$

$$=1-r+\binom{r}{2}-\binom{r}{3}+\cdots+(-1)^k\binom{r}{k}$$

$$+\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}$$

$$=(1-1)^r$$

$$=0$$

4.51 (Möbius 反演定理) 设 f, g 是以正整数集为定义域、值域的函数。满足

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d)$$

试证

$$g(n)=\sum_{d|n}f(n/d)\mu(d)$$

证 由 $f(n)=\sum_{d|n}g(d)$ 可知，对 n 的每一个因子 d

$$f(n/d)=\sum_{d'|n/d}g(d')$$

于是

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(n/d)=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{d'|n/d}g(d')$$

由于 dd' 整除 n, 对固定的 d', d 取遍 n/d' 的所有因子。因此

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(n/d)=\sum_{d'|n}g(d')\sum_{d|n/d'}\mu(d)$$

据上题结论，$\sum_{d|n/d'}\mu(d)$ 除了 $n/d'=1$ 时取值 1, 其它情况下均取零值，即 $d'=n$ 时 $\sum_{d|n/d'}\mu(d)=1$, 从而

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(n/d)$$

第五章　递推关系

内容提要

递推关系几乎在所有的数学分支中都有重要应用。在组合数学中，利用递推关系求出计数公式，是求解计数问题的重要方法。本章的内容围绕着递推关系展开，主要有以下两个方面：

1．递推关系式的建立及求解。建立问题的解所满足的递推关系，主要是通过分析问题中对应于前后几个变元的函数值之间的关系得出，无固定程式可循，具体技巧我们可通过题解学习。求解递推关系的常用方法主要有：(1)特征根法；(2)迭代法和归纳法；(3)生成函数法(在下章介绍)。但读者应该清楚，有很多递推关系至今仍未能研究出解法。

2．高级计数数。主要有 Fibonacci 数、Catalan 数、Stirling 数和 Bell 数。它们都是在计数问题中经常会自然出现的数列和数组，我们介绍它们的定义、适用的数学模型和某些性质。

5-1　递推关系及其解法

1．给定一个数的序列 $H(0)$, $H(1)$, …, $H(n)$, …, 把 $H(n)$ 和某些个 $H(i)$ $(0\leqslant i<n)$ 联系起来的一个等式叫做一个**递推关系**。

2．递推关系

$$H(n)+a_1H(n-1)+a_2H(n-2)+\cdots+a_kH(n-k)=0$$

$$n\geqslant k$$

称为**常系数线性齐次递推关系**。其中 a_i $(i=1, 2, \cdots, k)$ 是常

数，且$a_k\neq 0$。

方程 $x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a^k=0$ 称为此递推关系的特征方程。

3．设递推关系式 $H(n)+a_1H(n-1)+\cdots+a_kH(n-k)=0$ 是一个常系数线性齐次递推关系，其特征方程的根为 $q_1, q_2, \cdots, q_k$，且都不相同。则

$$H(n)=c_1\cdot q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_k\cdot q_k^n$$

是递推关系的通解，其中 $c_i(i=1, 2, \cdots, k)$是任意常数。

4．设递推关系式 $H(n)+a_1H(n-1)+\cdots+a_kH(n-k)=0$ 是一个常系数线性齐次递推关系，其特征方程的根为 $q_1, q_2, \cdots, q_t(t\leqslant k)$，且 q_i 是 e_i 重根$(i=1, 2, \cdots, t)$，则其通解为

$$\begin{aligned}H(n)=&(c_{11}+c_{12}n+\cdots+c_{1e_1}n^{e_1-1})\cdot q_1^n\\&+(c_{21}+c_{22}n+\cdots+c_{2e_2}\cdot n^{e_2-1})\cdot q_2^n\\&+\cdots\\&+(c_{t_1}+c_{t_2}n+\cdots+c_{te_t}\cdot n^{e_t-1})\cdot q_t^n\end{aligned}$$

其中 $c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1e_1}; c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2e_2}; \cdots, c_{t1}, c_{t2}, \cdots, c_{te_t}$ 为任意常数。

5．若递推关系 $H(n)+a_1H(n-1)+\cdots+a_kH(n-k)=f(n)$, $n\geqslant k$, $f(n)\neq 0$, $a_k\neq 0$，且 $a_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 都是常数，则称为**线性常系数非齐次递推关系**。

常系数线性非齐次递推关系的通解，等于它对应的齐次递推关系的通解加上非齐次递推关系的特解。

6．非齐次递推关系特解的求法

对于一般的非齐次项$f(n)$，求非齐次递推关系的特解没有一定的程式可循，只有当$f(n)$是某些特殊形式时，才有一些规范的求法。

(a) 当$f(n)$是n的 t 次多项式时，其特解也是同次的多项

式。可以设特解为

$$H^*(n)=P_0n^t+P_1n^{t-1}+\cdots+P_t$$

其中 $P_0, P_1, \cdots, P_t$ 是待定常数。

当特征方程有 m 重特征根 1 时，可以设特解为

$$H^*(n)=(P_0n^t+P_1n^{t-1}+\cdots+P_t)\cdot n^m$$

这里 $P_0, P_1, \cdots, P_t$ 为待定常数。

(b) 当 $f(n)$ 是 β^n 的形式时：

(i) 如果 β 不是特征方程的根，可以设特解为 $H^*(n)=P\cdot\beta^n$，其中 P 为待定常数。

(ii) 当 β 是特征方程的 m 重根时，这时可以设特解为

$$H^*(n)=(P_0n^m+P_1n^{m-1}+\cdots+P_m)\cdot\beta^n$$

其中 $P_0, P_1, \cdots, P_m$ 为待定常数。

5-2 高级计数数

1．满足递推关系式

$$\begin{cases}F_n=F_{n-1}+F_{n-2} & (n\geqslant 2)\\ F_1=1,\ F_2=1\end{cases}$$

的数列称为 Fibonacci 序列，序列中的数称为 Fibonacci 数，它是兔子问题(见题 5.6)的解。

2．满足递推关系式

$$\begin{cases}C(n)=C(1)\cdot C(n-1)+C(2)\cdot C(n-2)+\cdots\\ \qquad\quad +C(n-1)\cdot C(1) \quad n\geqslant 2\\ C(1)=1\end{cases}$$

的数列称为 Catalan 序列，序列中的数称为 Catalan 数，它是以下问题的解。(见题 5.24)

对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 插入足够多的括号，使得每对括号中恰有两个因子相乘，问有多少种插法？(不同乘法个数问题)。例如 $x_1x_2x_3x_4$ 有以下 5 种插法：

$$((x_1x_2)(x_3x_4)),\ (((x_1x_2)x_3)x_4),\ ((x_1(x_2x_3))x_4),$$
$$(x_1((x_2x_3)x_4)),\ (x_1(x_2(x_3x_4)))$$

注意 x_i 间的次序不允许变更，有

$$C(n)=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

3．满足递推关系

$$\begin{cases} S_1(n,\ r)=S_1(n-1,\ r-1)+(n-1)S_1(n-1,\ r) \\ S_1(n,\ 0)=0,\ S_1(n,\ n)=1 \end{cases}$$

的数组中的数称为第一类Stirling数。它是以下展开式中 x^r 项的系数(不计算正负号，见题3.4)：

$$\begin{aligned} & x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-n+1) \\ & \quad =S_1(n,\ n)x^n-S_1(n,\ n-1)x^{n-1}+\cdots\pm S_1(n,\ 0) \end{aligned}$$

4．满足递推关系

$$\begin{cases} S_2(n,\ r)=S_2(n-1,\ r-1)+rS_2(n-1,\ r) \\ S_2(n,\ 0)=0,\ S_2(n,\ n)=1 \end{cases}$$

的数组中的数称为第二类Stirling数。它是以下问题的解。(见题5.29)

划分 n 个元素的集合为 r 个子集(没有空子集)，求方法数。

5．定义Bell数为划分 n 个元素的集合为非空子集的方法个数，记作

$$B_n=S_2(n,\ 0)+S_2(n,\ 1)+S_2(n,\ 2)+\cdots+S_2(n,\ n)$$

题解及评注

5.1 解下列递推关系

(a) $\begin{cases} H(n)=4H(n-1)-4H(n-2) & n\geqslant 2, \\ H(0)=0,\ H(1)=1; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} H(n)=H(n-1)+9H(n-2)-9H(n-3) & n\geqslant 3, \\ H(0)=0,\ H(1)=1,\ H(2)=2。 \end{cases}$

解 (a) 特征方程为 $x^2-4x+4=0$。解得 $x_1=x_2=2$, 所以 $H(n)=(c_1+c_2n)\cdot 2^n$。代入初值得

$$\begin{cases} c_1=0 \\ (c_1+c_2)\cdot 2=1 \end{cases}$$

解得 $c_1=0$, $c_2=\frac{1}{2}$。所以有

$$H(n)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot 2^n=n\cdot 2^{n-1}$$

(b) 特征方程为 $x^3-x^2-9x+9=0$

解得 $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=-3$, 所以有

$$H(n)=c_1+c_2\cdot 3^n+c_3\cdot(-3)^n$$

代入初值得

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1+3c_2-3c_3=1 \\ c_1+9c_2+9c_3=2 \end{cases}$$

解得 $c_1=-\frac{1}{4}$, $c_2=\frac{1}{3}$, $c_3=-\frac{1}{12}$。所以

$$H(n)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot 3^n-\frac{1}{12}\cdot(-3)^n$$
$$=-\frac{1}{4}+3^{n-1}+\frac{1}{4}\cdot(-3)^{n-1}$$

5.2 解下列递推关系

(a) $\begin{cases} H(n)=(n+2)H(n-1) & n\geqslant 1, \\ H(0)=2; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} H(n)=H(n-1)-n+3 & n\geqslant 1, \\ H(0)=2。 \end{cases}$

解

(a) 用迭代法求解

$$
\begin{aligned}
H(n) &= (n+2)H(n-1) \\
&= (n+2)(n+1)H(n-2) \\
&\cdots\cdots \\
&= (n+2)(n+1)\cdots 3\cdot H(0) \\
&= (n+2)\cdot(n+1)\cdot\cdots 3\cdot 2 = (n+2)!
\end{aligned}
$$

(b) $H(1) = H(0) - 1 + 3 = 2 - 1 + 3$

$$= 4\left(= \frac{-1(1+1)}{2} + 3\times 1 + 2\right)$$

$$H(2) = H(1) - 2 + 3 = 4 - 2 + 3$$

$$= 5\left(= \frac{-2(1+2)}{2} + 3\times 2 + 2\right)$$

$$H(3) = H(2) - 3 + 3 = 5 - 3 + 3$$

$$= 5\left(= \frac{-3(1+3)}{2} + 3\times 3 + 2\right)$$

$$H(4) = H(3) - 4 + 3 = 5 - 4 + 3$$

$$= 4\left(= \frac{-4(1+4)}{2} + 3\times 4 + 2\right)$$

我们可以猜想出一般的公式为

$$H(n) = -\frac{n(1+n)}{2} + 3\times n + 2$$

下面我们将用归纳法证明以上猜想是正确的。

显然当 $n=1, 2, 3, 4$ 时结论成立。

设 $n=k$ 时结论成立，即有

$$H(k) = -\frac{k(1+k)}{2} + 3\times k + 2$$

当 $n=k+1$ 时有

$$
\begin{aligned}
H(k+1) &= H(k)-(k+1)+3 \\
&= -\frac{k(1+k)}{2}+3k+2-(k+1)+3 \\
&= -\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}+3\cdot(k+1)+2
\end{aligned}
$$

结论成立，所以对一切 $n\in N$ 有

$$H(n)=-\frac{n(1+n)}{2}+3n+2$$

评注　这两种方法在解递推关系中是经常使用的。后一方法是先根据递推关系算出前几项的值，然后由这些值之间所具有的规律猜想出一个一般的公式，最后用归纳法证明猜想的正确性。若所得的规律很明显，也可不作归纳证明。

5.3　解下列递推关系

$$
\begin{cases}
H(n)=H(n-1)+n^3 & n\geqslant 1 \\
H(0)=0
\end{cases}
$$

解　先利用递推关系反复进行迭代

$$
\begin{aligned}
H(n) &= H(n-1)+n^3 \\
&= H(n-2)+(n-1)^3+n^3 \\
&\cdots\cdots \\
&= H(0)+1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3 \\
&= 1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3
\end{aligned}
$$

观察到　$H(0)=0=0^2$

$$
\begin{aligned}
&H(1)=1=1^2=(1+0)^2 \\
&H(2)=1^3+2^3=9=(0+1+2)^2 \\
&H(3)=1^3+2^3+3^3=36=(0+1+2+3)^2 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

一般我们可以猜想出

$$H(n)=(0+1+2+\cdots+n)^2$$
$$=\left(\frac{n(1+n)}{2}\right)^2=\frac{n^2(1+n)^2}{4}$$

下面用归纳法证之。

显然 $n=0, 1, 2, 3$ 时结论为真。

假设 n 时结论为真，即 $H(n)=\dfrac{n^2(1+n)^2}{4}$ 成立。

考虑 $n+1$ 时

$$H(n+1)=H(n)+(n+1)^3$$
$$=\frac{n^2(1+n)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

结论成立，故对一切 $n\in N$ 有

$$H(n)=\frac{n^2(1+n)^2}{4}$$

评注 此方法是先用递推关系式反复进行迭代，从而得到一个级数和的形式，再对此和式估计出一个公式，最后用归纳法证明公式的正确性。这也是求解递推关系常用的方法。

5.4 解下列递推关系

(a) $\begin{cases} H(n)+5H(n-1)+6H(n-2)=3n^2 & n\geqslant 2, \\ H(0)=0, H(1)=1; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} H(n)+5H(n-1)+6H(n-2)=42\cdot 4^n & n\geqslant 2, \\ H(0)=0, H(1)=1; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} H(n)-5H(n-1)+6H(n-2)=3\cdot 2^n & n\geqslant 2, \\ H(0)=0, H(1)=1。 \end{cases}$

解 (a) 特征方程为 $x^2+5x+6=0$，解得 $x_1=-2, x_2=-3$，所以齐通解为

$$H'(n)=c_1(-2)^n+c_2(-3)^n$$

设其特解为 $\quad H^*(n)=P_1n^2+P_0n+P_2$

其中 P_0, P_1, P_2 为待定常数，以此代入递推关系得

$$(P_0n^2+P_1n+P_2)+5[P_0(n-1)^2+P_1(n-1)+P_2]$$
$$+6[P_0(n-2)^2+P_1(n-2)+P_2]=3n^2$$

整理后得

$$12P_0n^2+(-34P_0+12P_1)n+(29P_0-17P_1+12P_2)=3n^2$$

等式两边比较系数后得

$$\begin{cases}12P_0=3\\34P_0-12P_1=0\\29P_0-17P_1+12P_2=0\end{cases}$$

解得 $P_0=\frac{1}{4}$, $P_1=\frac{17}{24}$, $P_2=\frac{115}{288}$。所以

$$H^*(n)=\frac{1}{4}n^2+\frac{17}{24}n+\frac{115}{288}$$

从而有

$$H(n)=H'(n)+H^*(n)$$
$$=c_1(-2)^n+c_2(-3)^n+\frac{1}{4}n^2+\frac{17}{24}n+\frac{115}{288}$$

代入初值得 $\begin{cases}c_1+c_2+\frac{115}{288}=0\\-2c_1-3c_2+\frac{1}{4}+\frac{17}{24}+\frac{115}{288}=1\end{cases}$

解得 $c_1=-\frac{14}{9}$, $c_2=\frac{37}{32}$。所以有

$$H(n)=-\frac{14}{9}(-2)^n+\frac{37}{32}(-3)^n+\frac{1}{4}n^2+\frac{17}{24}n+\frac{115}{288}$$

(b) 特征方程为 $x^2+5x+6=0$，解得 $x_1=-2$, $x_2=-3$。因为 4 不是特征方程的根，所以可以设特解 $H^*(n)=P\cdot 4^n$，以此代入递推关系得

$$P\cdot 4^n+5P\cdot 4^{n-1}+6P\cdot 4^{n-2}=42\cdot 4^n$$

$$42P=42\cdot16, \quad \therefore \quad P=16$$

由此 $H^*(n)=16\cdot4^n$，从而通解为

$$H(n)=c_1\cdot(-2)^n+c_2(-3)^n+16\cdot4^n$$

代入初值得 $\begin{cases} c_1+c_2+16=0 \\ -2c_1-3c_2+64=1 \end{cases}$

解得 $c_1=-111$，$c_2=95$。所以有

$$H(n)=-111\cdot(-2)^n+95(-3)^n+16\cdot4^n$$

(c) 特征方程为 $x^2-5x+6=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=3$。因为 2 是特征方程的根，故设其特解为 $H^*(n)=(P_1n+P_2)\cdot2^n$，以此代入递推关系得

$$(P_1n+P_2)\cdot2^n-5[P_1(n-1)+P_2]\cdot2^{n-1}$$
$$+6[P_1(n-2)+P_2]\cdot2^{n-2}=3\cdot2^n$$

整理后得 $-2P_1=12$，$P_1=-6$。P_2 可取任意值，现取 $P_2=0$，所以 $H^*(n)=-6n\cdot2^n$。从而通解为

$$H(n)=c_1\cdot2^n+c_2\cdot3^n-6n\cdot2^n$$

代入初值得 $\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 2c_1+3c_2-12=1 \end{cases}$

解得 $c_1=-13$，$c_2=13$。所以有

$$H(n)=-13\cdot2^n+13\cdot3^n-6n\cdot2^n$$

评注 通过以上各题，读者可以看到利用特征方程解线性递推关系的一般方法。

5.5 解下列递推关系

(a) $\begin{cases} a_r^2-2a_{r-1}^2=1 \quad r\geqslant1, \\ a_0=2; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} r\cdot a_r+(r-1)\cdot a_{r-1}=2^r \quad r\geqslant1, \\ a_0=273; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} a_r - r a_{r-1} = r! & r \geqslant 1, \\ a_0 = 2。 \end{cases}$

解

(a) 令 $b_r = a_r^2$, 递推关系变成

$$\begin{cases} b_r - 2b_{r-1} = 1 \\ b_0 = 4 \end{cases}$$

解得 $b_r = 5 \cdot 2^r - 1$, 所以 $a_r = \sqrt{5 \cdot 2^r - 1}$。

(b) 令 $b_r = r \cdot a_r$, 递推关系变成

$$\begin{cases} b_r + b_{r-1} = 2^r \\ b_0 = 0 \end{cases}$$

解得 $b_r = \frac{2}{3}[(-1)^{r+1} + 2^r]$, 所以有

$$\begin{cases} a_r = \frac{2}{3r}[(-1)^{r+1} + 2^r] & r \geqslant 1 \\ a_0 = 273 \end{cases}$$

(c) 令 $b_r = a_r / r!$, 递推关系变成

$$\begin{cases} b_r - b_{r-1} = 1 & r \geqslant 1 \\ b_0 = 2 \end{cases}$$

解得 $b_r = r + 2$, 从而 $a_r = r!(r+2)$。

评注 通过本题可以看到，对于某些特殊的非线性递推关系，我们可以通过适当的变换，把它变成线性递推关系来解。

5.6 兔子问题(Fibonacci)

在一年开始之际买来一对新兔放入围栏中，每月每对中的母兔生出一对新的性别不同的兔子，满二个月后的每对新兔每月也生出一对兔子，问一年以后围栏中有多少对兔子?

解 设第 n 个月初时围栏中的兔子有 F_n 对。我们可以把 F_n 分成两部分，一部份是第 $n-1$ 个月初时已经在围栏中的兔

子，有 F_{n-1} 对；另一部份是第 n 个月初出生的小兔，有 F_{n-2} 对（因为第 $n-2$ 个月初在围栏中的兔子到第 n 个月初时，每对兔子都能生一对小兔）。于是得关系式

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \quad (n\geqslant 3) \qquad (*)$$

显然有 $F_1=1$，$F_2=1$。现在是求 F_{13}，我们可以根据(*)式及初始值 $F_1=F_2=1$ 逐步进行迭代，最后求出 $F_{13}=233$，即一年后围栏中有兔子 233 对。

因为(*)式是常系数线性齐次递推关系，所以也可以用求特征根的方法求得

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

以 $n=13$ 代入也可以算得 $F_{13}=233$。

评注 上边已指出，这里的 F_n 称为第 n 个斐波那契(Fibonacci)数，它们很少真正用来表达兔子的繁殖规律（因为不可能有永远不死的兔子），这只不过是一种数学模型的形象表达，它们在数学上十分重要，许多计数问题都会归结为求 Fibonacci 数。

5.7 设 F_n 表示第 n 个 Fibonacci 数，证明下列各恒等式。

(a) $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$；

(b) $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$；

(c) $F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$；

(d) $F_1-F_2+F_3-F_4+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n}=1-F_{2n-1}$；

(e) $F_3+F_6+F_9+\cdots+F_{3n}=\frac{1}{2}(F_{3n+2}-1)$；

(f) $F_1\cdot F_2+F_2\cdot F_3+F_3\cdot F_4+\cdots+F_{2n-1}\cdot F_{2n}=F_{2n}^2$；

(g) $n\cdot F_1+(n-1)F_2+(n-2)F_3+\cdots+2F_{n-1}+F_n$
$=F_{n+4}-(n+3)$。

证

(a) $\because \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$\therefore \quad F_1 = F_3 - F_2$

$F_2 = F_4 - F_3$

……

$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$

把这些等式相加得

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

(b) 由 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 得 $F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$，利用 $F_1 = F_2 = 1$ 仿照(a)的证法而得。

(c) 由(a)－(b)，即得(c)。

(d) 由(b)－(c)，利用 $F_{2n+1} = F_{2n-1} + F_{2n}$，即可得证。

(e) 由(a)得

$$F_{3n+2} - 1 = F_1 + F_2 + \cdots + F_{3n}$$
$$= 2(F_3 + F_6 + \cdots + F_{3n})$$

所以 $$F_3 + F_6 + \cdots + F_{3n} = \frac{1}{2}(F_{3n+2} - 1)$$

(f) 定义 $F_0 = 0$，并注意到 $F_2 = F_1 + F_0$ 可得

$$F_{2n-2} \cdot F_{2n-1} + F_{2n-1} \cdot F_{2n}$$
$$= F_{2n-2} \cdot (F_{2n} - F_{2n-2}) + (F_{2n} - F_{2n-2}) \cdot F_{2n}$$
$$= F_{2n}^2 - F_{2n-2}^2 \quad (n \geqslant 1)$$

因此有 $F_0 \cdot F_1 + F_1 \cdot F_2 = F_2^2 - F_0^2$

$F_2 \cdot F_3 + F_3 \cdot F_4 = F_4^2 - F_2^2$

……

$F_{2n-2} \cdot F_{2n-1} + F_{2n-1} \cdot F_{2n} = F_{2n}^2 - F_{2n-2}^2$

将上述各式相加并应用 $F_0 = 0$ 即得

$$F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot F_3 + \cdots + F_{2n-1} \cdot F_{2n} = F_{2n}^2$$

(g) 对 n 进行归纳证明即得。

评注 通过本题和下面的几题可以看出，Fibonacci 数具有许多奇妙的性质。

5.8 证明 逢 5 的 Fibonacci 数(即 F_{5k}, $k=0,1,2,\cdots$)是 5 的倍数。

证 对 k 进行归纳

$k=0$ 时，$F_{5k}=F_0=0$ 是 5 的倍数。

设 $k-1$ 时结论成立，即 $F_{5(k-1)}$ 是 5 的倍数。则当 k 时，

$$\begin{aligned}F_{5k}&=F_{5k-1}+F_{5k-2}\\&=F_{5k-2}+2F_{5k-3}+F_{5k-4}\\&=3F_{5k-3}+2F_{5k-4}\\&=5F_{5k-4}+3F_{5k-5}\\&=5F_{5k-4}+3F_{5(k-1)}\end{aligned}$$

$5F_{5k-4}$ 是 5 的倍数，由归纳假设 $F_{5(k-1)}$ 是 5 的倍数，所以 F_{5k} 是 5 的倍数。

故对一切 $k\in N$, F_{5k} 是 5 的倍数。

5.9 证明 $F_{n+m}=F_m\cdot F_{n+1}+F_{m-1}\cdot F_n$, 由此而证明 F_{an} 是 F_n 的倍数。

证 固定 n 用第二归纳原理对 m 进行归纳即可证得

$$F_{n+m}=F_m\cdot F_{n+1}+F_{m-1}\cdot F_n$$

利用上式并用第一归纳原理对 a 进行归纳即可证得 F_{an} 是 F_n 的倍数。

5.10 证明

(a) $F_{n-1}^2+F_n^2=F_{2n-1}$;

(b) $F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=F_{2n}$。

证 (a) 利用上题的 $F_{n+m}=F_m\cdot F_{n+1}+F_{m-1}\cdot F_n$ 即得

$$F_{2n-1}=F_{n+(n-1)}=F_n\cdot F_n+F_{n-1}\cdot F_{n-1}=F_n^2+F_{n-1}^2$$

(b) 类似(a)，

$$
\begin{aligned}
F_{2n}=F_{n+n}&=F_n\cdot F_{n+1}+F_{n-1}\cdot F_n\\
&=(F_{n+1}-F_{n-1})F_{n+1}+F_{n-1}\cdot(F_{n+1}-F_{n-1})\\
&=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2
\end{aligned}
$$

5.11 证明 $F_n\cdot F_{n+1}-F_{n-1}\cdot F_{n-2}=F_{2n-1}$。

证 由上题的(a)知

$$
\begin{aligned}
F_{2n-1}=F_{n-1}^2+F_n^2&=F_n\cdot(F_{n+1}-F_{n-1})+F_{n-1}^2\\
&=F_n\cdot F_{n+1}-F_{n-1}\cdot(F_n-F_{n-1})\\
&=F_n\cdot F_{n+1}-F_{n-1}\cdot F_{n-2}
\end{aligned}
$$

5.12 证明 $F_n^3+F_{n+1}^3-F_{n-1}^3=F_{3n}$。

证 由题5.9知

$$F_{3n}=F_{n+2n}=F_{2n}\cdot F_{n+1}+F_{2n-1}\cdot F_n \tag{*}$$

又由题5.10知

$$
\begin{cases}
F_{2n-1}=F_{n-1}^2+F_n^2\\
F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2
\end{cases}
$$

以此式代入(*)式得

$$
\begin{aligned}
F_{3n}&=(F_{n+1}^2-F_{n-1}^2)\cdot F_{n+1}+(F_{n-1}^2+F_n^2)\cdot F_n\\
&=F_{n+1}^3-F_{n-1}^2\cdot F_{n+1}+F_{n-1}^2\cdot F_n+F_n^3\\
&=F_{n+1}^3-F_{n-1}^2\cdot(F_n+F_{n-1})+F_{n-1}^2\cdot F_n+F_n^3\\
&=F_{n+1}^3-F_{n-1}^3+F_n^3
\end{aligned}
$$

5.13 证明 $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots=F_{n+1}$。

证 定义 $g(n)=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots+\binom{n-k}{k}$，

这里 $k=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，$n\geqslant 0$。当整数 $p>n$ 时 $\binom{n}{p}=0$，所以上式能写

成

$$g(n)=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots+\binom{0}{n}$$

下面将证明对所有的 $n\geqslant0$ 有 $F_{n+1}=g(n)$。

为了证明这一点，我们将证明 $F_1=g(0)$，$F_2=g(1)$，并且 $g(n)$满足递推关系式

$$g(n)=g(n-1)+g(n-2)$$

首先，$g(0)=\binom{0}{0}=1=F_1$；$g(1)=\binom{1}{0}=1=F_2$。

再对 $n\geqslant2$ 应用 Pascal 公式得

$$\begin{aligned}
&g(n-1)+g(n-2)\\
&=\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{0}{n-1}\right]\\
&\quad+\left[\binom{n-2}{0}+\binom{n-3}{1}+\binom{n-4}{2}+\cdots+\binom{0}{n-2}\right]\\
&=\binom{n-1}{0}+\left[\binom{n-2}{1}+\binom{n-2}{0}\right]+\left[\binom{n-3}{2}+\binom{n-3}{1}\right]\\
&\quad+\cdots+\left[\binom{0}{n-1}+\binom{0}{n-2}\right]\\
&=\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots+\binom{1}{n-1}\\
&=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots+\binom{1}{n-1}+\binom{0}{n}\\
&=g(n)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots=F_{n+1}$$

评注 从这题我们看到 Fibonacci 数同二项式系数之间有

着密切的关系。这不是仅有的现象，本章中所有高级计数数彼此间都存在着一定的联系。

5.14 (a)证明每一个正整数可以写成不同的斐波那契数的和。

(b) 证明如果我们禁用任何一个 Fibonacci 数，那么我们仍然可以将正整数 n 表达成其它的不同的 Fibonacci 数的和。

证 为方便叙述，假定 n 的表达式中不同的 Fibonacci 数已按足标从小到大排序。

现介绍两种操作。

A 操作 若 n 的表达式中含有由相继 Fibonacci 数组成的一段，即

$$n=\cdots+F_i+F_{i+1}+F_{i+2}+\cdots+F_{j-1}+F_j+\cdots$$

而式中不含 F_{j+1}，则我们可以

用 F_{j+1} 代替 F_j, F_{j-1}

用 F_{j-1} 代替 F_{j-2}, F_{j-3}

……

如果这一段含有奇数个项，那末用 F_{i+3} 代替 F_{i+2}, F_{i+1} 后结束；如果这一段含有偶数个项，那末用 F_{i+2} 代替 F_{i+1}, F_i 后结束。我们把这样的代换称为 A 操作，经 A 操作后，n 仍表达成不同的 Fibonacci 数之和，但和式中已不含 F_i 和 F_{i+1} 或仅不含 F_{i+1}。

B 操作 若 n 的表达式中含有由相间 Fibonacci 数组成的一段，即

$$n=\cdots F_i+F_{i+2}+F_{i+4}+\cdots+F_{j-2}+F_j+\cdots$$

而式中不存在 F_{j+1}，也不存在 F_{i-1} 和 F_{i-2}，或者不存在 F_{j+1} 但存在 F_{i-1}，我们可以分情况处理。

(1) 式中不存在 F_{j+1} 但存在 F_{i-1} 时，我们可以

用 F_{i+1} 代替 F_i, F_{i-1}

用 F_{i+3} 代替 F_{i+1}, F_{i+2}

……

用 F_{j+1} 代替 F_{j-1}, F_j

(2) 式中不存在 F_{j+1} 也不存在 F_{i-1} 和 F_{i-2} 时，我们可以用 F_{i-1}, F_{i-2} 代替 F_i($i=2$ 时仍用 F_1 代替 F_2)

用 F_i, F_{i+1} 代替 F_{i+2}

……

用 F_{j-2}, F_{j-1} 代替 F_j

我们把这样的替换称为 B 操作。经过 B 操作后，n 仍表达成不同的 Fibonacci 数之和，但 F_j 已在和式中消失。

(a) 对 n 作归纳

$n=1$ 时，$1=F_1$，结论成立。

$n=2$ 时，$2=F_1+F_2$，结论成立。

设 $n\geqslant 2$ 时结论成立，即 n 可写成不同的 Fibonacci 数之和，现证 $n+1$ 也成立。

若 n 的表达式中不含 F_1 或 F_2，则在 n 的表达式中加入所缺的 F_1(或 F_2)，便得 $n+1$ 的表达式。

若 n 的表达式中含有 F_1 和 F_2，我们对由相继项组成的 $F_1+F_2+\cdots+F_i$ 这一段进行 A 操作，可得出不含 F_1 或 F_2 的 n 表达式，再加上所缺的 F_1(或 F_2)，便得出 $n+1$ 的表达式。

根据归纳原理，所以对一切正整数 n，均可表达成不同的 Fibonacci 数之和。

(b) 设 n 已表示成不同的 Fibonacci 数之和，且禁用的 F_j 在和式中，现要证明不用 F_j，n 仍能表示成不同的 Fibonacci 数之和。

若 F_{j-1}, F_{j-2} 不含在和式中，则用 F_{j-1}, F_{j-2} 代替 F_j 即

达目的。

若不然，有两种可能：

(1) F_{j-1} 存在。我们可对由相继组成的 $F_{j-1}+F_j+\cdots+F_k$ 这一段进行 A 操作，使 F_j 项消失。

(2) F_{j-1} 不存在但 F_{j-2} 存在，此时又分两种情况。(i) F_{j+1} 存在。我们可对由相继项组成的 $F_j+F_{j+1}+\cdots+F_k$ 这一段进行 A 操作，若这一段由偶数组成，则操作后 F_j 可消失，否则可使 F_{j+1} 消失，然后按(ii)处理。(ii) F_{j+1} 不存在。我们可对由相间项组成的 $F_i+F_{i+2}+\cdots+F_{j-2}+F_j$ 一段进行 B 操作，操作后和式中 F_j 已不存在。

所有情况都已讨论，所以(b)部分得证。

5.15 Fibonacci 数的个位数字形成一个序列，写出该序列并证明该序列 60 项以后重复。

解 设第 n 个 Fibonacci 数的个位数是 u_n，显然 $u_n\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，所以 $u_n=F_n(\bmod 10)$。而

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},$$

所以 $u_n=u_{n-1}+_{10}u_{n-2}$（$+_{10}$ 表示模 10 加法），把 $u_0, u_1, \cdots, u_{60}$分别列出为

1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5,
6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5,
1, 6, 7, 3, 0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0

可得出$u_{61}=1=u_1$, $u_{62}=1=u_2$，由递推关系 $u_n=u_{n-1}+_{10}u_{n-2}$ 知，序列的后继部分必将重复以上各数。

5.16 考虑一个 $1\times n$ 的棋盘，假定我们给棋盘的每一方块染上红或蓝色之一，对 $n=1, 2, 3, \cdots$，设 $g(n)$ 表示没有两块染红色的方块邻接的这样染色方式的个数。找出并证实 $g(n)$ 所满足的递推关系，然后求出 $g(n)$ 的公式。

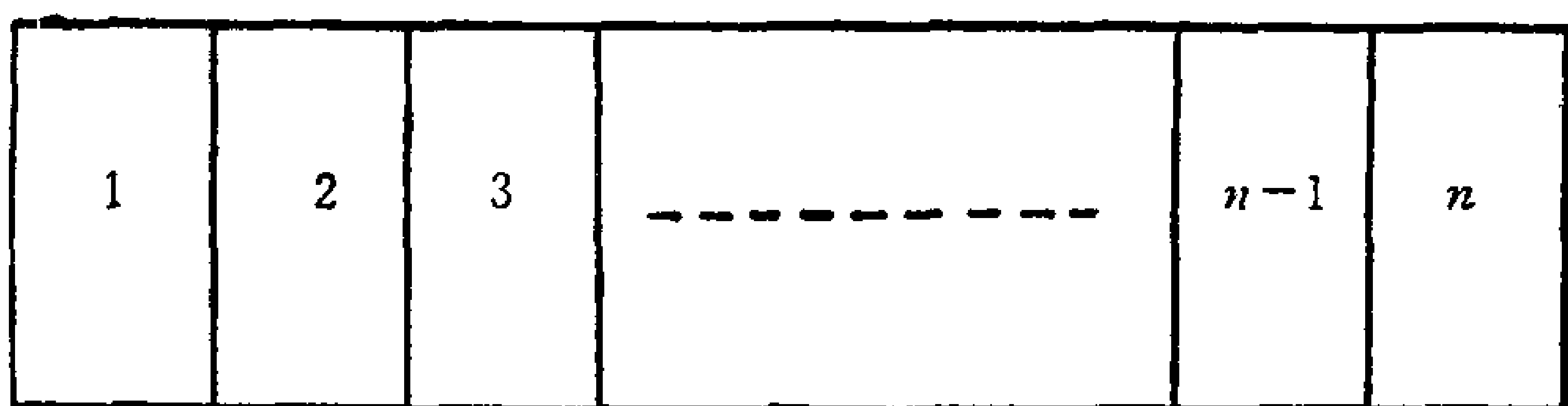


图 5.1

解 $1\times n$ 棋盘如图 5.1 所示。

对于 1 的染色有下面二种可能：(1) 1 染上红色，这时 2 只能染蓝色，余下的是 $1\times(n-2)$ 棋盘，它所满足条件的染色方式的个数为 $g(n-2)$。(2) 1 染上蓝色，这时剩下的是 $1\times(n-1)$ 棋盘，它所满足条件的不同的染色方式数为 $g(n-1)$。由加法原理得

$$g(n)=g(n-1)+g(n-2)$$

显然 $g(1)=2$，$g(2)=3$。因为 $g(1)=F_3$，$g(2)=F_4$，且 $g(n)$ 和 F_n 满足同样的递推关系，所以有 $g(n)=F_{n+2}$。而

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

所以有 $$g(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

5.17 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的一个子集称为交替的，如果我们按上升次序列出它的元素时，它们是奇、偶、奇、偶……。例如 $\{1, 4, 7, 8\}$ 和 $\{3, 4, 11\}$ 都是交替的。空集也算作是交替的，但 $\{2, 3, 4, 5\}$ 就不是，因为它开始是一个偶数。令 $f(n)$ 表示交替子集的数目。证明

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

利用这一点证明 $f(n)=F_{n+2}$。

证 显然 $f(1)=2$，它的交替子集为 $\{1\}$，$\varnothing$。$f(2)=3$，它

的交替子集为 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$。

$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的所有子集可以分为两部份，一部份为 $\{1, 2, 3, \cdots, n-1\}$ 的所有子集，另一部份是由 $\{1, 2, 3, \cdots, n-1\}$ 的每一个子集中加进元素 n 以后所得到的子集。(例如若 $n=4$, 则 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的所有子集为 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$。前面 8 个子集是 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集，而后面的 8 个子集是前面的 8 个子集中加进元素 4 以后得到的子集)。第一部份的交替子集数为 $f(n-1)$, 第二部份中的交替子集正好同 $\{1, 2, \cdots, n-2\}$ 的交替子集是对应的。(例如 $\{1, 2\}$ 的交替子集是 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, 它对应着 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的后 8 个子集中的交替子集 $\{3, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$)。所以第二部份中的交替子集数为 $f(n-2)$。由加法原理得

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

同前题一样，我们可得 $f(n)=F_{n+2}$。

5.18 解方程 $f(x)=0$ 的试位法是这样的，首先给出两个近似解 x_0 和 x_1, 并且由公式

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}\cdot f(x_n)-x_n\cdot f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

逐次得到更好的近似解 x_2, x_3, $\cdots$。证明如果我们开始有函数 $f(x)=x^2$, 以及初值 $x_0=1$ 和 $x_1=\frac{1}{2}$, 那么，我们得到

$$x_n=\frac{1}{F_{n+2}}$$

证　因为 $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}\cdot f(x_n)-x_n\cdot f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$ 且 $f(x)=x^2$

$$\therefore \quad x_n=\frac{x_{n-2}\cdot x_{n-1}^2-x_{n-1}\cdot x_{n-2}^2}{x_{n-1}^2-x_{n-2}^2}=\frac{x_{n-1}\cdot x_{n-2}}{x_{n-1}+x_{n-2}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x_n}=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{x_{n-1}\cdot x_{n-2}}=\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n-2}}$$

设 $\frac{1}{x_n}=f(n)$，则有 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$，且 $f(0)=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{1}=1$，$f(1)=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$，而 Fobinacci 数满足 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，且 $F_0=0$，$F_1=1$，同上两题一样，我们可得 $f(n)=F_{n+2}$，即 $x_n=\frac{1}{F_{n+2}}$。

5.19 有 n 级台阶，某人从下向上走，若每次只能跨一级或两级，问他从地面走到第 n 级有多少种不同的方法？

解 设按此种方式走 n 级台阶的方法数为 $h(n)$ 种。若第一次走一级，则余下的 $n-1$ 级有 $h(n-1)$ 种走法。若第一次走二级，则余下的 $n-2$ 级有 $h(n-2)$ 种走法。由加法原理得

$$h(n)=h(n-1)+h(n-2)$$

显然有 $h(1)=1$，$h(2)=2$。

因为 Fibonacci 数 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，且 $F_1=1$，$F_2=1$，所以有 $h(n)=F_{n+1}$。

5.20 有多少个长度为 n 的 0 与 1 的串，在这些串中，既不包含子串 010，也不包含子串 101？例如，对于 $n=4$，有 10 个这样的串

0000	1111
0001	1110
0011	1100
0110	1001
0111	1000

解 设长度为 n 而满足条件的串有 $f(n)$ 个，它们可分成两类：

(1) 最后两位相同。此种串可由长为 $n-1$ 而满足条件的串 a 加与 a 末位相同的数字构成，例如：001→0011，此种串共有 $f(n-1)$ 个。

(2) 最后两位不同。此种串可由长为 $n-2$ 的满足条件的串 a，加与 a 末位先同而后异的两个数字构成，例如：01→0110，此种串共有 $f(n-2)$ 个。于是我们有

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

显然有 $f(1)=2$，$f(2)=4$。解得

$$f(n)=\frac{5+\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

5.21 (a) 设 $f(n,k)$ 是从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中能够选择的没有两个连续整数的 k 元素子集的数目，试建立它满足的递推关系。

(b) 应用(a)证明 $f(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$。

(c) 应用(b)证明 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的子集总数是 F_{n+2}，而这些子集中不包含两个连续整数。

解 (a) 对元素 n 来说，不外乎两种情况：(1) n 被选进某一 k 元素子集。(2) n 没有选进任一 k 元素子集。若是(1)，则 $n-1$ 就不能选进这一 k 元素子集，故其余的 $k-1$ 个元素得从 $\{1,2,3,\cdots,n-2\}$ 中去选取，所以有 $f(n-2,k-1)$ 种选法。若是(2)，k 元素子集中的 k 个数可以从 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中去选取，故有 $f(n-1,k)$ 种选法。由加法原理得

$$f(n,k)=f(n-2,k-1)+f(n-1,k)$$

(b) 利用 (a) 中的递推关系式对 n 进行归纳证明。

我们规定$f(0, 0)=1$, $f(0, k)=0(k\neq 0)$。

显然有$f(1, 0)=1$, $f(1, 1)=1$。

当 $n=2$ 时,

$$f(2, k)=f(0, k-1)+f(1, k)$$

这时当 $k=0$ 时,

$$f(2, 0)=f(0, -1)+f(1, 0)=0+1=1$$

当 $k=1$ 时,

$$f(2, 1)=f(0, 0)+f(1, 1)=1+1=2$$

而对于$\binom{n-k+1}{k}$, 当 $k=0$ 时,

$$\binom{2-0+1}{0}=1$$

当 $k=1$ 时,

$$\binom{2-1+1}{1}=\binom{2}{1}=2$$

所以有

$$f(2, k)=\binom{2-k+1}{k}$$

设当小于n时结论成立,即对 $k\leqslant n-1$ 有

$$f(n-1, k)=\binom{n-1-k+1}{k}=\binom{n-k}{k}$$

$$f(n-2, k-1)=\binom{n-2-(k-1)+1}{k-1}=\binom{n-k}{k-1}$$

则当 n 时,

$$\begin{aligned}f(n, k)&=f(n-2, k-1)+f(n-1, k)\\&=\binom{n-k}{k-1}+\binom{n-k}{k}=\binom{n-k+1}{k}\end{aligned}$$

所以对一切 $n\in I_+$ 有

$$f(n,\ k)=\binom{n-k+1}{k}$$

(c) $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的没有两个连续整数出现的子集的总数为 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+1}{k}=\binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+\cdots$，而 $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots=F_{n+1}$（详见题 5.13），所以有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-k+1}{k}=F_{n+2}$$

评注 我们可以从另一角度来给出(b)的证明。

因为 $f(n,\ k)$ 是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的没有两个连续整数的 k 元素子集的数目。先在 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 中任取 k 个不相邻元素构成组合 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$，我们总可以假设 $a_1<a_2<\cdots<a_k$，从它们分别减去 0，1，2，…，$k-1$ 得到数列 $a_1,\ a_2-1,\ a_3-2,\ \cdots,\ a_k-(k-1)$。因为原组合不取相邻元素，故数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ 的每后一项至少比前一项多 2，故数列 $a_1,\ a_2-1,\ a_3-2,\ \cdots,\ a_k-(k-1)$ 也是严格递增的，且

$$1\leqslant a_1,\quad [a_k-(k-1)]\leqslant n-k+1$$

所以所求组合数为从 1 至 $n-k+1$ 的 $n-k+1$ 个数中任取 k 个的组合数 $\binom{n-k+1}{k}$，即有 $f(n,\ k)=\binom{n-k+1}{k}$。若 $n+1<2k$，则符合条件的组合数不存在。

5.22 令 $g(n,\ k)$ 是从排成一个圆圈的 n 个对象中选取 k 个对象，使其中没有二个是相邻的方法数。

(a) 证明 $g(n,\ k)=f(n-1,\ k)+f(n-3,\ k-1)$（即上题的 f）。

(b) 证明$g(n, k)=\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$。

证 (a) 本题除要考虑第1个对象与第n个对象是相邻的以外，其推导方法与上题的(a)相同。

(b) 只须将上题(b)中的结论代入本题中的(a)即可得到结果。

5.23 (a) 设$f_r(n, k)$是能够从集合$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$中选出的，两两之差均大于r的k元素子集的数目，试建立它满足的递推关系。

(b) 证明 $f_r(n, k)=\binom{n-rk+r}{k}$, $n+r\geqslant k(r+1)$。

解 (a) 对元素n来说，不外乎两种情况：(1)n被选进某个k元素子集。(2)n没有选进任一k元素子集。若是(1)，则$n-1, n-2, \cdots, n-r$均不能选进这一k元素子集，故其余的$k-1$个元素得从$\{1, 2, 3, \cdots, n-r-1\}$中去选取，有$f_r(n-r-1, k-1)$种选法。对于(2)，$k$元素子集中的$k$个数可以从$\{1, 2, 3, \cdots, n-1\}$中去选取，有$f_r(n-1, k)$种选法。由加法原理得

$$f_r(n, k)=f_r(n-r-1, k-1)+f_r(n-1, k)$$

(b) 在$\{1, 2, \cdots, n\}$中任取k个两两之差超过r的数构成组合$a_1, a_2, \cdots, a_k$，不妨设$a_1<a_2<\cdots<a_k$，显然数列中每后一项比前一项至少多$r+1$。在原数列上分别减去$0, r, 2r, \cdots, r(k-1)$得数列$a_1, a_2-r, a_3-2r, \cdots, a_k-(k-1)r$是一严格递增的，$a_1\geqslant 1$, $a_{k-r(k-1)}\leqslant n-r(k-1)$。所以所求组合数是从$n-r(k-1)$个不同的数中选取$k$个的组合数，故为

$$\binom{n-r(k-1)}{k}$$

即有
$$f_r(n, k)=\binom{n-rk+r}{k}$$

评注 题5.21是本题的特殊情况。

5.24 (a) 给定 n 个实数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，可以用多少种不同的方式来构成它们的积？

(b) 假如在 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的乘积中，数的次序保持不变，即$a_1\times(a_2\times a_3)$是符合要求的乘积，但$(a_2\times a_1)\times a_3$不符合要求。又可以用多少种不同的方式来构成它们的乘积？

解 (a) 令 $H(n)$ 表示 n 个实数构成积的方式个数。则

$H(1)=1$

$H(2)=2$，即 $a_1\times a_2$, $a_2\times a_1$

$H(3)=12$，即 $a_1\times(a_2\times a_3)$, $a_2\times(a_1\times a_3)$, $a_3\times(a_1\times a_2)$

$a_1\times(a_3\times a_2)$, $a_2\times(a_3\times a_1)$, $a_3\times(a_2\times a_1)$

$(a_2\times a_3)\times a_1$, $(a_1\times a_3)\times a_2$, $(a_1\times a_2)\times a_3$

$(a_3\times a_2)\times a_1$, $(a_3\times a_1)\times a_2$, $(a_2\times a_1)\times a_3$

实际上 $H(3)$ 可以由 $H(2)$ 确定，先从数 a_1, a_2, a_3 中选二个乘起来，每一列就对应于一种选择，共有 $\binom{3}{2}$ 种选法。对应于每一种选择，又有 $H(2)$ 种相乘的方式，而对应于每种方式，第三个数可以乘在左边，也可以乘在右边，所以共有

$$H(3)=2\cdot H(2)\cdot\binom{3}{2}=2\times3\times2=12$$

种方式。

现在考虑 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的相乘方式个数 $H(n)$。设 $n-1$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的乘积已构成，有 $H(n-1)$ 种方式。取其中的任一个，这个积由 $n-2$ 次相乘得到的，对于其中的某一次相乘的两个因式，把 a_n 乘到一个因式的左和右，或乘到另

一个因式的左和右，这说明有 4 种添加 a_n 的方法。所以对于任一个 $n-1$ 个数的乘积，这样加入 a_n 的方法共有 $4(n-2)$ 种。此外，还可以把 a_n 分别加在整个 $n-1$ 个数的积的左边或右边。所以可以用 $4(n-2)+2$ 种方法从任一个 $n-1$ 个数的乘积形成 n 个数的积。故有

$$H(n)=(4n-6)H(n-1) \quad n\geqslant 2$$

下面迭代此关系式

$$\begin{aligned}H(n)&=(4n-6)H(n-1)\\&=(4n-6)[4(n-1)-6]H(n-2)\\&=(4n-6)(4n-10)H(n-2)\\&\cdots\cdots\\&=(4n-6)(4n-10)\cdots6\times2\times H(1)\\&=(4n-6)(4n-10)\cdots6\times2\\&=2^{n-1}[(2n-3)(2n-5)\cdots3\times1]\\&=2^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\\&=2^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\\&=(n-1)!\binom{2n-2}{n-1} \quad n\geqslant 2\end{aligned}$$

因为当 $n=1$ 时上式为 1，所以有

$$H(n)=(n-1)!\binom{2n-2}{n-1} \quad n\geqslant 1$$

(b) 我们假设 $C(n)$ 表示能够保持次序的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的乘积个数，那末有 $C(n)=\frac{1}{n!}H(n)$，所以有

$$C(n)=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

这里的 $C(n)$ 前已指出是 Catalan 数。

5.25 一个 n 边形的一个对角线三角剖分是插入不在内部相交的对角线，以划分区域为三角形的划分，求凸 n 边形的三角形剖分数。

解 设凸 n 边形的三角形剖分数为 T_n，并定义 $T_2=1$。

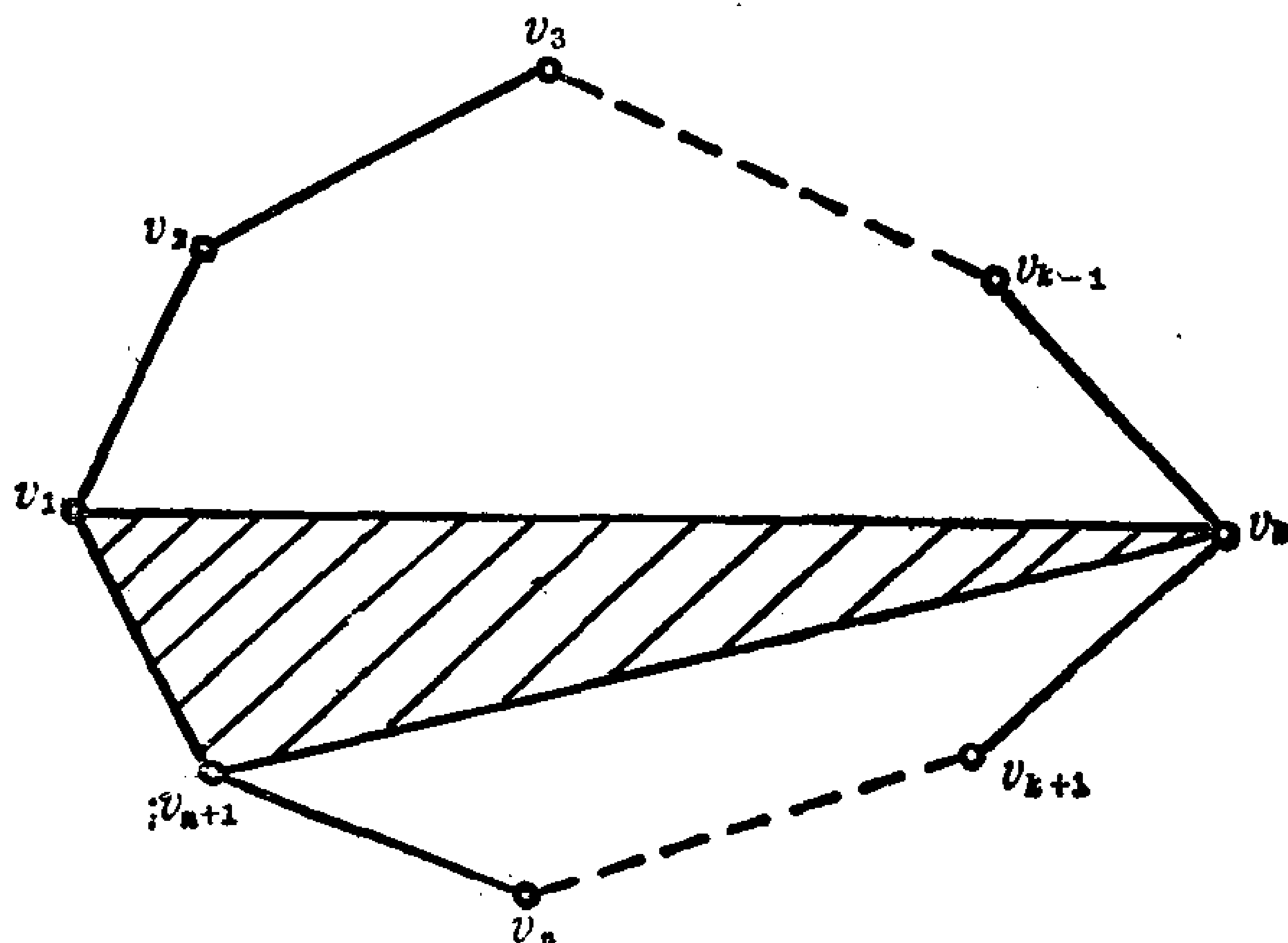


图 5.2

让我们先来研究凸 $n+1$ 边形的三角形剖分。设此凸 $n+1$ 边形的顶点分别为 $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}$，如图 5.2 所示。我们从中任取一边作为基底，不妨设为 v_1v_{n+1}。任取一顶点 $v_k(k=2, 3, \cdots, n)$ 作三角形 $v_1v_kv_{n+1}$，它分凸多边形为二个较小的图，一个是 k 边形，它的顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_k$；另一个是 $(n-k+2)$ 边形，它的顶点为 $v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{n+1}$。前者的三角形剖分数为 T_k，后者的三角形剖分数为 T_{n-k+2}。根据乘法原理，在三角形 $v_1v_kv_{n+1}$ 出现之下的三角形剖分数是 $T_k\cdot T_{n-k+2}$，再由加法原理得

$$T_{n+1}=\sum_{k=2}^{n}T_k\cdot T_{n-k+2} \tag{1}$$

下面我们将用另一方法来得出凸 n 边形的三角形剖分数 T_n 所满足的递推关系。

如图 5.3 所示，对角线 v_1v_k 分 n 边形为上、下两部份，上部份是 k 边形，顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_k$；下部份是 $n-k+2$ 边形，顶点为 $v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n, v_1$。上部份的三角剖分数为 T_k，下部份的三角剖分数为 T_{n-k+2}。根据乘法原理，对于特定的对角线 v_1v_k 的三角剖分数为 $T_k \cdot T_{n-k+2}$，这里 $k=3, 4, \cdots, n-1$，再由加法原理得对应于 v_1 的三角剖分数为 $T_3 \cdot T_{n-1}+T_4 \cdot T_{n-2}+\cdots+T_{n-1} \cdot T_3$。由对称性，对应于其它任一顶点的三角剖分数也是这个数，故在重复计算的情况下可得 $n \cdot (T_3 \cdot T_{n-1}+T_4 \cdot T_{n-2}+\cdots+T_{n-1} \cdot T_3)$ 个三角剖分。因为每条对角线的两个顶点都计算，所以应除以 2。又因为每次三角剖分使用了 $n-3$ 条对角线，所以它计数 n 边形每个三角剖分恰好 $n-3$ 次，故还应除以 $n-3$。所以

$$T_n=\frac{1}{n-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot n(T_3 \cdot T_{n-1}+T_4 \cdot T_{n-2}+\cdots+T_{n-1} \cdot T_3) \quad (2)$$

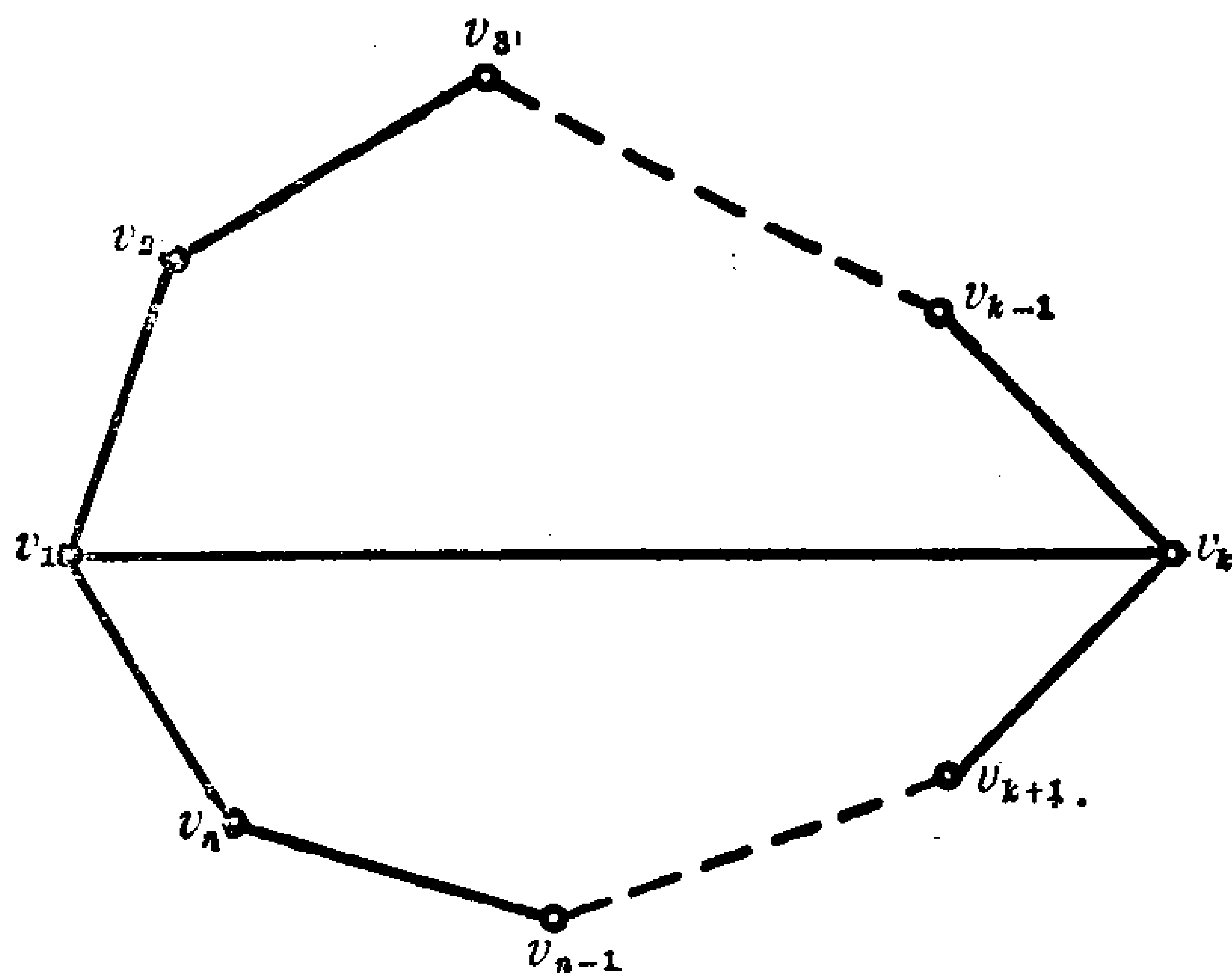


图 5.3

因为$T_2=1$，把(1)式可改写成

$$T_{n+1}-2T_n=T_3\cdot T_{n-1}+T_4\cdot T_{n-2}+\cdots+T_{n-1}\cdot T_3$$

代入(2)得

$$\frac{n}{2}(T_{n+1}-2T_n)=(n-3)\cdot T_n$$

即
$$nT_{n+1}=(4n-6)T_n$$

令$nT_{n+1}=E_{n+1}$，则有

$$E_{n+1}=\frac{4n-6}{n-1}E_n$$

于是

$$\frac{E_{n+1}}{E_n}=\frac{4n-6}{n-1}=\frac{2(2n-3)}{n-1}=\frac{2(n-1)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}$$
$$=\frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}$$

而
$$E_{n+1}=\frac{E_{n+1}}{E_n}\cdot\frac{E_n}{E_{n-1}}\cdot\frac{E_{n-1}}{E_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{E_3}{E_2}$$

因$T_2=1$，所以$E_2=1$，故有

$$E_{n+1}=\frac{(2n-2)\cdot(2n-3)}{(n-1)\cdot(n-1)}\cdot\frac{(2n-4)\cdot(2n-5)}{(n-2)\cdot(n-2)}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1}$$
$$=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}=\binom{2n-2}{n-1}$$

所以有 $nT_{n+1}=\binom{2n-2}{n-1}$，即

$$T_{n+1}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

结果也是一个 Catalan 数。

5.26 $2n$个命名的结点均匀分布在圆周上，每二个点用一条弦连接起来，使得没有二条弦相交，问有多少不同连接方式。例如6个结点时有图5.4中5种连接方式。

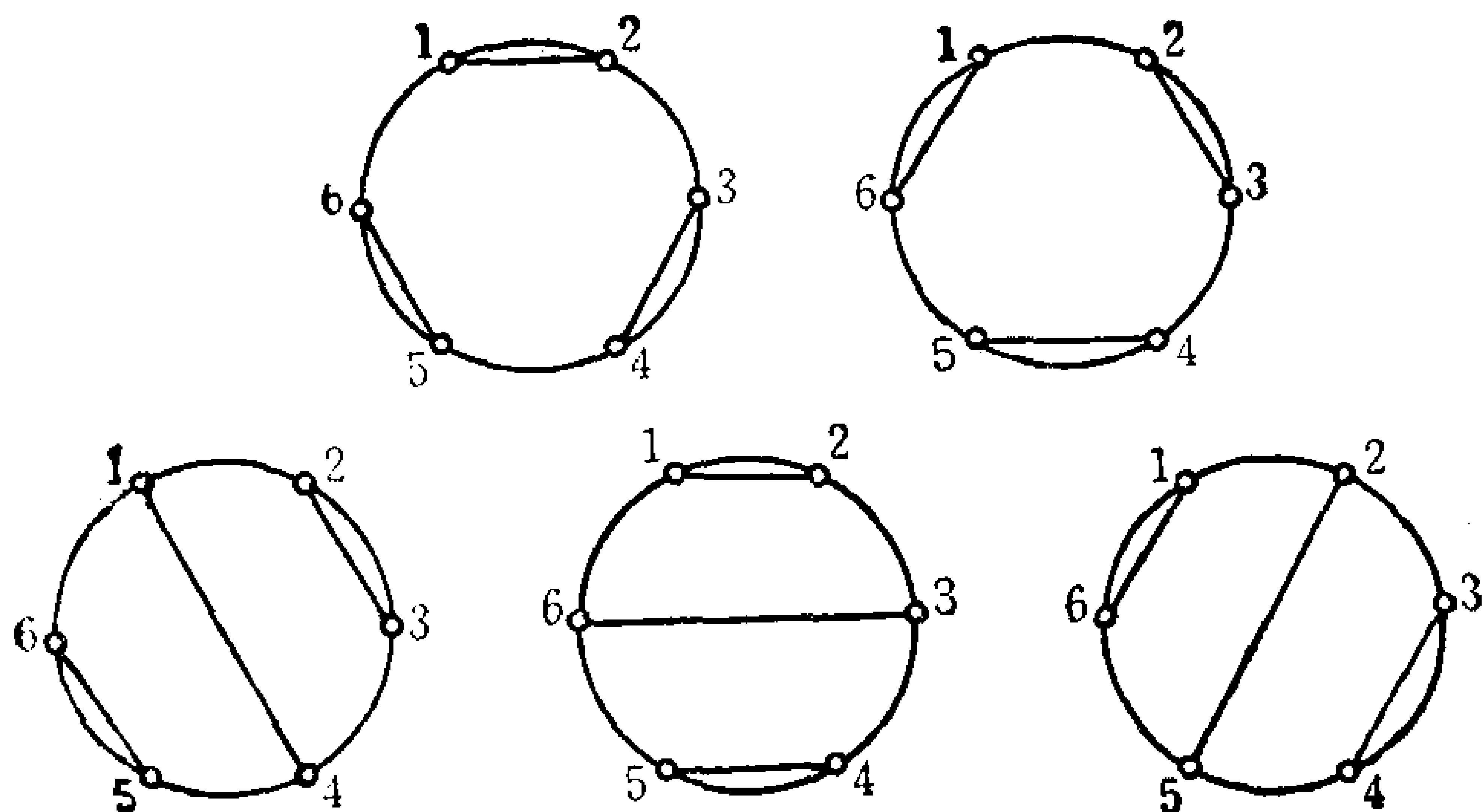


图 5.4

解 设 $2n$ 个结点有 $H(n)$ 种不同连接方式。因结点 1 只能与偶数编号的结点相连，否则必然有弦相交。不妨设 1 与 $2k$ 连接，如图 5.5 所示。于是在弦 $(1, 2k)$ 上边的 $2(k-1)$ 个结点有 $H(k-1)$ 种不同连接方式，在弦 $(1, 2k)$ 下边的 $2(n-k)$ 个结点有 $H(n-k)$ 种不同连接方式。因此对固定的 k 共有

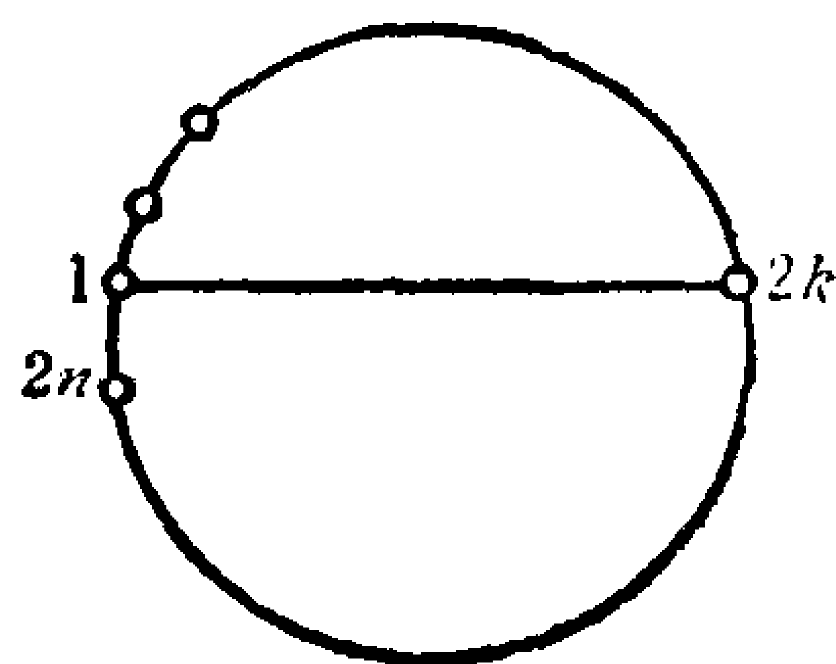


图 5.5

$H(k-1)\cdot H(n-k)$ 种方式，现让 k 历遍 1, 2, …, n 并定义 $H(0)=1$，得

$$H(n)=H(0)\cdot H(n-1)+H(1)\cdot H(n-2)+\cdots$$
$$+H(n-2)\cdot H(1)+H(n-1)\cdot H(0)$$

若记 $H(n)=C(n+1)$ 代入上式显然是 Catalan 数所满足的递推关系式，所以

$$H(n)=C(n+1)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

5.27 (a) 证明 在 $x_1x_2\cdots x_n$ 的 n 个乘数中，不打乱次序，取

k 个相邻乘数偶对有$\binom{n-k}{k}$种不同方法。例如在 $x_1x_2x_3x_4x_5$ 中取 2 个相邻乘数偶对有以下 $\binom{5-2}{2}=3$ 种方法：

$$(x_1x_2)(x_3x_4)x_5$$
$$(x_1x_2)x_3(x_4x_5)$$
$$x_1(x_2x_3)(x_4x_5)$$

(b) 证明

$$C(n)=\binom{n-1}{1}\cdot C(n-1)-\binom{n-2}{2}\cdot C(n-2)$$
$$+\binom{n-3}{3}\cdot C(n-3)+\cdots\pm\binom{n-\left[\frac{n}{2}\right]}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$
$$\cdot C\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

证 (a) 图 5.6 示出 $n-k$ 个空格任取 k 个的一种方式，图中有阴影的格表示选中的格，其余空格表示未选中。

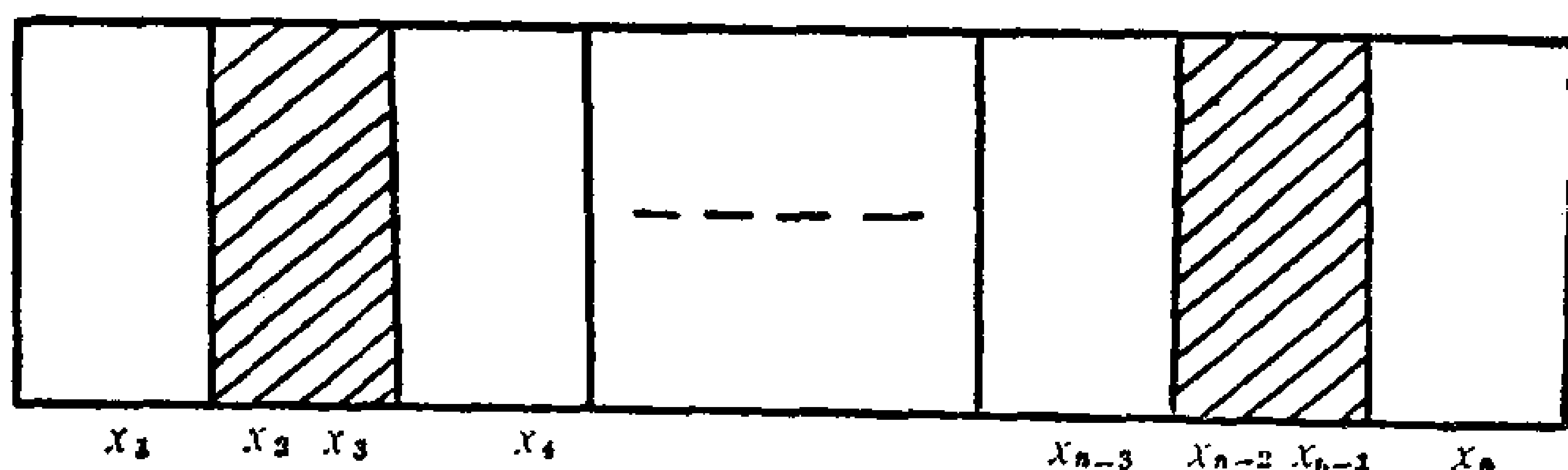


图 5.6

现在我们把 $x_1x_2\cdots x_n$ 从左到右依次填入以上方格中，对每一空格填入一个 x，对有阴影的方格填入 x 和其后继者。这样，$n-k$ 个空格选取 k 个的每一方式就和选 k 个相邻乘数偶对的一种方式对应，显然是一一对应，这就证明了(a)。

(b) 我们知道计算 $x_1x_2\cdots x_n$ 的不同方法数是 $C(n)$，现在我们用包含-排斥原理重新计算。令 p_i 表示相乘过程中含有 (x_i, x_{i+1}) 偶对这一性质 ($i=1, 2, \cdots, n-1$)，而这些性质是对称的，因此公共数

$$N(1)=C(n-1)$$
$$N(2)=C(n-2)$$
$$\vdots$$
$$N\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)=C\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

本题(a)中已证明在 $x_1x_2\cdots x_n$ 中取 k 个相邻乘数偶对有 $\binom{n-k}{k}$ 种不同方式，代入对称筛公式得

$$C(n)=\binom{n-1}{1}C(n-1)-\binom{n-2}{2}C(n-2)$$
$$+\binom{n-3}{3}C(n-3)+\cdots$$
$$\pm\binom{n-\left[\frac{n}{2}\right]}{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot C\left[n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

这就证明了(b)。

5.28 (a) 试计算从平面坐标(0, 0)到 (n, n) 点在对角线 OA 之上的递增路径的条数。

(b) 试证明从平面坐标上 (0, 0) 到 (n, n) 点在对角线 OA 之上且不触及 OA 的递增路径条数是 $\frac{1}{2(2n-1)}\binom{2n}{n}$。

解 (a) 在题 1.18 中已见过本题，现在让我们用另一种一一对应技巧来解。例如，我们把图 5.7 所示的递增路径和

$(x_1((x_2x_3)x_4))$ 对应。对应方法是这样：左括号"("对应于向上走一格，x_i 对应于向右走一格（最后一个文字 x_4 除外）。其余 $x_1x_2x_3x_4$ 的乘法方式与图 5.8 中的递增路径对应。这一对应方法可以推广到任意 n，并且显然是一一对应，但已知 $x_1x_2x_3\cdots x_n$ 的乘法方式个数是

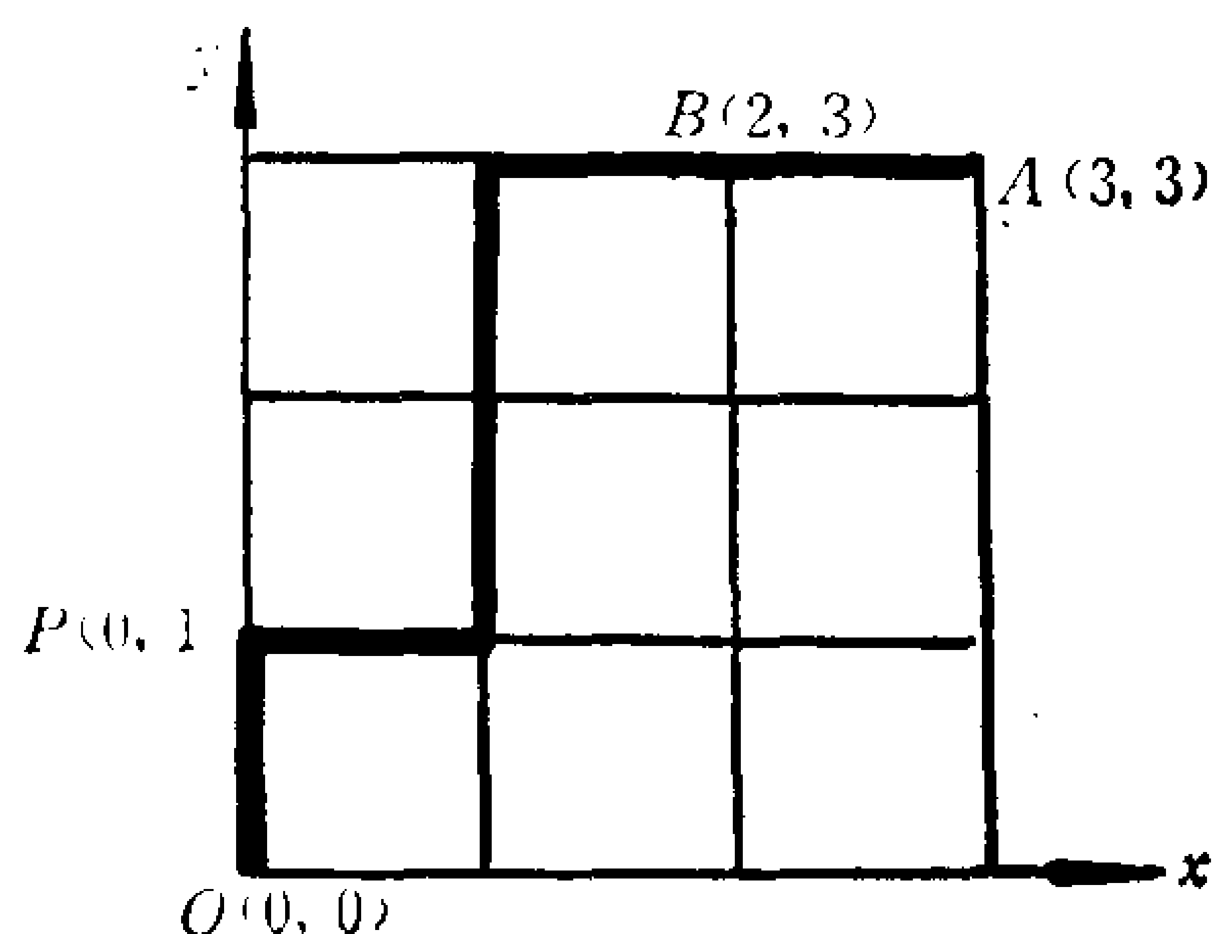


图 5.7

$$C(n+1)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

所以从 $O(0, 0)$ 到 $A(n, n)$ 的对角线之上的递增路径条数是 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

(b) 因为不触及对角线 OA，所以该递增路径必然经过 P、B 两点（参看图 5.7）且在对角线 PB 之上，故所求的路径条数应是

$$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{1}{2(2n-1)}\binom{2n}{n}$$

5.29 (a) 设 $P(n, t)$ 是一个 n 元素的集合划分成 t 个非空无序子集的划分数，试确定 $P(n, t)$ 所满足的递推关系。

(b) 设 $T(n, t)$ 是一个 n 元素的集合划分成 t 个非空有序子集的划分数，证明 $T(n, t)=t!P(n, t)$，由此导出 $T(n, t)$ 所满足的递推关系。

解 (a) 在 n 个元素中任取一个元素 a，对 a 来说有下面两种可能：(1) a 单独组成一个子集，这样剩下的 $n-1$ 个元素只

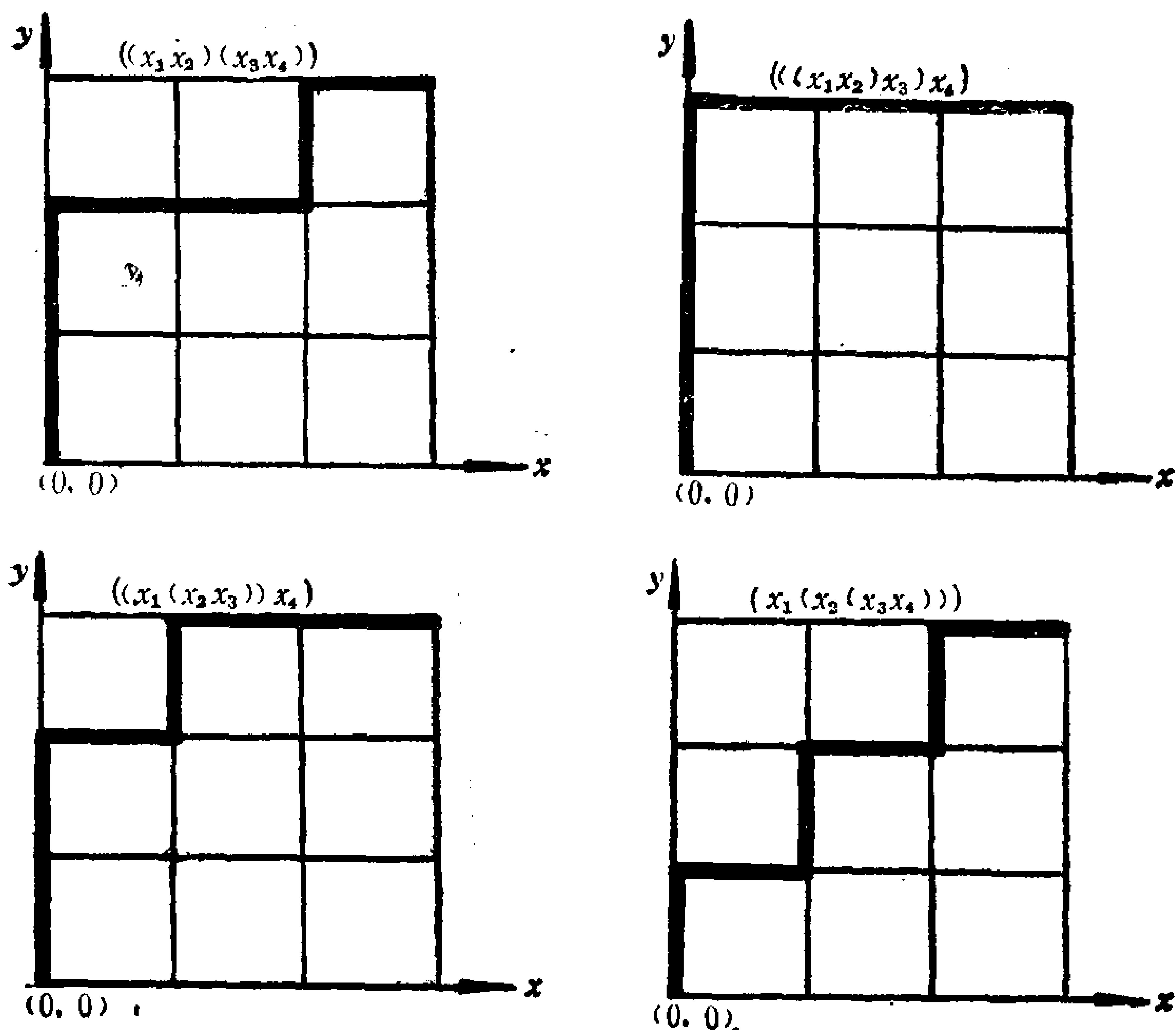


图 5.8

能组成 $t-1$ 个非空子集，故有 $P(n-1, t-1)$种方法。(2)a 不能单独组成一个子集，这样剩下的 $n-1$ 个元素须组成 t 个非空子集，而 a 可能与这 t 个子集的任一个在一起，故总共有 $t\cdot P(n-1, t)$种方法。由加法原理得

$$P(n, t)=tP(n-1, t)+P(n-1, t-1)$$

显然有 $P(n, 0)=0$, $P(n, 1)=1$。

上边已指出，它的解就是第二类 Stirling 数，我们可以根据此递推关系和初值作出完全类似于杨辉三角形一样的表，从表 5.1 中查得任一个 Stirling 数 $P(n, t)$的值。

例如可以算出 $P(5, 3)=3P(4, 3)+P(4, 2)=3\times6+7=$

表 5.1

	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6
n=1	1					
n=2	1	1				
n=3	1	3	1			
n=4	1	7	6	1		
n=5	1	15	25	10	1	
n=6	1	31	90	65	15	1

25。

(b) 因为 $P(n, t)$ 是一个 n 元的集合划分成 t 个非空无序子集的划分数，所以 $T(n, t)=t!P(n, t)$。由(a)知

$$P(n, t)=tP(n-1, t)+P(n-1, t-1)$$

所以有 $\quad T(n, t)=t\cdot[T(n-1, t)+T(n-1, t-1)]$

且有 $\quad T(n, 0)=0!P(n, 0)=0,\ T(n, 1)=1!P(n, 1)=1$

5.30 设 X 是一个 n 个元素的集合，Y 是一个 t 个元素的集合，证明从 X 到 Y 的满射函数的个数等于 $T(n, t)$。

证 设 f: $X\to Y$ 是一满射函数，我们让映射到 Y 中同一元素上的 X 中的元素在同一集合内，则由 f 可以诱导出前域 X 的一个划分，当然划分的每一块是非空的，共有 t 块。所以 X 到 Y 的满射函数的个数等于将 n 个元素的集合 X 划分成 t 个有序非空子集的划分数 $T(n, t)$。

评注 本题在题 4.36 已得出具体结果，再联系到下一题，就可看出两者的结果是一致的。

5.31 证明第二类 Stirling 数 $S_2(n, r)$ 满足下列各式。

(a) $S_2(n, r)=\dfrac{1}{r!}\sum\limits_{i=0}^{r}(-1)^i\dbinom{r}{i}(r-i)^n$

(b) $S_2(n+1,\ r+1)=\binom{n}{0}S_2(0,\ r)+\binom{n}{1}S_2(1,\ r)+\cdots$

$$+\binom{n}{n}S_2(n,\ r)$$

(c) $m^n=\binom{m}{1}1!S_2(n,\ 1)+\binom{m}{2}2!S_2(n,\ 2)$

$$+\binom{m}{3}3!S_2(n,\ 3)+\cdots+\binom{m}{m}m!S_2(n,\ m)$$

解 (a) $S_2(n,\ r)$ 的意义是划分 n 个元素的集合为 r 个子集(没有空子集)的方法数。这相当于把 n 个有标记的球放到 r 个无标记的箱中,使每箱不空的方法数。

让我们先考虑 n 个有标记的球放到 r 个有标记的箱中的情况。允许有空箱子时,有 r^n 种方法,同理 n 个有标记的球放到 $r-i$ 个有标记的箱中有 $(r-i)^n$ 种方法。而 r 个有标记的箱子选 i 个当空箱子的方法数是 $\binom{r}{i}$,根据包含-排斥原理,n 个有标记的球放到 r 个有标记的箱子中,不允许有空集的方法数是

$$r^n-\binom{r}{1}(r-1)^n+\binom{r}{2}\cdot(r-2)^n-\cdots+\binom{r}{r}(n-r)^n$$

$$=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\cdot(r-i)^n$$

现在箱子无标记,所以方法数是

$$\frac{1}{r!}\sum_{i=0}^{r}(-1)^r\binom{r}{i}(r-i)^n$$

(b) 按 $S_2(n+1,\ r+1)$ 的意义,它是 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n+1}\}$ 的 $(r+1)$-划分的可能个数。在每一种划分中,删去含 a_{n+1} 的一块,就得到一个 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ 部分元素的 r-划分,如果我们

能计算出这种 r-划分的个数，那末就得出了 $S_2(n+1, r+1)$ 的个数。

在 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中，我们能用 $\binom{n}{k}$ 种方法选出 k 元素子集，对此 k 元素子集有 $S_2(k, r)$ 种方法把它划分为 r 个子集，于是对固定的 k，有 $\binom{n}{k}\cdot S_2(k, r)$ 种方法，让 k 遍历 0, 1, 2, $\cdots$, n，并累加不同 k 的方法数就得出所有可能的 r-划分，于是

$$S_2(n+1, r+1)=\binom{n}{0}S_2(0, r)+\binom{n}{1}S_2(1, r)+\cdots+\binom{n}{n}S_2(n, r)$$

注意，若 $k<r$，则其中 $S_2(k, r)=0$。

(c) 左侧是把 n 个元素放到 m 个有标记的箱中允许有空箱的可能方法数，这里 $m\leqslant n$，现考虑右侧。

把 n 个元素恰好放到 k 个无标记的箱子的方法数是 $S_2(n, k)$，m 个有标记的箱中选出 k 个的排列数是 $\binom{m}{k}\cdot k!$，所以把 n 个元素恰好放到 k 个(从 m 个中选取的)有标记的箱子中的方法数是 $\binom{m}{k}\cdot k!\cdot S_2(n, k)$。让 k 遍历 1 到 m，并累加不同 k 的方法数，即得总方法数。所以

$$m^n=\binom{m}{1}\cdot 1!\cdot S_2(n, 1)+\binom{m}{2}\cdot 2!\cdot S_2(n, 2)+\cdots+\binom{m}{m}\cdot m!\cdot S_2(n, m)$$

5.32 B_n是 Bell 数，这里$n=0, 1, 2, \cdots$，试证明

(a) $B_n=S_2(n, 0)+S_2(n, 1)+S_2(n, 2)+\cdots+S_2(n, n)$

(b) $B_n=\binom{n-1}{0}\cdot B_0+\binom{n-1}{1}\cdot B_1+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\cdot B_{n-1}$

证 (a) $S_2(n, r)$是将n个元素的集合划分成r个非空无序子集的划分数。而B_n是将n个元素的集合划分为非空子集(无序)的划分数。所以它无非是或者将n个元素的集合划分成0个非空子集；或者将n个元素的集合划分成1个非空子集；或者将n个元素的集合划分成2个非空子集；……或者将n个元素的集合划分成n个非空子集。由加法原理得

$$B_n=S_2(n, 0)+S_2(n, 1)+S_2(n, 2)+\cdots+S_2(n, n)$$

(b) 设这n个元素的集合为$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。因为$B_n$是将$n$个元素的集合进行划分的方法数，对于任一划分来讲，$a_1$总是在划分的某一块里，即在某一子集中。不妨设这个子集有k个元素($k=1, 2, \cdots, n$)，则在此子集中的另外$k-1$个元素将从$n-1$个元素中去选取。然后对剩下的$n-k$个元素去进行划分。故有

$$B_n=\binom{n-1}{0}\cdot B_{n-1}+\binom{n-1}{1}\cdot B_{n-2}+\binom{n-1}{2}\cdot B_{n-3}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\cdot B_0$$

而$\binom{n-1}{k}=\binom{n-1}{n-1-k}$，所以有

$$B_n=\binom{n-1}{0}B_0+\binom{n-1}{1}B_1+\binom{n-1}{2}B_2+\cdots+\binom{n-1}{n-1}B_{n-1}$$

5.33 证明等式

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$
$$=S_1(n,n)x^n-S_1(n,n-1)x^{n-1}+\cdots+S_1(n,0)$$

其中 $S_1(n,k)$ 是第一类 Stirling 数。

证 用归纳法证明。在证明之前请读者注意到第一类 Stirling 数满足以下递推关系

$$\begin{cases} S_1(n,r)=S_1(n-1,r-1)+(n-1)S_1(n-1,r) \\ S_1(n,0)=0,\ S_1(n,n)=1 \end{cases}$$

并且展开式中 x^n 项的系数显然是 1，常数项是 0，符合 $S_1(n,n)=1$ 和 $S_1(n,0)=0$。

$n=1$ 时，$x=S_1(n,n)x^n+S_1(n,0)$ 显然成立。

设 $n-1$ 时

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)$$
$$=S_1(n-1,n-1)x^{n-1}-S_1(n-1,n-2)x^{n-2}+\cdots$$
$$+S_1(n-1,0) \tag{1}$$

成立。于是

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)\cdot(x-n+1)$$
$$=[S_1(n-1,n-1)x^{n-1}-S_1(n-1,n-2)x^{n-2}+\cdots$$
$$+S_1(n-1,0)](x-n+1)$$
$$=S_1(n-1,n-1)x^n-[S_1(n-1,n-2)$$
$$+(n-1)S_1(n-1,n-1)]x^{n-1}+[S_1(n-1,n-3)$$
$$+(n-1)\cdot S_1(n-1,n-2)]x^{n-2}-\cdots$$
$$+(n-1)S_1(n-1,0)$$
$$=S_1(n,n)x^n-S_1(n,n-1)x^{n-1}$$
$$+S_1(n,n-2)x^{n-2}+\cdots+S_1(n,0)$$

所以本题得证。

评注 本题说明第一类 Stirling 数就是 $x(x-1)(x-2)\cdots$

$(x-n+1)$ 展开式的系数(不含正负号)。它可用作第一类 Stirling 数的另一种定义。

由第一类 Stirling 数所满足的递推关系及初值我们可以构造出类似于杨辉三角形的表，从表 5.2 中可查得任一 Stirling 数 $S_1(n, k)$ 的值，例如 $S_1(4, 2)=S_1(3, 1)+(4-1)S_1(3, 2)=$

表 5.2

			$k=1$		
$n=1\cdots$	1		$k=2$		
$n=2\cdots$	1	1	$k=3$		
$n=3\cdots$	2	3	1	$k=4$	
$n=4\cdots$	6	11	6	1	
		……			

$2+3\cdot3=11$。

5.34 所有从 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 中取 $(n-k)$ 个不同整数的积之和是多少？例如，所有从 $\{1, 2, 3, 4\}$ 中取 2 个不同整数的积之和是

$$1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+2\cdot3+2\cdot4+3\cdot4=35$$

解 我们用 $f(n, k)$ 表示此和数。和式的各项可分成两类，一类是含有因子 $n-1$ 的项，一类是不含因子 $n-1$ 的项，前者的和是 $(n-1)f(n-1, k)$，即所有从 $\{1, 2, \cdots, n-2\}$ 中取 $n-1-k$ 个不同整数的积之和，再乘以 $(n-1)$ 得出。后者之和是 $f(n-1, k-1)$，即所有从 $\{1, 2, \cdots, n-2\}$ 中取 $n-k$ 个不同整数的积之和。于是由加法原理得

$$f(n, k)=f(n-1, k-1)+(n-1)f(n-1, k)$$

为使上式对 $k=1$ 和 $k=n-1$ 都成立，我们规定

$$f(n, 0)=0, f(n, n)=1$$

前边已指出,满足这个递推关系式及初值的解是第一类Stirling数 $S_1(n, k)$。故所求的积之和是 $S_1(n, k)$。

5.35 (河内宝塔问题)有三根木桩和 n 个大小递增的在一根木桩上的环形盘子，最大盘子在底部(如图 5.9 所示)。这些盘子可一次一个地从一个木桩转移到另一个木桩，但不允许较大的盘子放在较小的盘子的上面。现在把 n 个盘子从木桩 A 全部移到木桩 B，问必须移动的次数是多少?

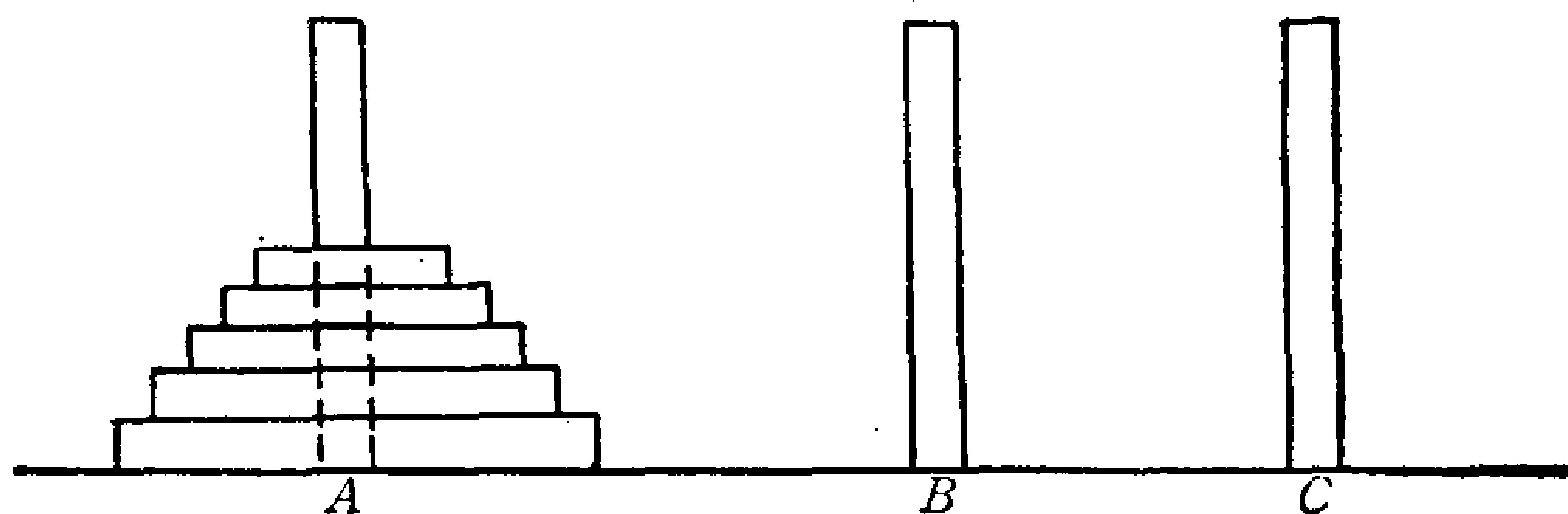


图 5.9

解 令 $H(n)$ 表示把 n 个盘从一个木桩移到另一木桩所必须的移动次数。显然有 $H(0)=0$, $H(1)=1$。

对于 n 个盘，先把木桩 A 上的 $n-1$ 个盘套到木桩 C 上而保持相对位置不变,需用 $H(n-1)$ 次。再把木桩 A 上的最大的盘套到 B 上，用 1 次。然后再把 C 上的盘套回到 B 上，又用 $H(n-1)$ 次。所以有

$$H(n)=2H(n-1)+1$$

迭代此关系式得

$$\begin{aligned}H(n)&=2H(n-1)+1\\&=2^2H(n-2)+2+1\\&\cdots\cdots\\&=2^nH(0)+2^{n-1}+\cdots+2^2+2+1\\&=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1\end{aligned}$$

所以有 $$H(n)=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

5.36 设 a_n 是将整数 1, 2, …, n 排成一行的方法数，使其服从这样的条件，除去第一个数外，每个数与它左边的某个数恰好相差 1。找出一个关于 a_n 的递推公式，并由此证明

$$a_n=2^{n-1}$$

解 首先我们证明符合题中条件的 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列 $b_1b_2\cdots b_n$ 必满足以下性质：

对任意 $2\leqslant k\leqslant n$，$b_k=\max\{b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}\}+1$，或 $b_k=\min\{b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}\}-1$，且 $b_1b_2\cdots b_{k-1}$ 是由某个自然数 $m+1$ 到 $m+k-1$ 的 $k-1$ 个相继自然数组成的符合题中条件的排列。

用归纳法证明。

$k=2$ 时，显然成立，否则满足不了"和 b_2 左边的某个数相差 1"的条件。

设 $k-1$ 时成立。现证 k 时也成立。

1．由归纳假设 $b_1b_2\cdots b_{k-2}$ 是由某个自然数 $m+1$ 到 $m+k-2$ 的 $k-2$ 个相继自然数组成的符合题中条件的排列，又 $b_{k-1}=\max\{b_1, b_2, \cdots, b_{k-2}\}+1$ 或 $b_{k-1}=\min\{b_1, b_2, \cdots, b_{k-2}\}-1$，所以 $b_1b_2\cdots b_{k-1}$ 是由某个自然数 $m+1$ 到 $m+k-1$（或 m 到 $m+k-2$）的 $k-1$ 个相继自然数组成的符合题中条件的排列。

2．因为 $b_1b_2\cdots b_k$ 是一个排列，b_k 肯定不在 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}\}$ 之中，又要求 b_k 与 B 中某个元素相差 1，所以

$$b_k=\max\{b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}\}+1$$

或 $$b_k=\min\{b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}\}-1$$

由以上性质，b_n 只能等于 n 或 1，在 n（或 1）左边可以是符

合题中条件的 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$(或 $\{2, 3, \cdots, n\}$) 的任一排列，这样得

$$a_n = 2a_{n-1}$$

又 $a_1=1$，用迭代法解之得

$$a_n = 2^{n-1}$$

5.37 平面上有 n 条直线，如果没有两条是平行的，且没有三条是共点的，则称它们处于一般状态。设 a_n 是 n 条处于一般状态的直线分割平面所成的区域数，显然有 $a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=7$，如图 5.10 所示。试求 a_n 的一般表达式。

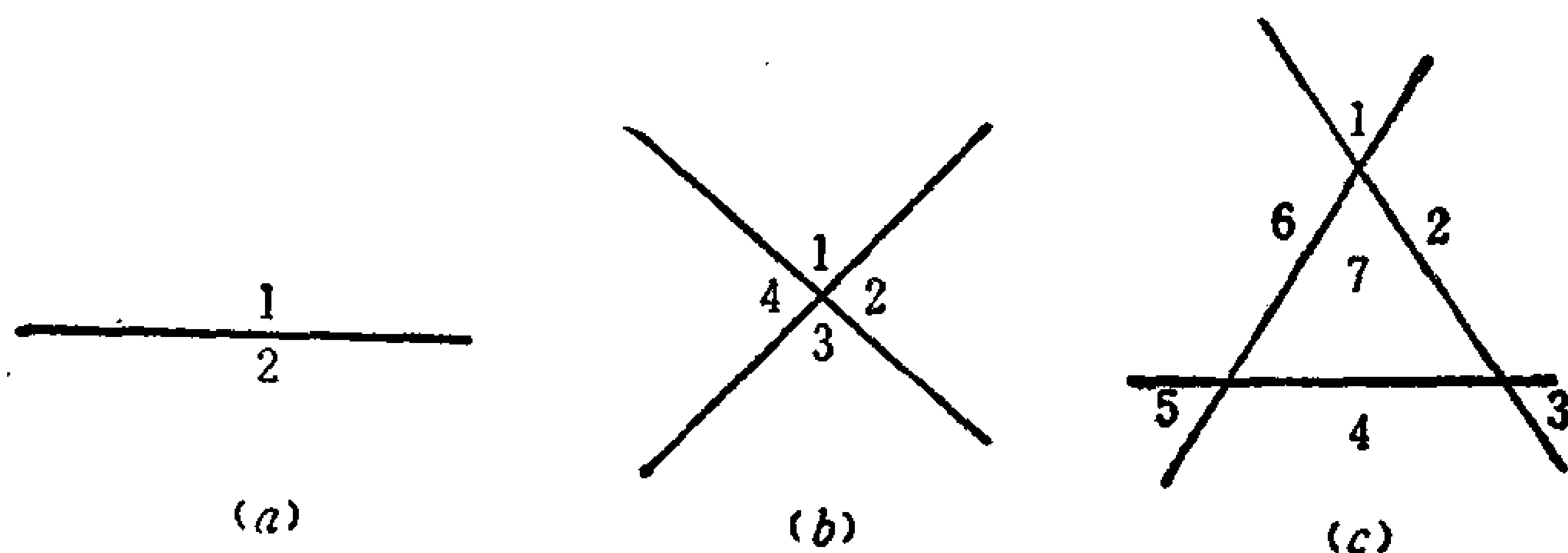


图 5.10

解 我们用 b_n 表示一条直线为 n 个不同的点分割所得的段数，显然有 $b_n=n+1$。现考虑一个平面已被处于一般位置的 $n-1$ 直线划分成 a_{n-1} 个区域，再在平面上插入第 n 条直线，且插入的第 n 条直线与前 $n-1$ 条直线处于一般状态。则前 $n-1$ 条直线与第 n 条直线相交于 $n-1$ 个不同的点，分第 n 条直线为 b_{n-1} 段。第 n 条直线的每一段恰分平面的一个已存在的区域为二个区域。因此有

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

因为 $b_{n-1}=n$，所以有 $a_n=a_{n-1}+n$。迭代此关系式得

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1}+n \\
&= a_{n-2}+(n-1)+n \\
&\cdots\cdots \\
&= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+a_1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+1 \\
&= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}
\end{aligned}
$$

评注 上述解题思路可以推广。例如，若 C_n 表示一空间为 n 个平面以一般位置（即每两个平面，但没有三个平面相交于一条直线，每三个平面，但没有 4 个平面相交于一点）划分所得的区域数。则可确定 C_n 所满足的递推关系为

$$C_n=C_{n-1}+a_{n-1}=C_{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}+1$$

显然有 $C_1=2$，解得

$$C_n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$$

5.38 球面上有 n 个大圆，它们没有三个大圆通过同一点。设 a_n 表示这些大圆所形成的区域数，试证明

(a) $a_{n+1}=a_n+2n$;

(b) $a_n=n^2-n+2$。

证 (a) a_{n+1} 可以由 a_n 来生成，当在 n 个大圆的基础上，在球面上再加上第 $n+1$ 个大圆时，它同前 n 个大圆共得到 $2n$ 个交点（因无三个大圆相交于一点），而每增加一个交点就增加一个新的面，故共增加 $2n$ 个面。所以有

$$a_{n+1}=a_n+2n$$

(b) 由(a)知 $a_n=a_{n-1}+2(n-1)$，且显然有 $a_1=2$，迭代此关系式得

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1}+2(n-1)\\
&= a_{n-2}+2(n-2)+2(n-1)\\
&\cdots\cdots\\
&= 2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2+a_1\\
&= 2[(n-1)+(n-2)+\cdots+1]+2\\
&= 2\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}+2=n^2-n+2
\end{aligned}
$$

5·39 设 $h(n)$ 表示 $n+2$ 条边的凸多边形为它的对角线划分所得的区域数，其中假定没有三条对角线在凸多边形内有一公共点。定义 $h(0)=0$, 对 $n=1, 2, \cdots$, 证明

$$
h(n)=h(n-1)+\binom{n+1}{3}+n
$$

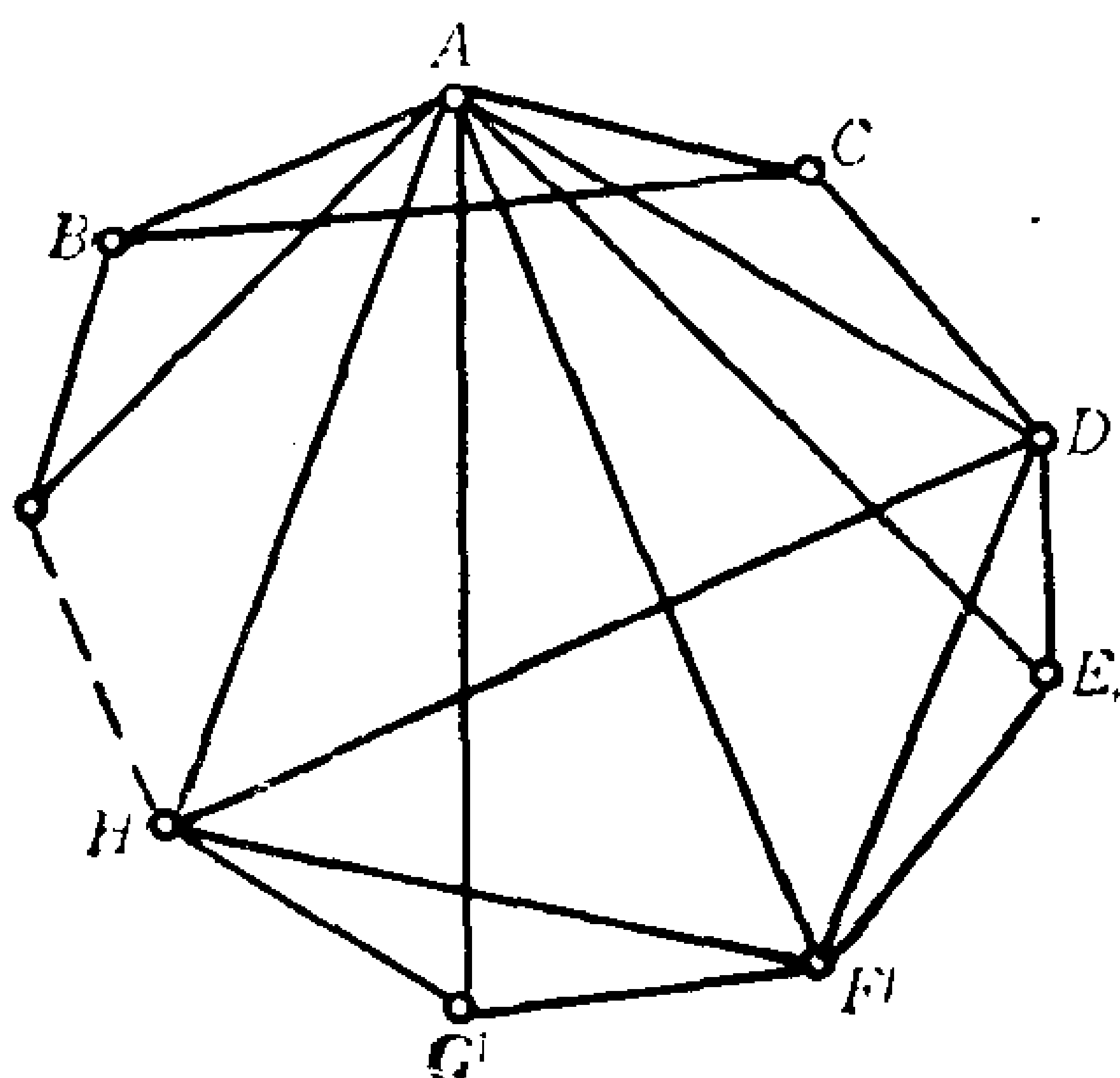


图 5.11

证 如图 5.11 所示，在凸 $n+2$ 边形中，划出以任意两相邻边为边的三角形，例如 $\triangle ABC$。则余下的是 $n+1$ 个顶点的凸多边形，它的对角线划分所得的区域数为 $h(n-1)$。由 A 点引出的对角线共有 $n-1$ 条，分 $\triangle ABC$ 为 n 块。下面我们计算一下由 A 点引出的对角线对 $n+1$ 条边的凸多边形划分所增加的区域数。

在 $n+1$ 个顶点中任取三个，不妨设为 D, H, F, 其中必有一个顶点（这里是 F）使得对角线 AF 把 H 和 D 分在两边。所

以对角线 HD 必与对角线 AF 相交。又由题意知，这个交点不会有其它对角线通过。这说明每新增加一个交点必与 $n+1$ 个顶点中的三个顶点相对应。故新增加的交点数为 $\binom{n+1}{3}$ 个。

另外，从 A 引出的每一条对角线上的交点数正好与这条对角线在凸 $n+1$ 边形内截成的线段数相同，而每一线段恰好把 $n+1$ 边形内某一区域分为两个，故新增加区域数为 $\binom{n+1}{3}$ 个。所以有

$$h(n)=h(n-1)+\binom{n+1}{3}+n$$

这是一个线性常系数非齐次递推关系，可以求得

$$h(n)=\frac{n(n+1)}{2}+\binom{n+2}{4}$$

评注 在第一章中已看到本题的一种解法，这里又看到一种解法，下一章还可看到用生成函数的解法。

5.40 在一个圆的圆周上放置 n 个不同的点，并画出所有可能的通过任意两点的弦，假设这些弦中没有三条在圆内是交于同一点的。令 a_n 表示在圆的内部形成的区域数。证明

$$a_n=\binom{n}{4}+\binom{n}{2}+1$$

证 此题可以在上题的基础上来解。

假如把圆周上每相邻两点连接起来，可得一个凸 n 边形和 n 块弓形的区域。凸 n 边形中的区域数是

$$h(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\binom{n}{4}$$

所以有

$$a_n=\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\binom{n}{4}+n$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}+\binom{n}{4}+1$$
$$=\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+1$$

5.41 某人有 n 元钱，他每天买一次物品，每次买物品的品种很单调，或者买一元钱的甲物品，或者买二元钱的乙物品，或者买二元钱的丙物品。问，他化完这 n 元钱有多少种不同的方式？

解 设化完这 n 元钱的方式有 $f(n)$ 种。则，若第一次买了一元钱的甲物品，则化完余下的 $n-1$ 元钱就有 $f(n-1)$ 种方法；若第一次买了二元钱的乙物品，则化完余下的 $n-2$ 元钱就有 $f(n-2)$ 种方法；若他第一次买了二元钱的丙物品，则化完余下的 $n-2$ 元钱有 $f(n-2)$ 种方法。由加法原理得

$$f(n)=f(n-1)+2f(n-2)$$

显然有 $f(1)=1$, $f(2)=3$。由此可以求得 $f(3)=5$, $f(4)=11$, $f(5)=21$, $f(6)=43$。另外定义 $f(-1)=0$, $f(0)=1$。可以看出

$$f(2)=3=2+1=2\cdot f(1)+(-1)^2$$
$$f(3)=5=6-1=2\cdot f(2)+(-1)^3$$
$$f(4)=11=10+1=2\cdot f(3)+(-1)^4$$
$$f(5)=21=22-1=2\cdot f(4)+(-1)^5$$
$$\cdots\cdots$$

我们猜想一般应有 $f(n)=2\cdot f(n-1)+(-1)^n$，下面用归纳法证明之。

当 $n=2, 3, 4, 5$ 时结论成立。

假设 $n-1$ 时结论成立，即有

$$f(n-1)=2\cdot f(n-2)+(-1)^{n-1}$$

此式改写成 $2f(n-2)=f(n-1)+(-1)^n$

则当 n 时，

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1)+2f(n-2) \\ &= f(n-1)+[f(n-1)+(-1)^n] \\ &= 2f(n-1)+(-1)^n \end{aligned}$$

故对一切 $n\in I_+$ 有

$$f(n)=2f(n-1)+(-1)^n$$

下面对此递推关系式进行迭代得

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(n-1)+(-1)^n \\ &= 2[2f(n-2)+(-1)^{n-1}]+(-1)^n \\ &= 2^2f(n-2)+2\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^n \\ &\cdots\cdots \\ &= 2^n-2^{n-1}+2^{n-2}-\cdots+(-1)^n \\ &= \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}, \end{aligned}$$

评注 本题一般应按线性常系数齐次递推关系式

$$f(n)=f(n-1)+2f(n-2)$$

直接求解。以上解法只是说明，有时一个递推关系可以转化为另一个递推关系来求解。

5.42 在图 5.12 中的长方形中，$AB/AC=(1+\sqrt{5})/2$。X, Y 是这样画的，使得 $AXYC$ 是一个正方形，证明长方形 $XBDY$ 与 $ACDB$ 相似。如果我们重复这个过程，就逐步出现图 5.12 的形状。证明，每个阶段我们所得长方形都相似于原来的长方形。

证 设 $AC=1$，则 $AB=(1+\sqrt{5})/2$，所以

$$XB=(1+\sqrt{5})/2-1=(\sqrt{5}-1)/2$$

$$BD/XB=1\Big/\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=(1+\sqrt{5})/2$$

故有 $AB/AC=BD/XB$，所以长方形 $XBDY$ 与 $ACDB$ 相似。

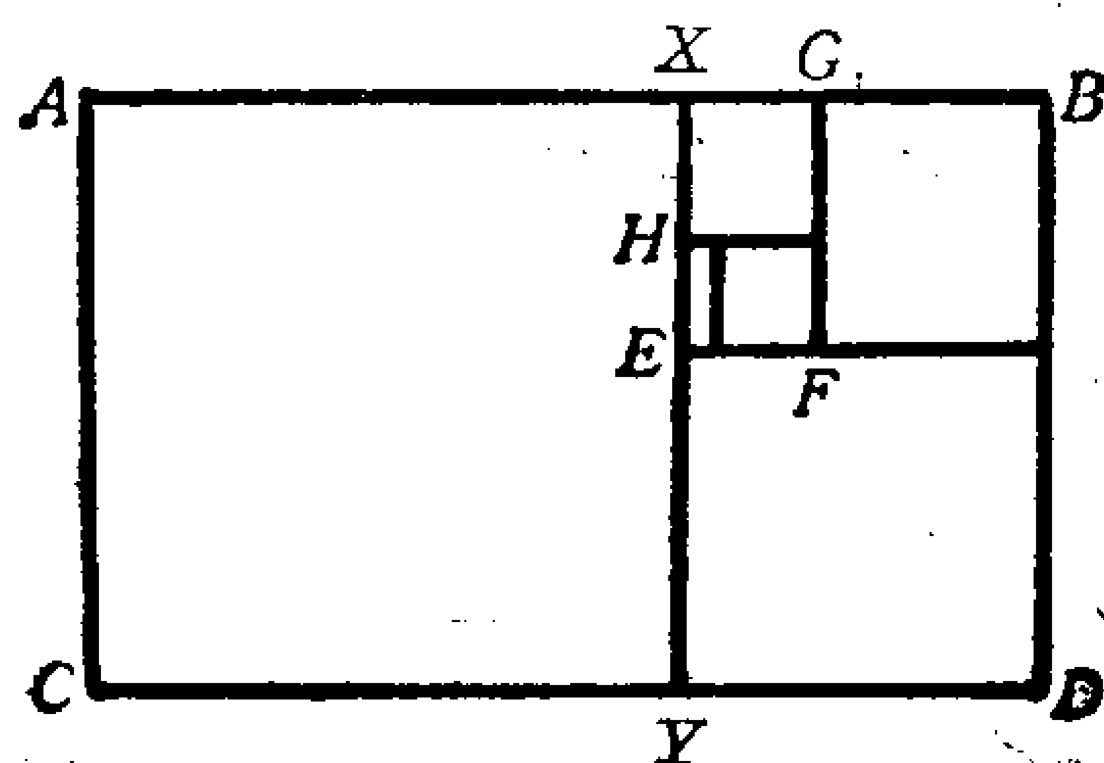


图 5.12

若我们用 a_n 表示长方形序列中第 n 个长方形的长边，用 b_n 表示长方形序列中第 n 个长方形的短边。则有

$$\begin{cases} a_n=b_{n-1} & (1) \\ b_n=a_{n-1}-b_{n-1} & (2) \end{cases}$$

和初值

$$\begin{cases} a_1=(1+\sqrt{5})/2 \\ b_1=1 \end{cases}$$

由 (1) 和 (2) 得 $a_n=b_{n-1}=a_{n-2}-b_{n-2}=a_{n-2}-a_{n-1}$，即

$$\begin{cases} a_n=a_{n-2}-a_{n-1} \\ a_1=(1+\sqrt{5})/2 \end{cases}$$

解之得

$$a_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \qquad (3)$$

由 (1) 得

$$b_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} \qquad (4)$$

由 (3) 得
$$a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a_{n-1}$$

由 (4) 得
$$b_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,b_{n-1}$$

所以不管在任何阶段，我们所得到的长方形和原来的长方

形是相似的，因为长和宽满足同样的递推关系。

评注 本题说明有些问题可列出联立递推关系，然后转化为一般递推关系求解。

5.43 称一个整数集合是饱满的，如果它的每一个元素至少与它的基数一样大。例如，集合 $\{6, 10, 11, 20, 33, 34\}$ 是饱满的，而 $\{2, 100, 200\}$ 就不是。设 $f(n)$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的饱满子集的数目（我们把空集也作为一个饱满集计算在内）。例如，$f(3)=5$，它们是 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{2, 3\}$。说明 $f(n)=F_{n+2}$。

证 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的所有饱满子集是由空集，含有一个元素的饱满子集，含有两个元素的饱满子集，…，含有 n 个元素的饱满子集等构成。而

空集本身是一个饱满子集。

含有一个元素的饱满子集有 $\binom{n}{1}$ 个。

含有二个元素的饱满子集有 $\binom{n}{2}-\binom{n-1}{1}$ 个。

含有三个元素的饱满子集有 $\binom{n}{3}-\binom{2}{1}\binom{n-2}{2}-\binom{n-2}{1}$ 个。

……

含有 k 个元素的饱满子集有

$$\binom{n}{k}-\binom{k-1}{1}\cdot\binom{n-k+1}{k-1}-\binom{k-1}{2}\cdot\binom{n-k+1}{k-2}-\cdots-\binom{k-1}{k-1}\cdot\binom{n-k+1}{1}$$

个。

上式可利用公式

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$$

和公式

$$\binom{n+m}{r}=\binom{n}{0}\cdot\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\cdot\binom{m}{r-1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{r-2}+\cdots+\binom{n}{r}\cdot\binom{m}{0}$$

化简得

$$\binom{n}{k}-\binom{k-1}{1}\binom{n-k+1}{k-1}-\binom{k-1}{2}\cdot\binom{n-k+1}{k-2}-\cdots-\binom{k-1}{k-1}\cdot\binom{n-k+1}{1}=\binom{n-k+1}{k}$$

所以有

$$f(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+\cdots+\binom{n+1-k}{k}+\cdots$$

根据题5.10的结果

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots=F_{n+1},$$

所以有

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{3}+\binom{n-3}{4}+\cdots=F_{n+2}$$

即

$$f(n)=F_{n+2}$$

5.44 假设将正整数n进行划分，使得每块小于或等于m的剖分数为$P(n, m)$。证明

$$P(n, m)=P(n, m-1)+P(n-m, m)$$

证　我们把 $P(n, m)$ 个剖分分成两类。一类是划分的每一块都小于m的这种剖分，它有 $P(n, m-1)$ 个；另一类是在划分中至少有一块是m的这种剖分。因为在划分中至少有一块是m，所以问题就变成$n-m$的每一块小于或等于m的剖分，这种剖分有 $P(n-m, m)$ 个。由加法原理得

$$P(n, m)=P(n, m-1)+P(n-m, m)$$

5.45　考察在一个受控环境里细菌的繁殖问题。设 a_r 表示第 r 天里细菌的数目，我们定义在第 r 天细菌的增长率为 a_r-2a_{r-1}。如果已知增长率每天翻一番，现设 $a_0=1$，并定义 $a_{-1}=0$，求 a_r 的值。

解　由题意可得 $a_r-2a_{r-1}=2(a_{r-1}-2a_{r-2})$，且 $a_0=1$，$a_1=4$，即有

$$\begin{cases} a_r-4a_{r-1}+4a_{r-2}=0 & r\geqslant 1 \\ a_0=1,\ a_1=4 \end{cases}$$

用特征根法解得

$$a_r=(r+1)\cdot 2^r \quad r\geqslant 0$$

5.46　一个质点在水平方向上运动，每秒钟它走过的距离等于它前一秒钟走过距离的两倍。设质点的初始位置为3，并设第一秒钟走了一个单位长的距离，求第 r 秒钟质点的位置。

解　设 $f(r)$ 表示第 r 秒钟时质点的位置，则 $f(0)=3, f(1)=4$。并由题意可得 $f(r)-f(r-1)=2[f(r-1)-f(r-2)]$ 即有

$$\begin{cases} f(r)-3f(r-1)+2f(r-2)=0 \\ f(0)=3,\ f(1)=4 \end{cases}$$

用特征根法解得

$$f(r)=2+2^r$$

5.47　在图5.13上求从顶点 a 起到顶点 d 止的长度为 n

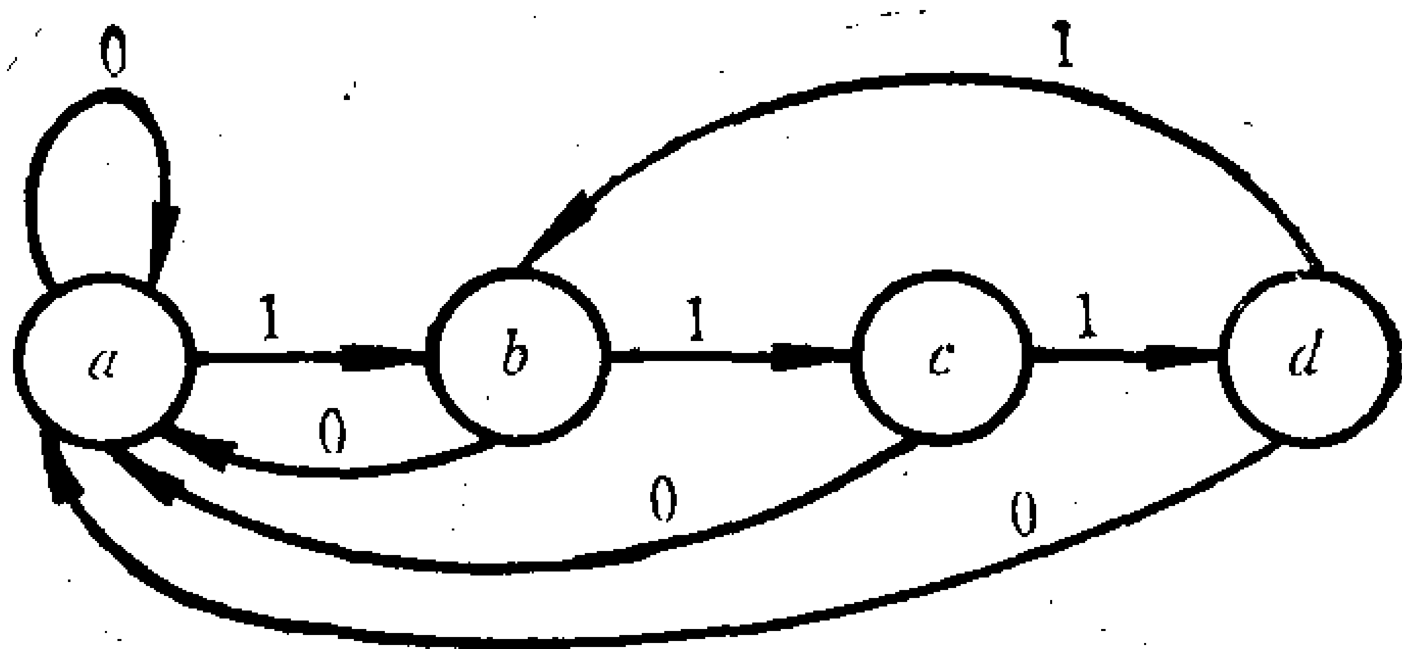


图 5.13

的有向路径的数目。

解

从 a 到 d 的有向路径的最后三条边有下列两种情况：

(i) $\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle$。

(ii) $\langle d, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle$。

除此之外没有其它可能。设从顶点 a 到顶点 d 的长度为 n 的有向路径的数目为 a_n。每一条从 a 到 d 的长度为 n 的有向路径与这有向路径上边的权所构成的二进制序列是一一对应的。

在情况 (i) 中，长度为 n 的有向路径的前 $n-3$ 条边构成由顶点 a 到它自身的有向回路，对应的 $n-3$ 位二进制序列的最后一个数字一定是 0，最后三条边对应的权是 1，1，1，所以 n 位二进制数序列的最后四位一定是 0111。$n-4$ 位的二进制数的序列共有 2^{n-4} 个，所以从 a 到 d 的对应于情况(i)的有向路径有 2^{n-4} 条。

在情况(ii)中，长度为 n 的有向路径最后三条边是固定的，所以前面的 $n-3$ 条边构成了从 a 到 d 的有向路径，故有 a_{n-3} 条，由加法原理得

$$a_n = a_{n-3} + 2^{n-4} \quad n \geqslant 4$$

另外有 $a_1=0$，$a_2=0$，$a_3=1$。用特征根法解得

$$a_n=\frac{1}{14}\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

$$+\frac{1}{14}\left(3+\frac{\sqrt{3}i}{3}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\frac{2^n}{14}$$

5.48 求 1, 2, …, t 的排列 $a_1a_2\cdots a_t(t\geqslant 2)$ 的数目，要求 a_1 取自下表的第一列，a_2 取自下表的第二列，……，a_t 取自下表的第 t 列。

	1	2	$3\cdots t-3$	$t-2$	$t-1$	
1	2	3	$4\cdots t-2$	$t-1$	t	
2	3	4	$5\cdots t-1$	t		

解 设符合条件的排列数为 u_t，我们定义 $u_0=1$，$u_1=1$。显然有 $u_2=2$，$u_3=3$，$u_4=5$。

下面我们来看表中的元素 t。由题意知，t 只能是 a_t 或 a_{t-1}。

若 $a_t=t$，则排列 $a_1a_2\cdots a_{t-1}$ 中每一个元素应从下表中去取

	1	2	$3\cdots t-3$	$t-2$
1	2	3	$4\cdots t-2$	$t-1$
2	3	4	$5\cdots t-1$	

且使得 $a_i(i=1, 2, \cdots, t-1)$ 在第 i 列中去取。故有 u_{t-1} 种取法。

若 $a_{t-1}=t$，则由题意知 $a_t=t-1$。所以排列 $a_1a_2\cdots a_{t-2}$ 中的每一个元素应从表

	1	$2\cdots t-3$
1	2	$3\cdots t-2$
2	3	$4\cdots t-2$

中去取且使得 a_i 在第 i 列取，故有 u_{t-2} 种取法。由加法原理得

$$u_t=u_{t-1}+u_{t-2}$$

解此递推关系可得

$$u_t=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1}\right]$$

5.49 求1, 2, …, n 的排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的数目，要求在排列中 a_i 取自下表的第 i 列。

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3\cdots n-3 & n-2 & n-1 & n \\
2 & 3 & 4\cdots n-2 & n-1 & n & 1 \\
3 & 4 & 5\cdots n-1 & n & 1 & 2
\end{array}$$

解 设满足条件的排列数为 Z_n。

按题意，n 可能出现在排列的三个位置，(1) $a_n=n$，(2) $a_{n-1}=n$，(3) $a_{n-2}=n$。

若是(1)，则 a_{n-1} 可能有两种取值。(a) $a_{n-1}=n-1$，(b) $a_{i-1}=1$。若是(a)，则因为1仅出现于第一列、第 $n-1$ 列、第 n 列，又 a_{n-1}，a_n 不取1，所以只能 $a_1=1$。又因为2仅出现在第一列第二列、第 n 列，而 a_1，a_n 不取2，所以只能 $a_2=2$。…，故在此情况下取法是唯一的。若是(b)，则余下的 $n-2$ 个元素应从下表中去取。

$$\begin{array}{cccc}
 & 2 & 3\cdots n-3 & n-2 \\
2 & 3 & 4\cdots n-2 & n-1 \\
3 & 4 & 5\cdots n-1 &
\end{array}$$

且使得 a_i 在 i 列中取，由上题知，取法有 u_{n-2} 种。

若是(2)，则余下的 $n-1$ 个元素应从下表中去取。

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3\cdots n-3 & n-2 & \\
2 & 3 & 4\cdots n-2 & n-1 & 1 \\
3 & 4 & 5\cdots n-1 & & 2
\end{array}$$

我们把最后一列移到最前面成表

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3\cdots n-3 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & 4\cdots n-2 & n-1 \\ 2 & 3 & 4 & 5\cdots n-1 & \end{array}$$

由上题知，取法有 u_{n-1} 种。

若是(3)，又有二种情况。(a)$a_{n-1}=1$，(b)$a_{n-1}=n-1$。若是(a)，因为 $n-1$ 仅出现在第 $n-3$ 列、$n-2$ 列、$n-1$ 列，而 a_{n-2}，a_{n-1} 不取 $n-1$，所以只可能 $a_{n-3}=n-1$。同理 $a_{n-4}=n-2$，…取法是唯一的。若是(b)，则 $a_{n-2}=n$，$a_{n-1}=n-1$。余下来的 $n-2$ 个元素只能从下表中去取

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3\cdots n-3 & \\ 2 & 3 & 4\cdots n-2 & 1 \\ 3 & 4 & 5\cdots n-2 & 2 \end{array}$$

我们把最后一列移到最前面成下表

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3\cdots n-2 \\ 1 & 2 & 3 & 4\cdots n-1 \\ 2 & 3 & 4 & 5\cdots n-2 \end{array}$$

由上题知有 u_{n-2} 种取法。

综上分析，由加法原理得

$$\begin{aligned} Z_n &= 1+u_{n-2}+u_{n-1}+1+u_{n-2} \\ &= u_n+u_{n-2}+2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]+2 \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+2 \end{aligned}$$

5.50 设 a_r 表示具有 r 个元素的集合的划分数。证明

$$a_{r+1}=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\cdot a_i,\ \text{其中}\ a_0=1。$$

证　设 $\pi=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是集合 A 的划分，则应有

$$\begin{cases} A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n \\ A_i\cap A_j=\varnothing \quad (i\neq j)\end{cases}$$

下面我们考虑 $r+1$ 个元素的集合的划分数 a_{r+1}。在 $r+1$ 个元素的集合中任意固定一个元素，然后用剩下的 r 个元素的各种划分来构造 $r+1$ 个元素的划分。方法如下：

先在 r 个元素中选取 i 个元素，这里 $1\leqslant i\leqslant r$，组成一个集合，对它进行划分，其划分数为 a_i，而将剩下的 $r-i$ 个元素和那个固定的元素组成 $r+1$ 个元素的划分的一块，所以这样得到的 $r+1$ 个元素的划分数为 $\binom{r}{i}a_i$。又因为 $r+1$ 个元素的集合本身也是一个划分，它对应着 $\binom{r}{0}\cdot a_0=1$，所以 $r+1$ 个元素的集合的划分数应该是

$$a_{r+1}=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\cdot a_i$$

第六章 生成函数

内容提要

生成函数是组合论中求解计数问题的重要工具之1．诸如用来求解有限制条件的组合个数，有限制条件的排列个数，解递推关系等等。此外，还可用来证明某些组合恒等式，产生一些特殊函数等。

本章将介绍三方面的内容。1．生成函数，或称"通常生成函数"。它是以 $\{1, x, x^2, \cdots\}$ 作为单项式序列的，是特别适用于作出涉及二项式系数(组合数)的序列 $\{a_n\}$ 的生成函数。2．正整数的剖分及其性质。3．指数生成函数。它是以 $\left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \cdots\right\}$ 作为单项式序列的，是特别适用于作出涉及排列的序列 $\{a_n\}$ 的生成函数。

6-1 生成函数

1．设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一序列，作幂级数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称 $f(x)$ 为序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的**生成函数**。

生成函数只是一种形式幂级数，我们并不关注它的收敛和发散问题，而是把 $x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots$，仅看作是识别序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$的指示符。例如 $1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$ 只说明 $a_0=1, a_1=2, a_2=2^2, \cdots, a_n=2^n, \cdots$。

2．生成函数有以下几种运算：

设 $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$ 是已知的序列，它们的生成函数分别为

$A(x)$, $B(x)$, $C(x)$。

(a) 若 $b_k = \alpha a_k$, α 为常数, 则 $B(x) = \alpha \cdot A(x)$。

(b) 若 $c_k = a_k + b_k$, 则 $C(x) = A(x) + B(x)$。

(c) 若 $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}$, 则 $C(x) = A(x) \cdot B(x)$。

(d) 若 $b_k = \begin{cases} 0 & k < l \\ a_{k-l} & k \geqslant l \end{cases}$, 则 $B(x) = x^l \cdot A(x)$。

(e) 若 $b_k = a_{k+l}$, 则 $B(x) = \dfrac{A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k \cdot x^k}{x^l}$。

(f) 若 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$, 则 $B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$。

(g) 若 $b_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$, 且 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛, 则

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$$

其中 $A(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$。

(h) 若 $b_k = \alpha^k \cdot a_k$, α 为常数, 则 $B(x) = A(\alpha x)$。

(i) 若 $b_k = k \cdot a_k$, 则 $B(x) = x \cdot A'(x)$。($A'(x)$表示 $A(x)$对 x 的导数)。

(j) 若 $b_k = \dfrac{a_k}{1+k}$, 则 $B(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$。

6-2 剖分及其性质

1．称$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$为正整数 n 的一个**剖分**, 如果 m_1, m_2, $\cdots$, m_k 是正整数, $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$, 并且 $n \geqslant m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_k > 0$, 其中 m_i 称为此剖分的**项**, k 为剖分的**项数**。不同的剖分个数称为**剖分数**。

剖分也称**划分**或**和分拆**, 项也称**块**。

2．剖分有以下主要性质

(a) 把 n 拆分成不多于 k 项的剖分数等于把 n 拆分成最大项不超过 k 的剖分数。(见题 1.9)

(b) 把 n 拆分成最大项为 k 的剖分数等于把 n 拆分成 k 项的剖分数。(见题 1.9)

(c) 把 n 拆分成互不相同的若干奇数项的剖分数等于把 n 拆分成有自共轭 Ferrer 图象的剖分数。(见题 1.10)

(d) 设 $P_m(n)$ 是把 n 拆分成各项属于 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的剖分数，则 $\{P_m(n)\}$ 的生成函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

把 n 拆分成各项属于 $\{1, 2, \cdots, m\}$，且 m 至少出现一次，这种剖分数的生成函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

剖分数是 $P_m(n)-P_{m-1}(n)$。

(e) 设 $P(n)$ 是 n 的剖分数，则序列 $\{P(n)\}$ 的生成函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}$$

剖分数
$$P(n)\approx\frac{1}{4\sqrt{3}\,n}\cdot e^{\pi\sqrt{2/3}\cdot\sqrt{n}}$$

(f) 设 $P_0(n)$ 是把 n 拆分成奇整数的剖分数，$P_d(n)$ 是把 n 拆分成各项不同的剖分数，$P_t(n)$ 是把 n 拆分成不同的 2 的幂的剖分数。则

(i) $P_0(n)=P_d(n)$。

(ii) $P_t(n)=1$。

3. 若各项次序不同认为是不同的剖分，则把 n 拆分成 r 块的剖分数是 $\binom{n-1}{r-1}$。例如 7 拆分成 4 块，其不同的剖分有以

下$\binom{6}{3}=20$种。

4+1+1+1	3+2+1+1	1+3+2+1	2+2+2+1
1+4+1+1	3+1+2+1	1+3+1+2	2+2+1+2
1+1+4+1	3+1+1+2	1+2+3+1	2+1+2+2
1+1+1+4	2+3+1+1	1+2+1+3	1+2+2+2
	2+1+3+1	1+1+3+2	
	2+1+1+3	1+1+2+3	

6-3 指数生成函数

设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$是一序列，作幂级数

$$f_e(x)=a_0+a_1\cdot\frac{x}{1!}+a_2\cdot\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\cdot\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

称 $f_e(x)$为序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ **的指数生成函数**。

和生成函数一样，指数生成函数也是形式幂级数，$x^0, x/1!, x^2/2!, \cdots, x^n/n!\cdots$ 只起指示作用。

通常生成函数的运算规律只有 (a)，(b) 和 (h) 三条适用于指数生成函数，其余都不适用。

题解及评注

6.1 确定下列数列的一般生成函数。

(a) $1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$;

(b) $\binom{\alpha}{0}, -\binom{\alpha}{1}, \binom{\alpha}{2}, -\binom{\alpha}{3}, \cdots, (-1)^n\binom{\alpha}{n}, \cdots$

(α 为一实数)；

(c) $\frac{1}{0!}, \frac{(-1)}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, (-1)^n\cdot\frac{1}{n!}, \cdots$;

(d) $1, c, c^2, \cdots, c^n, \cdots$;

(e) $1, 2, 3, \cdots, (n+1), \cdots$;

(f) $0, 1, 2^2, 3^2, \cdots, n^2, \cdots$。

解

(a) $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\dfrac{1}{1+x}$

(b) $f(x)=\binom{\alpha}{0}-\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2-\cdots+(-1)^n\binom{\alpha}{n}x^n$
$+\cdots=(1-x)^\alpha$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{0!}-\dfrac{1}{1!}x+\dfrac{1}{2!}x^2-\cdots+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots$
$=e^{-x}$

(d) $f(x)=1+cx+c^2x^2+\cdots+c^n x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-cx}$

(e) $f(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$

因为 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$，两边对 x 微分得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

所以 $$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

(f) 由(e)得 $$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

两边乘 x 得

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$$

两边对 x 微分后再乘 x 得

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots+n^2x^n+\cdots$$

所以 $f(x)=0+x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots+n^2x^n+\cdots=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

评注 微分和积分是我们求生成函数常用方法之一。

6.2 设 $S=\{\infty\cdot e_1, \infty\cdot e_2, \cdots, \infty\cdot e_k\}$, a_n 为 S 的 n 组合个数，确定 a_n 的生成函数，并由此求出 a_n。

解 考虑下面 k 个形式幂级数的乘积

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)\cdot\cdots\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots) \qquad (*)$$

它的展开式中每一项 x^n 有如下形式

$$x^{m_1}\cdot x^{m_2}\cdot\cdots\cdot x^{m_k}=x^n,\quad m_1+m_2+\cdots+m_k=n$$

其中 $x^{m_1}, x^{m_2}, \cdots, x^{m_k}$ 分别取自(*)式第一个，…，第二个，…，第 k 个因子，如果我们把第一个因子与 e_1 对应；第二个因子与 e_2 对应；…，第 k 个因子与 e_k 对应。把第 i 个因子中取出项 x^{m_i} 理解为 e_i 被取了 m_i 次，由于 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$，所以 x^n 实际上重复了 $m_2 S$ 中取出 n 个的一种取法，其中 e_1 重复了 m_1 次，e_2 对应了从次，…，e_k 重复了 m_k 次。所以(*)式中 x^n 的系数表达了 S 的 n 组合个数 a_n。因而序列 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)^k$$

而 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$，所以有

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^k}=1+kx+\frac{k(k+1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}x^n+\cdots$$

从而有

$$a_n=\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}=\binom{k+n-1}{n}$$

这与第二章定理 2.8 的结果是一致的。

6.3 设 $S=\{\infty\cdot e_1, \infty\cdot e_2, \cdots, \infty\cdot e_k\}$, a_n 是 S 的 n 组合个数，在这些 n 组合中，S 的每一元素出现偶数次，确定序列 $\{a_n\}$

的生成函数，并由此求出a_n。

解 令$\{a_n\}$的生成函数是$f(x)$，用完全类似于上题的分析得

$$f(x)=(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots)^k$$

而$1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$，所以

$$f(x)=\frac{1}{(1-x^2)^k}=1+kx^2+\frac{k(k+1)}{2!}x^4+\cdots$$
$$+\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}x^{2n}+\cdots$$

从而有
$$a_{2n}=\binom{k+n-1}{n}$$

显然$a_{2n-1}=0(n=0, 1, 2, \cdots)$。

评注 我们也可以从另一角度给出证明。

$S=\{\infty\cdot e_1, \infty\cdot e_2, \cdots, \infty\cdot e_k\}$的每一个$e_i$出现偶数次的$2n$组合能如下地以一对一形式与$S$的$n$组合等同。给定一个$S$的$2n$组合$\{m_1e_1, m_2e_2, \cdots, m_ke_k\}$，其中$m_1, m_2, \cdots, m_k$都是偶数，我们将它与$n$组合$\left\{\frac{m_1}{2}e_1, \frac{m_2}{2}e_2,\cdots, \frac{m_k}{2}e_k\right\}$对应；反之，若给定一个$n$组合$\{p_1e_1, p_2e_2, \cdots, p_ke_k\}$我们可以将它与$2n$组合$\{2p_1e_1, 2p_2e_2, \cdots, 2p_ke_k\}$对应，其中每个$e_i$出现偶数次。由此证明了问题的结论。

一般地说，多重集$S=\{\infty\cdot e_1, \infty\cdot e_2, \cdots, \infty\cdot e_k\}$中，$e_i$出现$a_i$的倍数次的$n$组合的生成函数为

$$f(x)=\frac{1}{(1-x^{a_1})\cdot(1-x^{a_2})\cdot\cdots\cdot(1-x^{a_k})}$$

6.4 设$S=\{\infty\cdot e_1, \infty\cdot e_2, \infty\cdot e_3, \infty\cdot e_4\}$，$a_n$是具有下列附加条件的$S$的$n$组合数，确定序列$\{a_n\}$的一般生成函数。

(a) 每一 e_i 出现奇数次。

(b) 每一 e_i 出现 3 的倍数次。

(c) 元素 e_1 不出现，e_2 最多出现一次。

(d) 元素 e_1 出现 1, 3 或 11 次，元素 e_2 出现 2, 4 或 5 次。

(e) 每一 e_i 至少出现 10 次。

解 设序列 $\{a_n\}$ 的生成函数为 $f(x)$，则

(a) $f(x)=(x+x^3+x^5+\cdots)^4=\dfrac{x^4}{(1-x^2)^4}$

(b) $f(x)=(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)^4=\dfrac{1}{(1-x^3)^4}$

(c) $f(x)=x\cdot(1+x+x^2+\cdots)^2=\dfrac{x}{(1-x)^2}$

(d) $$f(x)=(x+x^3+x^{11})\cdot(x^2+x^4+x^5)\cdot(1+x+x^2+\cdots)^2$$
$$=\frac{x^3+2x^5+x^6+x^7+x^8+x^{13}+x^{15}+x^{16}}{(1-x)^2}$$

(e) $f(x)=(x^{10}+x^{11}+\cdots)^4=\dfrac{x^{40}}{(1-x)^4}$

6.5 设口袋中放着 12 个球，其中 3 个是红的，3 个是白的，6 个是黑的，从中取出 r 个球，问有多少种不同的取法？

解 设不同的取法有 a_r 种，考虑下面形式的幂级数

$$(1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) \qquad (*)$$

它的展开式中的每一项 x^r 必定有如下形式

$$x^{m_1}\cdot x^{m_2}\cdot x^{m_3}=x^r,\ m_1+m_2+m_3=r$$

其中 $0\leqslant m_1\leqslant 3$, $0\leqslant m_2\leqslant 3$, $0\leqslant m_3\leqslant 6$。$x^{m_1}$, x^{m_2}, x^{m_3} 分别取自第一个因子，第二个因子和第三个因子。如果我们让第一、二、三个因子分别对应红、白、黑三种球，从第一个因子中取 x^{m_1} 理解为“红球被取了 m_1 个”，从第二个因子中取 x^{m_2} 理解为“白球

被取了 m_2 个”，从第三个因子中取 x^{m_3} 理解为“黑球被取了 m_3 个”，由于一、二、三个因子中最高次数分别是 3、3、6，所以在任一取法中，红球不能超过 3 个，白球不能超过 3 个，黑球不能超过 6 个。这样一来，(*)式的展开式中每个 x^r 对应一种红、白、黑球的取法，所以 x^r 的系数就是 a_r，(*)式是 $\{a_r\}$ 的生成函数。即有

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$$

展开后取 x^r 的系数即为问题的解。

评注 这个问题实际上是求多重集 $S=\{3\cdot$红$,3\cdot$白$,6\cdot$黑$\}$ 的 r 组合数。一般讲来，多重集 $S=\{n_1\cdot e_1,\ n_2\cdot e_2,\ \cdots,\ n_k\cdot e_k\}$ 的 r 组合数 a_r 的生成函数是

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{n_1})\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^{n_2})\cdot\cdots\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^{n_k})$$

6.6 口袋中有白球 5 个，红球 3 个，黑球 2 个，每次从中取 5 个，问有多少种不同的取法？

解 问题等价于求多重集 $S=\{5$ 白，3 红，2 黑$\}$ 的 5 组合数。

设 S 的 r 组合的个数为 a_r，则序列 $\{a_r\}$ 的生成函数为

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\\&\quad\cdot(1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x+x^2)\\&=1+3x+6x^2+9x^3+11x^4+12x^5+11x^6\\&\quad+9x^7+6x^8+3x^9+x^{10}\end{aligned}$$

由 x^5 的系数为 12 知，每次取 5 个球的不同取法有 12 种。

6.7 设有 1 克重的砝码一枚，3 克重的砝码 3 枚，7 克重的砝码 2 枚。用这 6 枚砝码能秤哪几种重量的物体？

解 设用这 6 枚砝码秤 r 克重的物体有 a_r 种秤法，那么数

列 $\{a_r\}$ 的生成函数是

$$f(x)=(1+x)(1+x^3+x^6+x^9)\cdot(1+x^7+x^{14})$$

展开后得

$$f(x)=1+x+x^3+x^4+x^6+2x^7+x^8+x^9+2x^{10}+x^{11}+x^{13}+2x^{14}+x^{15}+x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{20}+x^{21}+x^{23}+x^{24}$$

由此可知，在重量不超过 24 克的物体中，除了重量为 2 克、5 克、12 克、19 克、22 克的物体不能秤之外，其它都能秤。并且重量分别为 7 克、10 克、14 克、17 克的物体都有二种不同的秤法。

6.8 把正整数 8 写成三个非负整数 n_1, n_2, n_3 的和，要求 $n_1\leqslant3$, $n_2\leqslant3$, $n_3\leqslant6$。问有多少种不同的写法?

解 问题等价于求多重集 $S=\{3\cdot n_1,\ 3\cdot n_2,\ 6\cdot n_3\}$ 的 8 组合数。

设 S 的 r 组合数为 a_r，则序列 $\{a_r\}$ 的生成函数为

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3)^2\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$$

展开后得 x^8 的系数 $a_8=13$，故满足条件的写法有 13 种。

6.9 在上题中，如果要求 $1\leqslant n_1\leqslant3$, $0\leqslant n_2\leqslant3$, $2\leqslant n_3\leqslant6$，又有多少种不同的写法?

解 问题归结为求多重集 $S'=\{3\cdot n_1,\ 3\cdot n_2,\ 6\cdot n_3\}$ 中 n_1 至少出现一次，n_3 至少出现 2 次的 8 组合数。即求多重集

$$S=\{2\cdot n_1,\ 3\cdot n_2,\ 4\cdot n_3\}$$

的 $8-1-2=5$ 组合个数。

设 S 的 r 组合数为 a_r，则序列 $\{a_r\}$ 的生成函数为

$$f(x)=(1+x+x^2)\cdot(1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

展开后得 x^5 的系数 $a_5=11$，所以满足条件的写法有 11 种。

评注 6.5～6.9 诸题均可用包含-排斥原理来求解，但用

生成函数的方法显然比用包含-排斥原理方法较为直观，这说明生成函数方法是求解计数问题的较好的方法。

6.10 在一个程序设计课程里，每个学生的每个任务最多可以运行十次。教员发现某个任务共运行了38次。设有15名学生，每个学生对这一任务至少做一次。求观察到的总次数的组合数。

解 我们先考虑有n个学生的一般情况，并记观察的运行总数的组合数为a_n。因为每个学生至多运行10次，按题意至少运行1次，所以$\{a_n\}$序列的生成函数是

$$\begin{aligned}
&(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10})^n\\
&=[(x+x^2+x^3+\cdots)-(x^{11}+x^{12}+x^{13}+\cdots)]^n\\
&=[x(1+x+x^2+x^3+\cdots)-x^{11}(1+x+x^2+x^3+\cdots)]^n\\
&=[(x-x^{11})\cdot(1+x+x^2+x^3+\cdots)]^n\\
&=x^n(1-x^{10})^n\cdot\frac{1}{(1-x)^n}\\
&=x^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{10k}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r\\
&=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+r-1}{r}\cdot\binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{n+r+10k}
\end{aligned}$$

$x^{n+r+10k}$的系数是运行总次数为$n+r+10k$时n个学生运行次数组合的总个数，本题运行总次数为38，故有

$$n+r+10k=38$$

以$n=15$代入得$r+10k=23$，解得

$$\begin{cases}r=23\\k=0\end{cases}\quad\begin{cases}r=13\\k=1\end{cases}\quad\begin{cases}r=3\\k=2\end{cases}$$

因此各种组合总个数是这些k、r值的三组系数的总和，它是

$$\binom{15+23-1}{23}\binom{15}{0}-\binom{15+13-1}{13}\binom{15}{1}$$
$$+\binom{15+3-1}{3}\binom{15}{2}=5,806,283,700$$

6.11 设 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 是 $n=0$, 1, 2, $\cdots$ 时由 $a_n=n^3$ 所定义的序列。证明 $n=1$, 2, 3, $\cdots$ 时有 $a_n=a_{n-1}+3n^2-3n+1$，并应用这一递推关系去确定这一序列的生成函数。

解 因为 $a_n=n^3$，所以 $a_{n-1}=(n-1)^3$，故有

$$a_n-a_{n-1}=n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

即 $a_n=a_{n-1}+3n^2-3n+1$。

设序列 $\{a_n\}$ 所对应的生成函数为 $f(x)$，即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则

$$f(x)-xf(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+\cdots+(a_n-a_{n-1})x^n+\cdots$$

即

$$(1-x)f(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+\cdots+(a_n-a_{n-1})x^n+\cdots$$

因为 $a_n-a_{n-1}=3n^2-3n+1$，令 $b_n=n^2$，$c_n=n$，$d_n=1$。

序列 $\{b_n\}$ 的生成函数为

$$\begin{aligned}g_1(x)&=x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots+n^2x^n+\cdots\\&=x(1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots)\\&=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

序列 $\{c_n\}$ 的生成函数为

$$\begin{aligned}g_2(x)&=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots\\&=\frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

序列 $\{d_n\}$ 的生成函数为

$$g_3(x)=x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}$$

所以

$$(1-x)f(x)=3g_1(x)-3g_2(x)+g_3(x)=\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^3}$$

即
$$f(x)=\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$$

评注 有些序列 $\{a_n\}$ 的生成函数很复杂，需由几个生成函数组合而成，本题是这方面的一个简单例子。

6.12 把上题推广到一般情况，设 k 是一正整数，序列 $\{a_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 是由 $a_n=n^k$ 所定义，确定这一序列所满足的递推关系，然后确定它的生成函数。

解 因为 $a_n=n^k$，$a_{n-1}=(n-1)^k$，所以

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=n^k-(n-1)^k\\&=n^k-\left(n^k-\binom{k}{1}n^{k-1}+\binom{k}{2}n^{k-2}-\cdots+(-1)^k\right)\\&=\binom{k}{1}\cdot n^{k-1}-\binom{k}{2}n^{k-2}+\cdots+(-1)^{k+1}\end{aligned}$$

即
$$a_n=a_{n-1}+\left[\binom{k}{1}\cdot n^{k-1}-\binom{k}{2}\cdot n^{k-2}+\cdots+(-1)^{k+1}\right]$$

设 $\{a_n\}$ 所确定的生成函数是 $f(x)$，并设 $b_n^{(1)}=n^{k-1}$，$b_n^{(2)}=n^{k-2}$，$\cdots$，$b_n^{(k)}=1$，序列 $\{b_n^{(1)}\}$，$\{b_n^{(2)}\}$，$\cdots$，$\{b_n^{(k)}\}$ 的生成函数分别是 $g_1(x)$，$g_2(x)$，$\cdots$，$g_k(x)$，那末

$$\begin{aligned}f(x)-xf(x)=&(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+\cdots\\&+(a_n-a_{n-1})x^n+\cdots\end{aligned}$$

而
$$a_n-a_{n-1}=\binom{k}{1}n^{k-1}-\binom{k}{2}n^{k-2}+\cdots+(-1)^{k+1}$$

所以

$$(1-x)f(x)=\binom{k}{1}g_1(x)-\binom{k}{2}g_2(x)+\cdots$$
$$+(-1)^{k+1}g_k(x)$$

即 $$f(x)=\frac{\binom{k}{1}g_1(x)-\binom{k}{2}g_2(x)+\cdots+(-1)^{k+1}g_k(x)}{1-x}$$

6.13 (a) 设序列 $\{a_n\}(n=0, 1, 2, \cdots)$，由 $a_n=\binom{n}{2}$所定义，确定这一序列的生成函数。

(b) 设序列 $\{a_n\}(n=0, 1, 2, \cdots)$由 $a_n=\binom{n}{3}$所定义，确定这一序列的生成函数。

(c) 设序列 $\{a_n\}(n=0, 1, 2, \cdots)$由 $a_n=\binom{n}{k}$所定义，确定这一序列的生成函数。

解 首先有$\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i-1}{i}x^i$，设序列 $\{a_n\}$ 的生成函数为 $f(x)$。

(a) $$f(x)=\binom{2}{2}x^2+\binom{3}{2}x^3+\binom{4}{2}x^4+\cdots+\binom{n}{2}x^n+\cdots$$
$$=x^2\left[1+\binom{3}{2}x+\binom{4}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{2}x^{n-2}+\cdots\right]$$
$$=x^2\left[1+3x+\frac{4!}{2!(4-2)!}x^2+\frac{5!}{2!(5-2)!}x^3+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot x^{n-2}+\cdots\right]$$
$$=x^2\left[1+3x+\frac{3(3+1)}{2!}x^2+\frac{3(3+1)(3+2)}{3!}x^3\right.$$

$$+\cdots+\frac{3(3+1)\cdots(3+n-1)}{(n-2)!}x^{n-2}+\cdots\Big]$$

$$=x^2\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{x^2}{(1-x)^3}$$

(b) $f(x)=\binom{3}{3}x^3+\binom{4}{3}x^4+\cdots+\binom{n}{3}x^n+\cdots$

$$=x^3\Big[1+4x+\frac{4(4+1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{4(4+1)\cdot\cdots\cdot(4+n-1)}{(n-3)!}x^{n-3}+\cdots\Big]$$

$$=\frac{x^3}{(1-x)^4}$$

(c) $f(x)=\binom{k}{k}x^k+\binom{k+1}{k}x^{k+1}+\cdots+\binom{n}{k}x^n+\cdots$

$$=\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

6.14 应用生成函数的方法解下列递推关系。

(a) $\begin{cases} a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2} & n\geqslant 2, \\ a_0=1,\ a_1=-2; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} a_n=a_{n-1}+9a_{n-2}-9a_{n-3} & n\geqslant 3, \\ a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2。 \end{cases}$

解 (a) 设 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则
$$-5xf(x)=-5a_0x-5a_1x^2-\cdots-5a_{n-1}x^n-\cdots$$

$$6x^2f(x)=6a_0x^2+6a_1x^3+\cdots+6a_{n-2}x^n+\cdots$$

以上三式相加得

$$(1-5x+6x^2)f(x)=a_0+(a_1-5a_0)x$$

$$+(a_2-5a_1+6a_0)x^2+\cdots$$

$$+(a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2})x^n+\cdots$$

因为对于 $n\geqslant 2$ 有 $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0$，并且 $a_0=1$，$a_1=-2$，所以有

$$(1-5x+6x^2)f(x)=1-7x$$

即

$$f(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{1-7x}{(1-2x)(1-3x)}=\frac{5}{1-2x}-\frac{4}{1-3x}$$
$$=5\cdot(1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots)$$
$$-4(1+3x+3^2x^2+\cdots+3^nx^n+\cdots)$$

所以 $$a_n=5\cdot 2^n-4\cdot 3^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(b) 设 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则 $$-xf(x)=-a_0x-a_1x^2-\cdots-a_{n-1}x^n-\cdots$$
$$-9x^2f(x)=-9a_0x^2-9a_1x^3-\cdots-9a_{n-2}x^n-\cdots$$
$$9x^3f(x)=9a_0x^3+\cdots+9a_{n-3}x^n+\cdots$$

以上四式相加得

$$(1-x-9x^2+9x^3)f(x)=a_0+(a_1-a_0)x$$
$$+(a_2-a_1-9a_0)x^2+(a_3-a_2-9a_1+9a_0)x^3+\cdots$$
$$+(a_n-a_{n-1}-9a_{n-2}+9a_{n-3})x^n+\cdots$$

而 $a_0=0, a_1=1, a_2=2$ 且当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n-a_{n-1}-9a_{n-2}+9a_{n-3}=0$，所以有

$$(1-x-9x^2+9x^3)f(x)=x+x^2$$

即

$$f(x)=\frac{x+x^2}{1-x-9x^2+9x^3}=\frac{x+x^2}{(x-1)(3x+1)(3x-1)}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3x+1}-\frac{1}{3}\ \frac{1}{3x-1}$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1+3x}+\frac{1}{3}\ \frac{1}{1-3x}$$

而
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$
$$\frac{1}{1+3x}=1-3x+3^2x^2-\cdots+(-1)^n3^nx^n+\cdots$$
$$\frac{1}{1-3x}=1+3x+3^2x^2+\cdots+3^nx^n+\cdots$$
从而有
$$a_n=-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}(-1)^n\cdot 3^n+\frac{1}{3}\cdot 3^n$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-1)^n\cdot 3^{n-1}+3^{n-1}$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\cdot 3^n & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\\ -\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}\cdot 3^{n-1} & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\end{cases}$$

6.15 本章题6.2的另一解法。

设 $S=\{\infty\cdot e_1, \infty\cdot e_2, \cdots,\infty\cdot e_k\}$，求 S 的 n 组合数。

解 设 S 的 n 组合数为 $f(k, n)$。S 中的 e_1 有二种可能，(1) e_1 不被选进任何一个 n 组合。(2) e_1 至少被选进一个 n 组合。对于情况 (1)，n 组合中的 n 个元素必须取自其它 $k-1$ 个不同的元素，故有 $f(k-1, n)$ 种选法。对于情况 (2)，n 组合中的其它 $n-1$ 个元素必须取自 k 个不同的元素中，故有 $f(k, n-1)$ 种取法。由加法原理得
$$f(k, n)=f(k-1, n)+f(k, n-1)$$
显然有 $f(k, 0)=1$。下面用生成函数来解这个双参数的递推关系。

我们固定 k，令 $\{f(k, n)\}$ 的生成函数为
$$G_k(x)=1+f(k, 1)x+f(k, 2)x^2+f(k, 3)x^3+\cdots$$
则

$$
\begin{aligned}
x\cdot G_k(x)+G_{k-1}(x)&=(x+f(k,1)x^2+f(k,2)x^3+\cdots)\\
&\quad+(1+f(k-1,\ 1)x+f(k-1,\ 2)x^2\\
&\quad+f(k-1,\ 3)x^3+\cdots)\\
&=1+[1+f(k-1,\ 1)]x+[f(k,\ 1)+f(k-1,\ 2)]x^2\\
&\quad+[f(k,\ 2)+f(k-1,\ 3)]x^3+\cdots\\
&=1+f(k,\ 1)x+f(k,2)x^2+f(k,\ 3)x^3+\cdots\\
&=G_k(x)
\end{aligned}
$$

所以有 $G_k(x)=\dfrac{1}{1-x}G_{k-1}(x)$。由此递推下去得

$$
G_k(x)=\frac{1}{(1-x)^{k-1}}\cdot G_1(x)
$$

而

$$
\begin{aligned}
G_1(x)&=1+f(1,\ 1)x+f(1,\ 2)x^2+f(1,\ 3)x^3+\cdots\\
&\quad+f(1,\ n)x^n+\cdots=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\\
&=\frac{1}{1-x}
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
G_k(x)&=\frac{1}{(1-x)^k}\\
&=1+kx+\frac{k(k+1)}{2!}x^2+\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3+\cdots\\
&\quad+\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}\cdot x^n+\cdots
\end{aligned}
$$

从而得 $\quad a_n=\dfrac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}{n!}=\dbinom{k+n-1}{n}$

这和题6.2的结果是一致的。

6.16 用生成函数的方法解题5.39——求由 $n+2$ 条边的凸多边形为它的对角线划分所得的区域个数，其中假定没有三条对角线在凸多边形内部有公共点。

解 设划分的区域数为 $h(n)$，则题 5.39 建立的递推关系是

$$\begin{cases} h(n)=h(n-1)+\binom{n+1}{3}+n & n\geqslant 2 \\ h(0)=0,\ h(1)=1 \end{cases}$$

设 $\{h(n)\}$ 的生成函数为

$$f(x)=h(0)+h(1)x+h(2)x^2+h(3)x^3+\cdots+h(n)x^n+\cdots$$

则

$$-xf(x)=-h(0)x-h(1)x^2-h(2)x^3-\cdots-h(n-1)x^n-\cdots$$

两式相加得

$$\begin{aligned}(1-x)f(x)&=[h(1)-h(0)]x+[h(2)-h(1)]x^2\\&\quad+[h(3)-h(2)]x^3+\cdots\\&\quad+[h(n)-h(n-1)]x^n+\cdots\\&=x+\left[\binom{3}{3}+2\right]x^2+\left[\binom{4}{3}+3\right]x^3+\cdots\\&\quad+\left[\binom{n+1}{3}+n\right]x^n+\cdots\\&=(x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots)\\&\quad+\left[\binom{3}{3}x^2+\binom{4}{3}x^3+\cdots+\binom{n+1}{3}x^n+\cdots\right]\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots)\\&\quad\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)\\&\quad+\left[\binom{3}{3}x^2+\binom{4}{3}x^3+\cdots+\binom{n+1}{3}x^n+\cdots\right]\\&\quad\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)\end{aligned}$$

因为有

$$\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{n+1}{k}=\binom{n+2}{k+1}$$

取 $k=3$ 展开 $f(x)$ 可得 x^n 的系数

$$h(n)=(n+(n-1)+\cdots+1)+\left[\binom{n+1}{3}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{3}{3}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\binom{n+2}{4}$$

6.17 放射化学家做一种试验，把 H_2 分子喷射到一个面上，形成厚度为一个 H 原子厚度的薄膜。一个 H_2 分子由二个 H 原子构成。我们取 $1\times n$ 的方格的矩形作为这个面，每个 H_2 分子占有相邻的二个方格，这样将造成有些格空着而其它的 H_2 分子无法占用。求 n 个格子中的平均空格数。

解

如图 6.1 所示，若第一个 H_2 分子占有 $i+1$，$i+2$ 两个格，则它把 $1\times n$ 方格分成两段，即 $1\to i$ 和 $i+3\to n$。令 a_n 为 n 个格子中的平均空格数。则 $1\to i$ 和 $i+3\to n$ 的平均空格数为 a_i 和 a_{n-i-2}，假定分子落入所有相邻两格的概率相同，均为 $\frac{1}{n-1}$，则有

$$a_n=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-2}(a_i+a_{n-i-2})\right]$$

即 $(n-1)a_n=2\sum_{i=0}^{n-2}a_i$，也有 $(n-2)a_{n-1}=2\sum_{i=0}^{n-3}a_i$。两式相减得

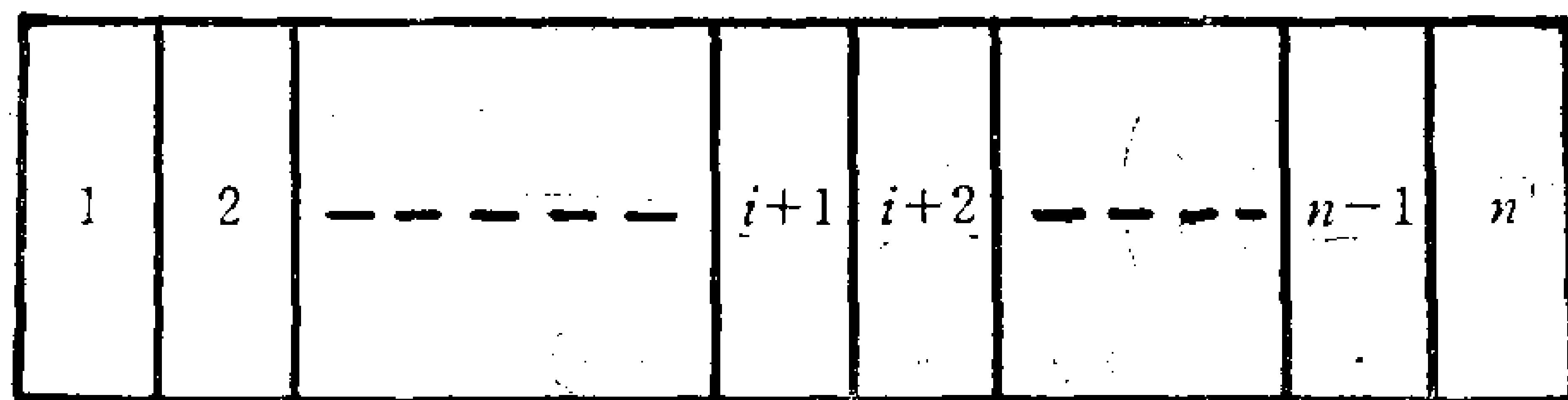


图 6.1

$$(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}=2a_{n-2}\quad(n\geqslant 2)$$

显然有 $a_0=0$, $a_1=1$。下面用生成函数来解此递推关系。

首先有 $a_2=0\cdot a_1+2\cdot a_0=0$。设 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则

$$A'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$x\cdot A'(x)=a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\cdots+na_nx^n+\cdots$$

所以有

$$xA'(x)-A(x)=-a_0+a_2x^2+2a_3x^3+\cdots+(n-1)a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

$$-x[xA'(x)-A(x)]=-a_2x^3-2a_3x^4-\cdots-(n-2)a_{n-1}x^n-(n-1)a_nx^{n+1}-\cdots \tag{2}$$

$$-2x^2A(x)=-2a_1x^3-2a_2x^4-\cdots-2a_{n-2}x^n-\cdots \tag{3}$$

(1)+(2)+(3)得

$$(x-x^2)A'(x)=(1-x+2x^2)A(x)$$

解此常微分方程得

$$A(x)=c\cdot e^{-2x}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}$$

其中 c 为常数，因为

$$e^{-2x}=1+\frac{(-2)}{1!}x+\frac{(-2)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-2)^n}{n!}x^n+\cdots$$

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+\cdots+nx^n+\cdots$$

所以 $e^{-2x}\cdot\dfrac{x}{(1-x)^2}$ 的展开式中 x^n 的系数为

$$\sum_{i=1}^{n} i\,\frac{(-2)^{n-i}}{(n-i)!}\quad(n\geqslant 1)$$

即有 $a_n=c\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot\dfrac{(-2)^{n-i}}{(n-i)!}$，因为 $a_1=1$，所以有 $c=1$，从而得

$$a_n=\sum_{i=1}^{n} i\,\frac{(-2)^{n-i}}{(n-i)!}$$

6.18 一个 n 边形的一个对角线三角剖分是插入不在内部相交的对角线，以划分区域为三角形的 剖分。求具有 $n+1$ 条边的凸多边形的对角线三角形剖分数。$(n\geqslant 3)$

解 本题就是上一章的题5.25。设 a_n 表示 $n+1$ 条边的凸多边形为它的对角线所划分成的三角形个数，在题 5.25 中已建立了递推关系式：

$$\begin{cases} a_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cdot a_{n-k} & n\geqslant 2 \\ a_1=1,\ a_2=1 \end{cases} \tag{*}$$

现从另一角度解出它。设 $\{a_n\}$ 的生成函数是

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

将 $f(x)$ 自乘得

$$\begin{aligned} f^2(x)&=(a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)^2\\ &=a_1x^2+(a_1a_2+a_2a_1)x^3+(a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1)x^4+\cdots\\ &\quad+(a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_{n-1}a_1)x^n+\cdots \end{aligned}$$

应用递推关系(*)式及 $a_1=a_2=1$ 的事实得

$$\begin{aligned} f^2(x)&=a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+\cdots\\ &=f(x)-a_1x=f(x)-x \end{aligned}$$

即有 $f^2(x)-f(x)+x=0$，解得

$$f_1(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2},\quad f_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

由 $f(x)$ 的定义知，$f(0)=0$，而 $f_1(0)=1$，不合题意，故只有 $f_2(x)$ 是解，于是

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

因为 $(1+z)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^{2n-1}}\cdot\binom{2n-2}{n-1}\cdot z^n$ 对 $|z|<1$，所以以 $z=-4x$ 代入，当 $|x|<\frac{1}{4}$ 时有

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^{2n-1}}\cdot\binom{2n-2}{n-1}\cdot(-1)^n\cdot 4^n\cdot x^n$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\cdot x^n$$

即有

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\cdot x^n\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\cdot x^n$$

从而有 $a_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$，此即 Catalan 数，同前面得到的结论是一致的。

6.19 考虑内有核子以及高能和低能自由粒子的核反应堆里的原子核反应。可能有两种事件：(1) 高能粒子撞击一个核子并被吸收，引起发射出三个高能粒子和一个低能粒子；(2) 低能粒子撞击一个核子并被吸收，引起发射两个高能粒子和一个低能粒子。我们假定每个自由粒子在它被发射出 1 μs 之后发生一个事件，假设在 $t=0$ 时刻仅有一个高能粒子射向一个仅有核子的系统，我们需要去决定 r μs 时刻，系统中高能和低能粒子的个数。

解 设 a_r 和 b_r 分别为时刻 r 时高能和低能粒子的个数，则有

$$\begin{cases} a_r=3a_{r-1}+2b_{r-1} \\ b_r=a_{r-1}+b_{r-1} \end{cases} \qquad (*)$$

显然有 $a_0=1,\ b_0=0$。

设序列 $\{a_r\}$ 的生成函数为

$$A(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

序列 $\{b_r\}$ 的生成函数为

$$B(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

对(*)式两边求和得

$$\begin{cases}\sum_{r=1}^{\infty} a_rz^r=\sum_{r=1}^{\infty} 3a_{r-1}z^r+\sum_{r=1}^{\infty} 2b_{r-1}\cdot z^r\\ \sum_{r=1}^{\infty} b_r\cdot z^r=\sum_{r=1}^{\infty} a_{r-1}\cdot z^r+\sum_{r=1}^{\infty} b_{r-1}\cdot z^r\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}A(z)-1=3\cdot zA(z)+2\cdot z\cdot B(z)\\ B(z)=z\cdot A(z)+z\cdot B(z)\end{cases}$$

解此联立方程得

$$A(z)=\frac{1-z}{1-4z+z^2}=\frac{(3+\sqrt{3})/6}{1-(2+\sqrt{3})z}+\frac{(3-\sqrt{3})/6}{1-(2-\sqrt{3})z}$$

$$B(z)=\frac{z}{1-4z+z^2}=\frac{\sqrt{3}/6}{1-(2+\sqrt{3})z}-\frac{\sqrt{3}/6}{1-(2-\sqrt{3})z}$$

展开后求得

$$a_r=\frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^r+\frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^r$$

$$b_r=\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^r-\frac{\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^r$$

6.20 在一个核反应器内有两类粒子，在每一秒钟里，一个 α 粒子分裂为三个 β 粒子；一个 β 粒子分裂为一个 α 粒子和两个 β 粒子。如果在时间 $t=0$ 时反应器里只有一个 α 粒子，那么在时间 $t=100$ 时，总共有多少粒子？

解 设 $t=r$ 秒时，反应器里有 α 粒子 a_r 个和 β 粒子 b_r 个。

则由题意可以列出递推关系

$$\begin{cases} a_r = b_{r-1} \\ b_r = 3a_{r-1} + 2b_{r-1} \end{cases} \qquad (*)$$

显然有 $a_0=1$，$b_0=0$。

设序列 $\{a_r\}$ 的生成函数为 $A(z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r$，序列 $\{b_r\}$ 的生成函数为 $B(z)=\sum_{r=0}^{\infty}b_r\cdot z^r$。对(*)式两边求和可得

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^{\infty} a_r z^r = \sum_{r=1}^{\infty} b_{r-1}\cdot z^r \\ \sum_{r=1}^{\infty} b_r\cdot z^r = 3\sum_{r=1}^{\infty} a_{r-1}\cdot z^r + 2\sum_{r=1}^{\infty} b_{r-1}\cdot z^r \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} A(z)-1 = z\cdot B(z) \\ B(z) = 3\cdot z\cdot A(z) + 2zB(z) \end{cases}$$

解得
$$A(z) = \frac{2z-1}{3z^2+2z-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-3z}+\frac{3}{1+z}\right)$$

$$B(z) = \frac{-3z}{3z^2+2z-1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-3z}-\frac{1}{1+z}\right)$$

展开后得
$$a_r = \frac{1}{4}[3^r + 3\cdot(-1)^r]$$

$$b_r = \frac{3}{4}[3^r - (-1)^r]$$

以 $t=100$ 代 r 得

$$a_{100} = \frac{1}{4}[3^{100}+3]$$

$$b_{100} = \frac{3}{4}[3^{100}-1]$$

所以总的粒子数为 $a_{100}+b_{100}=3^{100}$ 个。

6.21 证明将正整数 m 划分成若干个 a，若干个 b，若干个 c，… 的方法数的生成函数是 $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$。

证 首先可以证明将 m 划分成若干个 a, 若干个 b, 若干个 c, $\cdots$ 的方法数等于整数方程

$$ax_1+bx_2+cx_3+\cdots=m \qquad (*)$$

的解的个数。因为若给出 m 的一个剖分由 x_1 个 a, x_2 个 b, x_3 个 c, $\cdots$构成, 则有 $ax_1+bx_2+cx_3+\cdots=m$; 反之, 若给出了方程 $ax_1+bx_2+cx_3+\cdots=m$ 的一组解$(x_1, x_2, x_3\cdots)$, 显然能得到由 x_1 个 a, x_2 个 b, x_3 个 c, $\cdots$构成的 m 的一个剖分。因此两者一一对应, 从而证明了上面的结论。

在

$$\frac{1}{(1-x^a)\cdot(1-x^b)\cdot(1-x^c)\cdots}=(1+x^a+x^{2a}+x^{3a}+\cdots)$$
$$\cdot(1+x^b+x^{2b}+x^{3b}+\cdots)\cdot(1+x^c+x^{2c}+x^{3c}+\cdots)\cdots\cdots$$

的展开式中, 项 x^m 必可写成

$$x^m=x^{m_1a}\cdot x^{m_2b}\cdot x^{m_3c}\cdot\cdots=x^{m_1a+m_2b+m_3c+\cdots}$$

这里 x^{m_1a}, x^{m_2b}, x^{m_3c}, $\cdots$ 分别取自第一, 二, 三, $\cdots$个括弧, m_1, m_2, m_3, $\cdots$ 都是非负整数。于是可得

$$m=m_1a+m_2b+m_3c+\cdots$$

所以$(m_1, m_2, m_3, \cdots)$是方程 (*)的一个非负整数解。反之, 给出 (*) 式的任一非负整数解 $(m_1, m_2, m_3, \cdots)$ 一定也对应着展开式中的一个项 x^m。所以(*)式的非负整数解的个数等于展开式中 x^m 的系数, 从而说明将 m 划分成若干个 a, 若干个 b, 若干个 c, $\cdots$ 的方法数的生成函数是

$$\frac{1}{(1-x^a)\cdot(1-x^b)\cdot(1-x^c)\cdot\cdots}$$

评注 若令 $P_0(n)$ 为将 n 分成每项是奇整数且允许重复的剖分的数目, 则 $\{P_0(n)\}$ 的生成函数为

$$\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^5)\cdots\cdots}$$

若令 $P(n)$ 表示 n 的剖分数目，则 $\{P(n)\}$ 的生成函数是 $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}$。当 n 较大时，由此求出 $P(n)$ 是较困难的，所以数学家给出了它的近似值

$$P(n)\approx\frac{1}{4\sqrt{3}\,n}e^{\pi\sqrt{2/3}\cdot\sqrt{\pi}}$$

若令 $P_k(n)$ 为将 n 分成各项属于 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的剖分数目，则 $\{P_k(n)\}$ 的生成函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$$

6.22 求下述剖分——把正整数 n 拆分成各项属于 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 且 m 至少出现一次的个数的生成函数。

解 应用上一题的结果得所求的生成函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

或
$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

所求的剖分数是 $P_m(n)-P_{m-1}(n)$。

6.23 证明在 $(1+x^a)(1+x^b)(1+x^c)\cdots$ 的级数展开式中，x^m 的系数是将 m 写成用 $a, b, c, \cdots$ 且至多每个取一次的和的方法数。

证 我们可以在级数的第一因子中要末选取 1，要末选取 x^a，没有再选取其它的余地。对于 $b, c, \cdots$ 同样如此。所以在级数的展开式中，x^m 的系数是将 m 写成用 $a, b, c, \cdots$ 且至多每个取一次的和的方法数。

评注 若令 $P_d(n)$ 为将 n 分成各项完全不同的剖分的数目。则 $\{P_d(n)\}$ 的生成函数为

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$$

若令 $P_t(n)$ 为将 n 分成完全不同的 2 的幂的剖分数目，则 $\{P_t(n)\}$ 的生成函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

6.24 对于所有的 n，证明 $P_0(n)=P_d(n)$。

证 因为 $\{P_d(n)\}$ 的生成函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

而

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x}$$

$$1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2}$$

$$1+x^3=\frac{1-x^6}{1-x^3}$$

$$1+x^4=\frac{1-x^8}{1-x^4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

将所有的式子相乘得

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots\cdots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots\cdots}$$

这恰是 $\{P_0(n)\}$ 的生成函数。即 $\{P_0(n)\}$ 和 $\{P_d(n)\}$有相同的生成函数，故对一切 n 有 $P_0(n)=P_d(n)$。

评注 本题在题 4.38 中已用包含–排斥原理证明过，此外我们还可以给出它的组合证明。

首先，任意一个正整数均可唯一地写成不同的 2 的幂次的和。因为任一正整数均能唯一地写成二进制数，在二进制表示中，出现 1 的位置的幂次的和即是此数。例如

$$(100)_{10}=(1100100)_2=2^6+2^5+2^2$$

假设数 n 可以写成 x_1 个 1, x_3 个 3, x_5 个 5, …… 的和, 而这些数 x_1, x_3, x_5, … 的每一个都可用唯一的方法写成不相同的 2 的幂次的和, 不妨设

$$x_1=2^{a_1}+2^{b_1}+2^{c_1}+\cdots$$
$$x_3=2^{a_3}+2^{b_3}+2^{c_3}+\cdots$$
$$x_5=2^{a_5}+2^{b_5}+2^{c_5}+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则

$$\begin{aligned} n&=(2^{a_1}+2^{b_1}+2^{c_1}+\cdots)(1)+(2^{a_3}+2^{b_3}+2^{c_3}+\cdots)(3)\\ &\quad+(2^{a_5}+2^{b_5}+2^{c_5}+\cdots)(5)+\cdots\\ &=(2^{a_1}+2^{b_1}+2^{c_1}+\cdots)+(3\cdot2^{a_3}+3\cdot2^{b_3}+3\cdot2^{c_3}+\cdots)\\ &\quad+(5\cdot2^{a_5}+5\cdot2^{b_5}+5\cdot2^{c_5}+\cdots)+\cdots \end{aligned}$$

在此和式中每一项均不相同, 所以得到一个各项都不相同的 n 的剖分。

反之, 若给出了各项均不相同的 n 的剖分, 我们也可以让它对应一个各项是奇数的剖分。具体步骤如下:

第一步　将剖分中的每一项写成 2 的幂乘上一个奇数的形式。例如 $40=2^3\cdot(5)$。

第二步　将带有相同奇数部分的数加起来。例如, $2^2(15)$, $2^0(15)$, $2^4(15)$ 可变成 $15\cdot(2^4+2^2+2^0)=15\times21=15+15+15+\cdots+15$ 共 21 个 15 相加, 这样就将一个各项均不相同的剖分转化成只有奇数项的剖分了。

所以, 各项均不相同的 n 的剖分和各项都是奇数的 n 的剖分之间是一一对应的, 从而证明了对一切 n 有 $P_0(n)=P_d(n)$。

这些方法均没有生成函数方法简明。

6.25　证明对于所有的 n 有 $P_t(n)=1$。

证 因为 $\{P_t(n)\}$ 的生成函数为

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

而

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x}$$

$$1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2}$$

$$1+x^4=\frac{1-x^8}{1-x^4}$$

$$1+x^8=\frac{1-x^{16}}{1-x^8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

将这些式子相乘得

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

此即序列 $\{1\}$ 的生成函数，故对一切 n 有 $P_t(n)=1$。

评注 这是"任一整数可以唯一地表示成一个二进制数，而一个二进制数又可以唯一地表示成 2 的幂次的和"的间接证明。

6.26 假设 (N, n, m) 是将 N 分成 n 项且每一项小于等于 m 的剖分的数目。证明，它就是在

$$(x+x^2+x^3+\cdots+x^m)^n$$

的展开式中 x^N 的系数。

证 我们任取 N 的一个剖分 $i_1, i_2, \cdots, i_n$，则应有 $i_1+i_2+\cdots+i_n=N$，且 $i_j\leqslant m(j=1, 2, \cdots, n)$，反之，给定一个方程 $i_1+i_2+\cdots+i_n=N$ 且 $i_j\leqslant m(j=1, 2, \cdots, n)$ 的解，也就得到了 N 的一个符合条件的剖分。所以 (N, n, m) 应等于方程 i_1+i_2+

$\cdots+i_n=N$ 且 $i_j\leqslant m(j=1, 2, \cdots, n)$的解的个数。

再证此方程的解的个数等于展开式$(x+x^2+\cdots+x^m)^n$ 中的 x^N 的系数。

在展开式中，每一个 x^N 的项具有如下形式

$$x^N=x^{i_1}\cdot x^{i_2}\cdot\cdots\cdot x^{i_n}=x^{i_1+i_2+\cdots+i_n}$$

其中 x^{i_1} 取自第一个幂级数$(x+x^2+\cdots+x^m)$，x^{i_2} 取自第二个幂级数$(x+x^2+\cdots+x^m)$，$\cdots$，x^{i_n} 取自第 n 个幂级数 $(x+x^2+\cdots+x^m)$，所以有

$$i_1+i_2+\cdots+i_n=N,\ i_j\leqslant m(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

故方程 $i_1+i_2+\cdots+i_n=N$，$i_j\leqslant m(j=1, 2, \cdots, n)$ 的解的个数是$(x+x^2+\cdots+x^m)^n$ 展开式中 x^N 的系数。

6.27 证明 n 的一种剖分(在这些剖分中仅仅奇数项是可以重复)的个数等于 n 的另一种剖分(在这些剖分中没有一个项出现的次数大于 3)的个数。

证 将 n 划分成仅仅是奇数项可以重复的方法数的生成函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}\cdot(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots$$

而将 n 划分成每一块的重复次数不大于 3 的剖分数的生成函数为

$$(1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x^2+x^4+x^6)\cdot(1+x^3+x^6+x^9)\cdot\cdots$$

$$=\left[\frac{1}{1-x}-(x^4+x^5+\cdots)\right]\cdot\left[\frac{1}{1-x^2}-(x^8+x^{10}+\cdots)\right]$$

$$\cdot\left[\frac{1}{1-x^3}-(x^{12}+x^{15}+\cdots)\right]\cdot\cdots$$

$$=\frac{1-x^4}{1-x}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^{12}}{1-x^3}\cdot\cdots$$

$$=\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x}\cdot\frac{(1-x^4)(1+x^4)}{1-x^2}\cdot\frac{(1-x^6)(1+x^6)}{1-x^3}\cdots$$

$$=\frac{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^3)\cdots}$$

此即将 n 划分成仅仅是奇数项可以重复的方法数的生成函数，从而命题得证。

6.28 证明将 n 分成不超过二项的剖分数目是 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$。其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示 $\frac{n}{2}$ 的整数部分。

证 由题1.9知，将 n 划分成不超过二个分量的剖分数等于将 n 划分成最大项不超过2的剖分数。而将 n 划分成最大项不超过2的剖分数的生成函数为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}\\
&=\frac{1}{2}\cdot(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\cdots)\\
&\quad+\frac{1}{2}\cdot(1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots)\\
&=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+\cdots\\
&\quad+\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)x^n+\cdots
\end{aligned}$$

所以将 n 分成不超过二个分量的剖分数为 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$。

6.29 数 n 的一个剖分，如果从1到 $n-1$ 的每一个整数，都可以用唯一的方法将它写成剖分中剖分项的和，则称该剖分是完备的。例如 $7=4+2+1$ 就是7的一个完备剖分，这是因为

$$1=1$$

$$2=2$$
$$3=1+2$$
$$4=4$$
$$5=4+1$$
$$6=4+2$$

证明 n 的完备剖分的数目等于将 $n+1$ 分解因子的方法数，这里因子的次序要计数，而 1 的因子不计数。

证 设.

$$n=k_1\cdot i_1+k_2\cdot i_2+\cdots+k_s\cdot i_s \tag{*}$$

是 n 的一个完备剖分，它有 k_1 个大小为 i_1 的块，k_2 个大小为 i_2 的块，…，k_s 个大小为 i_s 的块。我们这里不妨可以假设 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s$，$k_j\geqslant1(j=1, 2, \cdots, s)$，则由定义，对任意的 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 都有

$$m=l_{j_1}\cdot i_{j_1}+l_{j_2}\cdot i_{j_2}+\cdots+l_{j_r}\cdot i_{j_r} \tag{**}$$

其中 $i_{j_1}, i_{j_2}, \cdots, i_{j_r}\in\{i_1, i_2, \cdots, i_s\}$ 且有 $1\leqslant l_{j_1}\leqslant k_{j_1}$，$1\leqslant l_{j_2}\leqslant k_{j_2}$，…，$1\leqslant l_{j_r}\leqslant k_{j_r}$。

首先 $\{i_1, i_2, \cdots, i_s\}$ 中至少有一个大小为 1 的块，否则 1 就不能表示成 (**) 的形式。所以 $i_1=1$。如果有 x_1-1 个大小为 1 的块，即 $k_1=x_1-1$，那末在剖分 (*) 中，次小的块的大小必定是 x_1，否则 x_1 就不能表示成 (**) 的形式。若大小为 x_1 的块有 x_2-1 块，即 $k_2=x_2-1$，则大小次 1 和次 x_1-1 的块必为 $x_1\cdot x_2$，…，依次类推得

$$\begin{aligned}n=&(x_1-1)+x_1\cdot(x_2-1)+x_1x_2\cdot(x_3-1)+\cdots\\&+(x_1x_2\cdots x_{k-1})\cdot(x_k-1)\\=&x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_k-1\end{aligned}$$

即
$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_k=n+1$$

n 的一个完备剖分对应着 $n+1$ 的一个有序因子的分解。从而

证明了 n 的完备剖分数对应于 $n+1$ 的有序因子的分解个数。

6.30 假设 (N, n, m) 是将 N 分成 n 个项，且每一项小于等于 m 的剖分的数目。证明

$$(N+1, n+1, m)=(N, n+1, m)+(N, n, m)-(N-m, n, m)$$

证 因为 $(N+1, n+1, m)$ 是将 $N+1$ 分成 $n+1$ 块，且每一块 $\leqslant m$ 的剖分数目。在这些剖分中，(1)有以 1 为块的剖分；(2)没有以 1 为块的剖分。若是(1)，共有 (N, n, m) 种剖分。若是(2)，则可看成是将 N 划分成 $n+1$ 块，且每块 $\leqslant m$，对这样的剖分中的任一块加 1 所得的剖分，这样的剖分数共有 $(N, n+1, m)$，但这里多计算了这样的一些剖分，即在划分中至少有某一块为 m 的剖分，它共有 $(N-m, n, m)$ 个，故总数为

$$(N, n, m)+(N, n+1, m)-(N-m, n, m)$$

从而证明了

$$(N+1, n+1, m)=(N, n+1, m)+(N, n, m)-(N-m, n, m)$$

6.31 证明把 n 划分成 r 块，要计算各项次序的剖分个数是 $\binom{n-1}{r-1}$。

证 对每一剖分 $a_1+a_2+\cdots+a_r$ 都有部分和

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$S_r=a_1+a_2+\cdots+a_r=n$$

与之对应，反之给定部分和序列

$$0<S_1<S_2<\cdots<S_{r-1}<n$$

都有唯一的剖分 $a_1+a_2+\cdots+a_r$ 与之对应。这是一一对应，现部分和有 $\binom{n-1}{r-1}$ 种选法，因此所求的剖分个数也是 $\binom{n-1}{r-1}$。

6.32 设 α 是一实数，序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是这样定义：$a_0=1$，和对 $n=1, 2, 3, \cdots$，$a_n=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$。确定此序列的指数生成函数。

解 设序列 $\{a_n\}$ 的指数生成函数为 $f_e(x)$，则

$$f_e(x)=1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\cdot\frac{x^2}{2!}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n+\cdots=(1+x)^\alpha$$

6.33 设 S 是多重集 $\{\infty\cdot e_1, \infty\cdot e_2, \cdots, \infty\cdot e_k\}$，确定序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 的指数生成函数，这里 $a_0=1$，并且对 $n=1, 2, 3, \cdots$

(a) a_n 等于 S 的 n 排列的个数，排列中每一事物出现奇数次。

(b) a_n 等于 S 的 n 排列的个数，排列中每一事物至少出现 4 次。

(c) a_n 等于 S 的 n 排列的个数，排列中 e_1 至少出现一次，e_2 至少出现 2 次，……e_k 至少出现 k 次。

(d) a_n 等于 S 的 n 排列个数，排列中 e_1 至多出现一次，e_2 至多出现 2 次，…，e_k 至多出现 k 次。

解 设 $\{a_n\}$ 的指数生成函数为 $f_e(x)$，则

(a) $$f_e(x)=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)^k$$

$$=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^k$$

(b) $f_e(x)=\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)^k$

$$=\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\right)^k$$

(c) $f_e(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\cdot\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\cdot\cdots$

$$\cdot\left(\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}+\cdots\right)$$

(d) $f_e(x)=(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\cdot\cdots$

$$\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)$$

6.34 确定用红色、蓝色、绿色和紫色为一个 $1\times n$ 的棋盘方块着色的方法个数，如果偶数个方块着红色并且偶数个方块着绿色。

解 设 a_n 表示符合题中要求的着色方法数。定义 $a_0=1$，则 a_n 等于具有无限重复数的四种颜色(红、蓝、绿、紫)的多重集的 n 排列的个数，而其中红、绿两色出现偶数次。故序列$\{a_n\}$的生成函数为

$$f_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2\cdot e^{2x}$$

$$=\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(4^{n-1}+2^{n-1})\cdot\frac{x^n}{n!}+1$$

故有 $a_0=1$, $a_n=4^{n-1}+2^{n-1}$, 对一切 $n\geqslant1$, 所以满足条件的着色方式数为 $4^{n-1}+2^{n-1}(n\geqslant1)$ 种。

6.35 确定由 n 个奇数字组成的，并且 1 和 3 每个出现正

偶数次的数的个数。

解 设 a_n 表示这样的数的个数，这里我们定义 $a_0=0$，那末 a_n 表示多重集 $S=\{\infty\cdot1,\ \infty\cdot3,\ \infty\cdot5,\ \infty\cdot7,\ \infty\cdot9\}$ 的 n 排列的个数，排列中的数字 1 和 3 出现正偶数次，则序列 $\{a_n\}$ 的指数生成函数为

$$
\begin{aligned}
f_e(x) &= \left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3\\
&= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)^2\cdot e^{3x}\\
&= \frac{1}{4}e^x-e^{2x}+\frac{3}{2}e^{3x}-e^{4x}+\frac{1}{4}e^{5x}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}-2^n+\frac{1}{2}\cdot3^{n+1}-4^n+\frac{1}{4}\cdot5^n\right)\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

所以有 $$a_n=\frac{1}{4}-2^n+\frac{3^{n+1}}{2}-4^n+\frac{5^n}{4}\quad(n\geqslant0)$$

6.36 确定由 n 个至少是 4 的数字组成的数的个数，其中 4 和 6 每一个出现偶数次，5 和 7 每个至少出现一次，数字 8 和 9 无限制。

解 设 a_n 表示这样的数的个数，那末 a_n 表示多重集

$$S=\{\infty\cdot4,\ \infty\cdot5,\ \infty\cdot6,\ \infty\cdot7,\ \infty\cdot8,\ \infty\cdot9\}$$

的 n 排列的个数，排列中的数字 4 和 6 出现偶数次，5 和 7 至少出现一次，8 和 9 无限制。序列 $\{a_n\}$ 的指数生成函数为

$$
\begin{aligned}
f_e(x) &= \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\cdot\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\\
&\quad\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\\
&= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot(e^x-1)^2\cdot e^{2x}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{4}(e^{6x}-2e^{5x}+3e^{4x}-4e^{3x}+3e^{2x}-2e^{x}+1)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(6^n-2\cdot 5^n+3\cdot 4^n-4\cdot 3^n+3\cdot 2^n-2)\cdot\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{4}$$

从而得 $a_0=0$, 对于 $n\geqslant 1$ 有

$$a_n=\frac{1}{4}(6^n-2\cdot 5^n+3\cdot 4^n-4\cdot 3^n+3\cdot 2^n-2)$$

6.37 用 3 个 1, 2 个 2, 5 个 3 这十个数字能构成多少个偶的 4 位数。

解 问题是求多重集 $S=\{3个1, 2个2, 5个3\}$ 的 4 排列数，且要求排列的末尾为 2。可以把问题转化成求多重集

$$S'=\{3个1, 1个2, 5个3\}$$

的 3 排列数。其指数生成函数为

$$f_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\cdot(1+x)$$
$$\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)$$

展开后得 $\frac{x^3}{3!}$ 的系数为 20, 所以能组成 20 个四位数的偶数。

评注 题 6.34～6.37 四题均是求有限制条件的排列数。对这种问题，用生成函数的方法显然比前面用一般的排列方法简单得多，这也说明生成函数方法在求解这类计数问题中的优越性。

第七章　鸽笼原理与 Ramsey 定理

内容提要

本章考虑鸽笼原理及其推广——Ramsey 定理。鸽笼原理是重要的组合基本原理之一，又名抽屉原理或 Dirichlet 原理。

7-1　鸽笼原理

如果把 $n+1$ 个物体放进 n 个盒子里，那么至少有一个盒子里装有两个或两个以上的物体。

7-2　鸽笼原理的加强形式

如果把 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体放进 n 个盒子里，那么或者第一个盒子里装有至少 q_1 个物体，或者第二个盒子里装有至人 q_2 个物体，…，或者第 n 个盒子里装有至少 q_n 个物体。

当 $q_1=q_2=\cdots=q_n=r$ 时，它有下列形式作为特例：

如果把 $n(r-1)+1$ 个物体放进 n 个盒子里，那么至少有一个盒子装有 r 个或多于 r 个物体。

上述命题又等价于下列事实：

如果 n 个非负整数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的算术平均值

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}$$

大于 $(r-1)$，那么 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 中至少有一个大于或等于 r。

7-3　Ramsey 定理

设 $q_1, q_2, \cdots, q_n, r$ 是正整数，且 $q_1\geqslant r, q_2\geqslant r, \cdots, q_n\geqslant r$。那么存在正整数，从而存在最小正整数 $N(q_1, \cdots, q_n, r)$（它依

赖且仅依赖 $q_1, \cdots, q_n, r$)具有以下性质：

如果把至少具有 $N(q_1, \cdots, q_n, r)$ 个元素的集合 S 的所有 r-子集(有 r 个成员的子集)分配到 n 个盒子中，那么或者有 q_1 个元素使得由它们组成的所有 r-子集全在第 1 个盒子里，或者有 q_2 个元素使得由它们组成的所有 r-子集全在第 2 个盒子里，$\cdots$，或者有 q_n 个元素使得由它们组成的所有 r-子集全在第 n 个盒子里。

Ramsey 定理在 $r=1$ 时正是加强形式的鸽笼原理，$N(q_1, \cdots, q_n, 1)=q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$。因此，我们说 Ramsey 定理是鸽笼原理的推广。

Ramsey 定理在 $n=2$, $r=2$ 时可叙述为：

对正整数 q_1, q_2, 存在正整数 $N(q_1, q_2, 2)$，使得在空间的 $N(q_1, q_2, 2)$个或更多个点(没有三个共线)之间用红色或蓝色线段两两相连时，或者有 q_1 个点之间全部由红色线段相连，或者有 q_2 个点之间全部由蓝色线段相连。

我们称 $N(q_1, \cdots, q_n, r)$ 为 Ramsey 数，已知

$$N(3, 3, 2)=6$$
$$N(3, 4, 2)=9$$
$$N(3, 5, 2)=14$$
$$N(3, 6, 2)=18$$
$$N(3, 3, 3, 2)=17$$
$$25\leqslant N(4, 5, 2)\leqslant 28$$

等等。

题解及评注

7.1 一口袋内装有 12 个黑球和 12 个蓝球。问：一次至少取出多少个球才能保证取出一个黑球和一个蓝球；一次至少取

出多少个球才能保证取出一对蓝球。

解 至少取出13个球才能保证取得一个黑球和一个蓝球，而至少取出14个球才能保证取出一对兰球。

7.2 某一制造铁盘的工厂，由于设备和技术的原因只能将生产的盘子的重量控制在ag到$(a+0.1)$g之间，现在需要制成重量相差不超过0.005g的两铁盘来配制一架天平，问该工厂至少要生产多少铁盘，才能保证得到一对符合要求的铁盘。

解 我们把铁盘按重量分类，所有ag到$a+0.005$g的为一类；$a+0.005$g到$a+0.01$g为一类；$a+0.01$g到$a+0.015$g又为一类…；最后，$a+0.095$g到$a+0.1$g为一类，共计20类。由鸽笼原理可知，若该工厂生产21个铁盘，那么就能保证有两个铁盘属于同一类，因而它们之间的重量差将不超过0.005g。

7.3 试证：m只鸽子飞进n个鸽笼时，有一个鸽笼至少飞进了$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$只鸽子。([ ]表示商取整)

证 若每个鸽笼飞进的鸽子不多于$\left[\frac{m-1}{n}\right]$个，那么鸽子总数将不多于$n\left[\frac{m-1}{n}\right]$，即

$$m\leqslant n\left[\frac{m-1}{n}\right]$$

但$n\left[\frac{m-1}{n}\right]\leqslant m-1$，于是$m\leqslant m-1$，这是不可能的。

7.4 证明在$n(n\geqslant 2)$个人中总有两个人，他俩在这群人中所认识的人数目相同。

证 若这n个人中有一人不认识其他任何人，那么我们可只考虑余下的$n-1$人($n-1\geqslant 2$。若不然余下一人，这两人互不认识，命题得证)。若这n个人中有多人不认识其他任何人，

那么命题得证(此时已有两人认识的人数是零)。因此，不失一般性，可设每人至少认识另一个人。可是每个人又至多认识其他 $n-1$ 人，因此，据鸽笼原理这 n 个人至少有两人认识的人的数目是一样的。

7.5 证明 如果 $n+1$ 个不同的数选自 $1, 2, 3, \cdots, 2n$ 中，那么它们中至少有一对数互质。

证 设这 $n+1$ 个数是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 且 $a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$。令 $b_1=a_1+1, b_2=a_2+1, \cdots, b_n=a_n+1$，显然

$$1<b_1<b_2<\cdots<b_n\leqslant 2n$$

据鸽笼原理，$a_1, \cdots, a_{n+1}, b_1, \cdots, b_n$ 这 $2n+1$ 个数至少有一对相等，并且它们只能是 a_{i+1} 与 $b_i(i=1, 2, \cdots, n)$，即 $a_{i+1}=a_i+1$，因而 a_{i+1}，与 a_i 互质。

7.6 一位象棋大师以 11 周时间准备一次大赛，他决定每天至少下一局棋。为了不至于太累，他限定每一周不多于 12 次对局。证明：存在连续若干天，在这些天里他恰下了 21 局棋。本题中 21 局改为更少的局数如何？改为 22 局如何？

证 设 a_1 是第一天下的局数，a_2 是第一、二两天下的局数，$\cdots$。序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 是严格递增的，因为每天至少下一局。因此

$$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{77}\leqslant 12\times 11=132$$

考虑序列 $a_1+21, a_2+21, \cdots, a_{77}+21$，类似地

$$1<a_1+21<a_2+21<\cdots<a_{77}+21\leqslant 132+21=153$$

据鸽笼原理，1～153 之间的 154 个数 $a_1, \cdots, a_{77}, a_1+21, \cdots, a_{77}+21$ 中至少有两个相等，可设 $a_i=a_j+21(j<i)$，从而可以说在第 $j+1$ 天到第 i 天这连续的几天里大师恰好下了 21 局棋。

由证明过程容易看出，原命题用更小的数代替 21 时仍成

立。当将21改为22时命题也仍成立。我们讨论如下：

(i) 若大师每周并不下满12局，则 $a_{77}+22<154$，使得 $a_1, \cdots, a_{77}, a_1+22, \cdots, a_{77}+22$ 这154个数分布于1到153之间，仍有 $a_i=a_j+22$。

(ii) 若大师每周下满12局，那么 $a_1, \cdots, a_{77}, a_1+22, \cdots, a_{77}+22$ 这154个数恰在1～154之间。此时若没有 i, j 使 $a_i=a_j+22$，则它们取遍值1, 2, 3, …, 154，并且 $a_1=1, a_2=2, \cdots, a_{22}=22$。那么在第一周里大师将只下了7局，未满12局，矛盾。因此，有 i, j 使 $a_i=a_j+22$，亦即从第 j 天到第 i 天这若干天里，大师恰下了22局棋。

*7.7　证明从1, 2, …, 200中可选取100个数，使它们中没有一个能被另一个整除，并证明符合条件的100个数中的最小数至少是16。

证　可选101, 102, 103, …, 200这100个数。

设选出的100个整数是 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$，且

$$a_1<a_2<\cdots<a_{100}, \quad a_1<16$$

现将 a_i 写作 $2^{k_i}\cdot l_i$ 形，使 l_i 为一奇数。如若此时有 a_i, a_j 使 $l_i=l_j$，那么其中一个必整除另一个。

如若 $l_1, l_2, \cdots, l_{100}$ 全不相同，那么它们恰好穷尽1～200中的所有奇数。讨论 a_1：

(i) a_1 为奇数，则在 $a_2, \cdots, a_{100}$ 中必有 a_i，$a_i=2^{k_i}\cdot 3a_1$（$3a_1$ 是奇数且小于200），从而 a_1 整除 a_i。

(ii) a_1 为偶数。因 $a_1=2^{k_1}\cdot l_1$，$a_1<16$，故 $1\leqslant k_1\leqslant 3$，$1\leqslant l\leqslant 7$。

设 $l_1=1$，则 $a_1=2^{k_1}$。注意，对奇数3, 27, 81必有 k', k'', k'''，使 $2^{k'}\cdot 3$，$2^{k''}\cdot 27$，$2^{k'''}\cdot 81$ 在 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 之中。若 k', k'', k''' 中有一个大于 k_1，那么 a_1 便整除 $2^{k'}\cdot 3$，$2^{k''}\cdot 27$，$2^{k'''}\cdot 81$

之一。此外，若 $k'''\geqslant k''$ 或 $k'''\geqslant k'$ 或 $k''\geqslant k'$，则 $2^{k'''}\cdot 81$, $2^{k''}\cdot 27$, $2^{k'}\cdot 3$ 中有一个整除另一个。因此

$$3\geqslant k_1>k'>k''>k'''\geqslant 1$$

这是不可能的。这就是说 $l=1$ 时，a_1, a_2, $\cdots$, a_{100} 中总有两个数，一个能整除另一个。

设 $l_1>2$, $a_1=2^{k_1}\cdot l_1$，因而 $1\leqslant k_1\leqslant 2$, $l_1\leqslant 7$（因 $a_1<16$）。容易明白 $2^{k_1}\cdot l_1$, $2^{k'}\cdot 3l_1$, $2^{k''}\cdot 9l_1$, $2^{k'''}\cdot 27l_1$ 在适当选择 k', k'', k''' 后全在 a_1, a_2, $\cdots$, a_{100} 之中。类似 $l_1=1$ 时的讨论，$l_1>2$ 时，也有：或者 a_1 整除 $2^{k'}\cdot 3l_1$, $2^{k''}\cdot 9l_1$, $2^{k'''}\cdot 27l_1$，或者后三个中有一个整除另一个。

综上所述，在 $a_1<16$ 时，a_1, a_2, $\cdots$, a_{100} 中总有一个整除另一个，因此 a_1 至少是 16。

评注 容易用鸽笼原理证明，在 1～200 中选取 101 个数时，其中必有一个被另一个整除。

7.8 证明任意给定的 52 个整数中，总存在两个数，它们的和或差能被 100 整除。

证 设 52 个整数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{52} 被 100 除的余数分别是 r_1, r_2, $\cdots$, r_{52}。另外，可能的余数共 100 个：0, 1, 2, $\cdots$, 99，可分为 51 类 $\{0\}$, $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, $\cdots$, $\{49, 51\}$, $\{50\}$。因此 r_1, r_2, $\cdots$, r_{52} 中至少有两个属于同一类，例如 r_i, r_j。于是或者 $r_i=r_j$，或者 $r_i+r_j=100$。这就是说，或者 a_i-a_j 可被 100 整除，或者 a_i+a_j 可被 100 整除。

7.9 一个学生用 37 天准备考试。据经验她知道复习所需时间不会超过 60 小时，而她又希望每天至少复习一小时。证明：不管怎样安排每天的复习时数，总有连续若干日，其间她恰好复习了 13 个小时。

证 仿题 7.6 可证。

7.10 在边长为 2 的正方形中任取 5 点，证明存在两点，其距离不超过$\sqrt{2}$。

证 如图 7.1 将正方形等分为四份。根据鸽笼原理，至少有一份中含有这五个点中的两个。由于这两点在一个边长为 1 的正方形中，它们之间的距离显然不超过 $\sqrt{2}$。

7.11 (a) 在边长为 1 的正三角形中任选 5 点，证明存在两点，其距离不超过 $\frac{1}{2}$。

(b) 在边长为 1 的正三角形中任选 10 点，证明存在两点，其距离不超过 $\frac{1}{3}$。

(c) 在边长为 1 的正三角形中，应选取多少点方能使其中有两点，其间距离不超过 $\frac{1}{n}$。

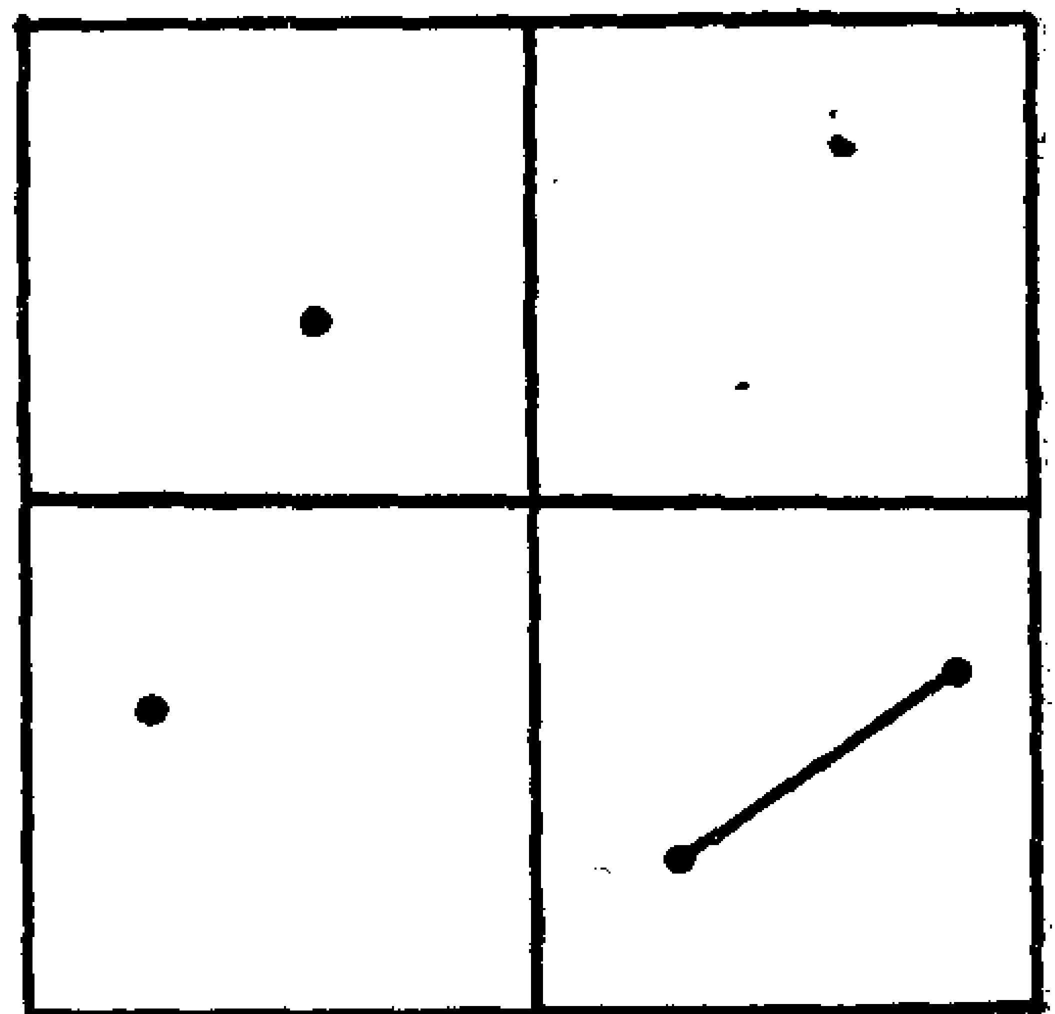


图 7.1

解 (a)(b)可仿 7.7 题证，分别将正三角形分成 4 份和 9 份，分法如图 7.2，图 7.3。

(c) 只须在正三角形中选取 n^2+1 个点。

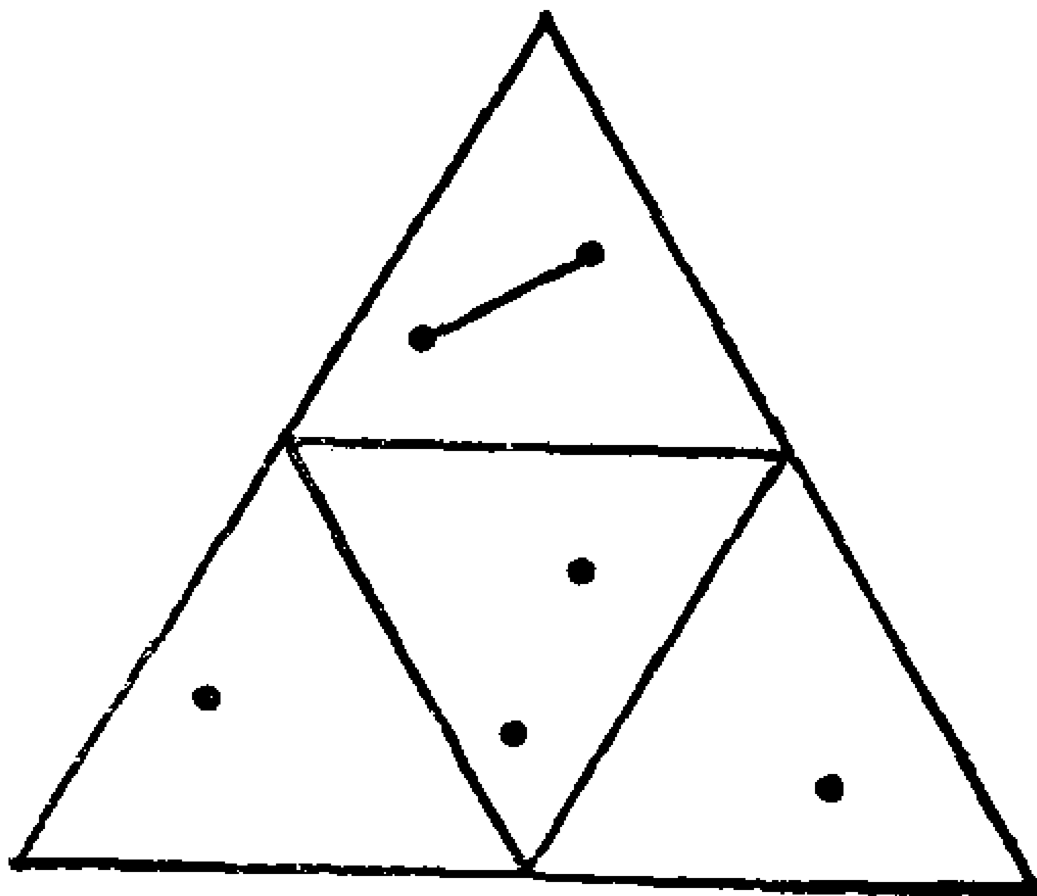


图 7.2

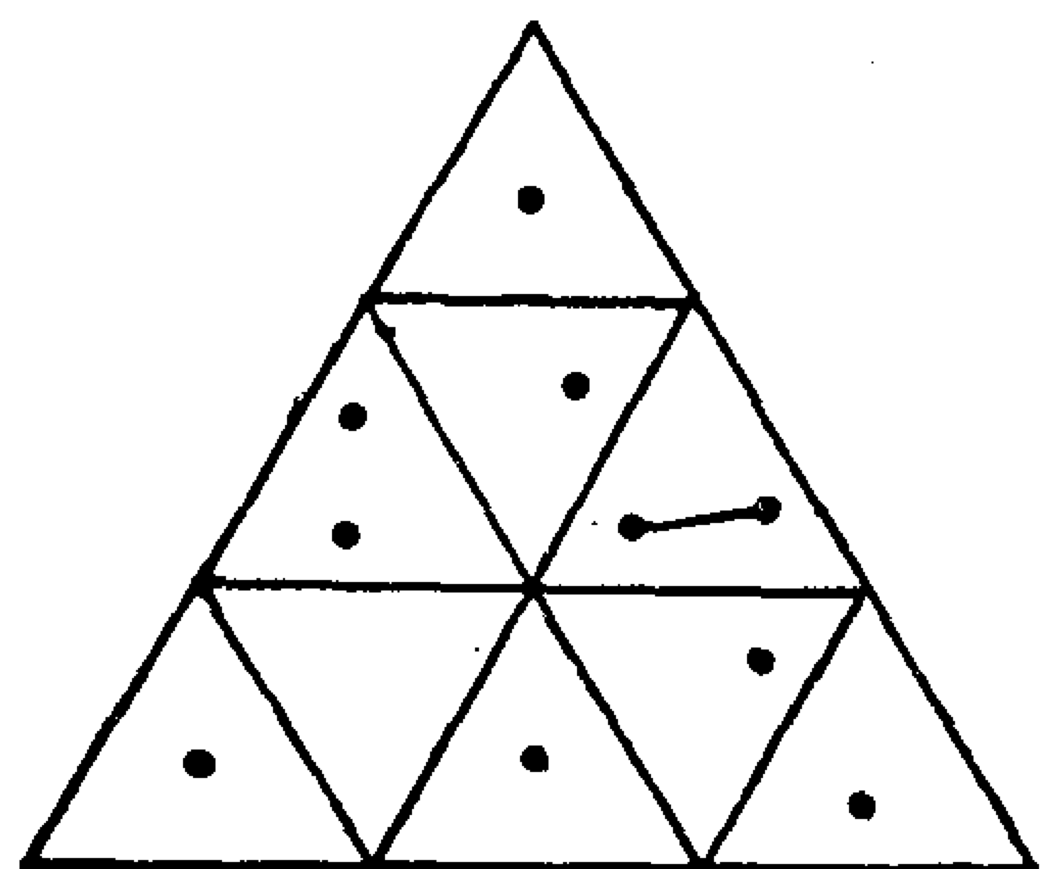


图 7.3

评注 从上述题解已经可以看出，鸽笼原理的正确使用是需一定的技巧的，关键在于认清"鸽子"(放进盒子的物体)并制造"鸽笼"(盒子)，而制造"鸽笼"的依据则是："待证命题成立，蕴涵于有两只鸽子在同一鸽笼。"例如题 7.8 中 51 个"鸽笼" $\{0\}$，$\{1, 99\}$，…，$\{49, 51\}$，$\{50\}$ 便是依据这一原则构造出来的，因为两个数的余数(被 100 除)落在同一"鸽笼"里蕴涵这两数的和或差可被 100 整除。读者可在下文的更为丰富的题解里深入体会。

7.12 证明：给定 m 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_m (m>1)$，必存在连续的若干项的和能被 m 整除，即存在 k 和 l，使得 m 整除

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+l}$$

证 构造数列

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \cdots,\ a_1+a_2+\cdots+a_m$$

若其中有一项可被 m 整除，那么命题已得证。若不然，用 m 除数列各项得 m 个非零余数，而可能的非零余数只有 $m-1$ 个，因此有两项余数相同，设它们分别是

$$a_1+a_2+\cdots+a_k$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+l}$$

从而它们的差 $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{k+l}$ 可被 m 整除，命题得证。

7.13 (a) 每年中至少有一个 13 日是星期 5。

(b) 每年中至多有三个 13 日是星期 5。

证 (a) 每年中共有 12 个 13 日，它们分别是(以下用 $m.n$ 表示 m 月 n 日，$*n$ 表示星期 n) 1.13, 2.13, 3.13, …, 12.13。如果它们均非星期 5，那么它们是 *1, *2, *3, *4, *6, *7(星期日)之一。我们知道 2.13, 3.13, 11.13 必是同一个 $*n$ (例如 *6，因为它们之间分别相隔 28 天及 245 天)，于是余下的 9 个 13 日是 *1, *2, *3, *4, *7 之一。我们又知道 1.13 和 10.13 是

同一个 $*n$，(它不可能与 2.13 是同一个 $*n$，例如 $*7$) 因为它们之间相隔 273 天。我们还知道 4.13 与 7.13 以及 9.13 与 12.13 分别具有相同的 $*n$，例如 $*3$，$*4$，因为它们分别相隔 91 天 (同样，它们不可能是 $*6$，$*7$，因为 4.13 及 9.13 与 1.13，2.13 相隔的天数均非 7 的整数倍)。这样剩下的 3 个 13 日 (5.13，6.13，8.13) 是 $*1$ 和 $*2$ 之一 (它们不可能是 $*3$，$*4$，$*6$，$*7$，因为它们与 1.13，2.13，4.13，9.13 相隔的天数均非 7 的整数倍。据鸽笼原理，这 3 个 13 日中至少要有两个是同一个 $*n$，但这是不可能的，因为这 3 个 13 日之间相隔的天数都不是 7 的倍数。矛盾的导出，说明至少有一个 13 日是星期 5。

评注 本题改为：至少有 $x(1\leqslant x\leqslant 28)$ 日是星期 $y(1\leqslant y\leqslant 7)$ 都能成立，因为证明过程与 x，y 无关。本题的证明是对非闰年立论的，闰年的情况可用类似的方法进行讨论。

(b) 由 (a) 的讨论可知，至多只有三个月，它们两两之间的间隔天数都是 7 的整数倍，它们是 2 月，3 月，11 月。因此只有 2.13，3.13，11.13 可能同时为星期五，不可能有四个月的 13 日全为星期 5 (参阅图 7.4)。

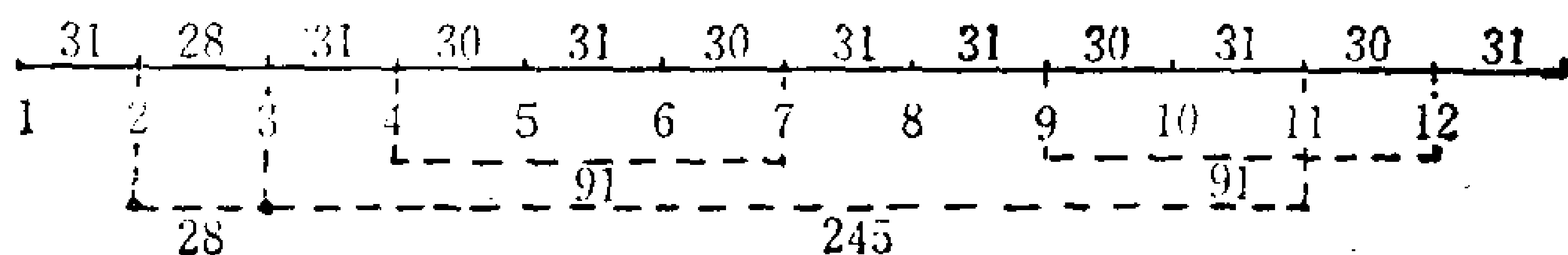


图 7.4

7.14 将两个同心圆盘 A，B 分别划分成 200 个全等的扇形，在 A 盘上任取 100 个扇形涂上红色，其余 100 个扇形涂上蓝色，而 B 盘上的 200 个扇形任意地涂上红色或蓝色。证明，总可适当地转动两圆盘，使得两圆盘上具有相同颜色的扇形重迭在一起的有 100 对或更多。

证 我们知道两圆盘扇形对齐时可能出现的重迭格局有200个。对这200个格局计算同色扇形重迭的对数。由于A盘上红、蓝扇形各100个，因此，B盘上每个扇形(或红色或蓝色)在这200个格局里与A盘上的同色扇形重迭100次。于是在这200个格局中B盘200个扇形与A盘同色扇形重迭在一起共$100\times200=20000$对。由此可计算出每一格局中同色扇形重迭的平均对数为

$$20000\div200=100$$

因此至少有一格局中同色扇形重迭的有100对或更多。

7.15 证明 m个鸽子飞进n个鸽笼，至少有一鸽笼中飞进$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$只鸽子，但可能使所有鸽笼不含有多于$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$只鸽子。

证 显然$\frac{m}{n}>\left[\frac{m-1}{n}\right]$，据鸽笼原理加强形式的有关算术平均的说法，至少有一鸽笼中飞进了$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$只鸽子。(本部分同题7.3，但解法不同)

由于

$$n\cdot\left(\left[\frac{m-1}{n}\right]+1\right)=n\left[\frac{m-1}{n}\right]+n=(m-1)-r+n$$

其中r是$(m-1)\div n$的剩余，$0\leqslant r\leqslant n-1$。因此

$$n\cdot\left(\left[\frac{m-1}{n}\right]+1\right)\geqslant(m-1)-(n-1)+n=m$$

故总可使n个鸽笼中所含鸽子均不多于$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$。

评注 本题也可看作是鸽笼原理的一种加强形式。

7.16 将n个球放进m个盒子里，证明：若$n<\frac{m(m-1)}{2}$，那么至少有两个盒子里有相同数目的球。

证 设 m 个盒子里球的数目全不相同，那么 m 个盒子里球的总数至少是

$$0+1+2+\cdots+m-1=\frac{m(m-1)}{2}$$

已知它大于 n，矛盾。

7.17 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列。证明：当 n 是奇数时，乘积 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 是偶数。

证 当 n 是奇数时，$1, 2, \cdots, n$ 和 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的奇数是 $\frac{n+1}{2}$ 个，而偶数只有 $\frac{n-1}{2}$ 个，因此在

$$a_1-1,\ a_3-3,\ a_5-5,\ \cdots,\ a_n-n$$

中 $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_n$ $\left(共\ \frac{n+1}{2}\ 个\right)$ 至少有一个是奇数，例如 a_i，从而 a_i-i 是偶数，于是可知整个乘积是偶数。

7.18 三维空间中有 9 个格点（各坐标为整数的点）。证明：在所有两点间连线的中点之中有一个点也是格点。

证 三维空间中点的坐标 (a,b,c) 各分量的奇偶分布共计有 $2^3=8$ 种状况。因此，在 9 个点的坐标中至少有两个，例如 (a, b, c) 与 (a', b', c')，具有相同的奇偶分布状况，即 a 与 a'，b 与 b'，c 与 c' 分别同奇偶。从而这两点连线的中点是格点，因为 $\frac{a+a'}{2}$，$\frac{b+b'}{2}$，$\frac{c+c'}{2}$ 无疑都是整数。

7.19 有两堆碎石，其中每一块石头小于 n kg，而每一堆中的石头重量互不相同。试证：如果两堆碎石总计不少于 n 块，那么总可从两堆中分别选出一块石头，使两者总重量是 n。

证 设两堆石头中各石块的重量分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_l$（第一堆）和 $b_1, b_2, \cdots, b_m$（第二堆），且假定

$$a_1<a_2<\cdots<a_l<n,\quad b_1<b_2<\cdots<b_m<n$$

构作序列 $c_1, c_2, \cdots, c_l$，使 $c_i=n-a_i$ $(i=1, 2, \cdots, l)$。考虑

$$b_1, b_2, \cdots, b_m, c_1, c_2, \cdots, c_l$$

这 $m+l$ 个数。由于 $m+l\geqslant n$，但每一个数又小于 n，因而至少有一对数(一个取自诸 b，一个取自诸 c)相等，例如 $b_i=c_j$，从而 $b_i=n-a_j$，$a_j+b_i=n$。原命题得证。

7.20 设 x 为一任意实数，试证

$$x, 2x, 3x, \cdots, (n-1)x$$

当中至少有一个数与某一整数差不大于 $1/n$。

证 由于我们只须关心各数的小数部分，下面我们把 x，$2x, 3x, \cdots, (n-1)x$ 均看作它们自身的小数部分。

我们把区间 $(0, 1]$ n 等分：

$$\left(0, \frac{1}{n}\right], \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \cdots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

如果首尾等分中落入 $x, 2x, 3x, \cdots, (n-1)x$ 之一，比如 kx，那么 kx 与 0 或 1 之差不大于 $\frac{1}{n}$。如果首尾等分中没有落入任何数，那么至少有两个，例如 kx，$k'x$，落入同一其它等分当中，从而 $|k-k'|x<\frac{1}{n}$。$|k-k'|x$，它显然是 $x, 2x, 3x, \cdots, (n-1)x$ 之一，落在 $\left(0, \frac{1}{n}\right]$ 中，它与 0 之差不大于 $\frac{1}{n}$。因此，$x, 2x, \cdots, (n-1)x$ 中至少有一个与某整数之差不大于 $\frac{1}{n}$。

7.21 试证：数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{nm+1}$ 中或者有一个长为 $n+1$ 的递增子序列，或者有一个长为 $m+1$ 的递减子序列。

证 对数列中每一项 a_x 指定一个 i_x，它表示从 a_x 起的最长递增子序列的长度。若有 $i_x\geqslant n+1$，那么命题获证。现设所有 $nm+1$ 个 i_x 均不大于 n。由于 $\frac{nm+1}{n}>m$，故至少有 $m+1$

个 i_x 具有相同的值。现在我们来证明，当 a_{x_1}, a_{x_2} 具有相同 i_x 值，而 $x_1<x_2$，那么 $a_{x_1}>a_{x_2}$。如若不然，$a_{x_1}\leqslant a_{x_2}$，则 $i_{x_1}=i_{x_2}+1$，与 $i_{x_1}=i_{x_2}$ 矛盾。因此具有相同 i_x 的子序列 a_{x_1}, a_{x_2}, $\cdots$, $a_{x_{m+1}}$ $(x_1<x_2<\cdots<x_{m+1})$ 是递减的，它恰具有长度 $m+1$。

7.22 设整数序列 a_1, a_2, $\cdots$, a_{mn+1}，满足

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_{mn+1}$$

证明：或者可从中选出 $m+1$ 个数，它们中没有一个数能整除另一个，或者可从中选出长为 $n+1$ 的子序列，使其中每一项都能整除它后一项。

证 证法同题 7.21，只是对每一 a_x, i_x 表示从 a_x 起的满足下列条件的子序列的长度：序列中每一项都能整除其后一项。

评注 鸽笼原理的加强形式有多种说法（我们在提要中列出了三种），其中关于算术平均的说法运用尤广，它告诉我们，当 $\frac{m}{n}>r$ 时，若把 m 个物体放入 n 个盒子，那么至少有一个盒子有 $r+1$ 个物体。运用它解题的关键仍然是正确地设置"盒子"。

7.23 证明 在任何六个人中，或者有三个人互相认识，或者有三个人互相不认识。但是对五个人，命题不能成立。

证 考虑六个人中的一个 a 以及集合

$$A=\{x \mid x \text{ 认识 } a,\ x\neq a\}$$
$$B=\{x \mid x \text{ 不认识 } a\}$$

A 和 B 中人数总和是 5，因此在一个集合中至少有 3 人（鸽笼原理）。若 A 中至少有 3 人，则或者其中 3 人互不认识，或有两人互相认识。对前一种情况，命题已满足；对后一种情况，互相认识的两人加上 a 便是 3 人互相认识，命题也满足。若 B 中至少有 3 人，仿前可证原命题成立。

若用图的结点表示人，边表示人的相识关系，那么如图 7.5

所示的五人中既没有 3 个人互相认识，也没有 3 个人互相不认识，因此本命题改为五个人时不能成立。

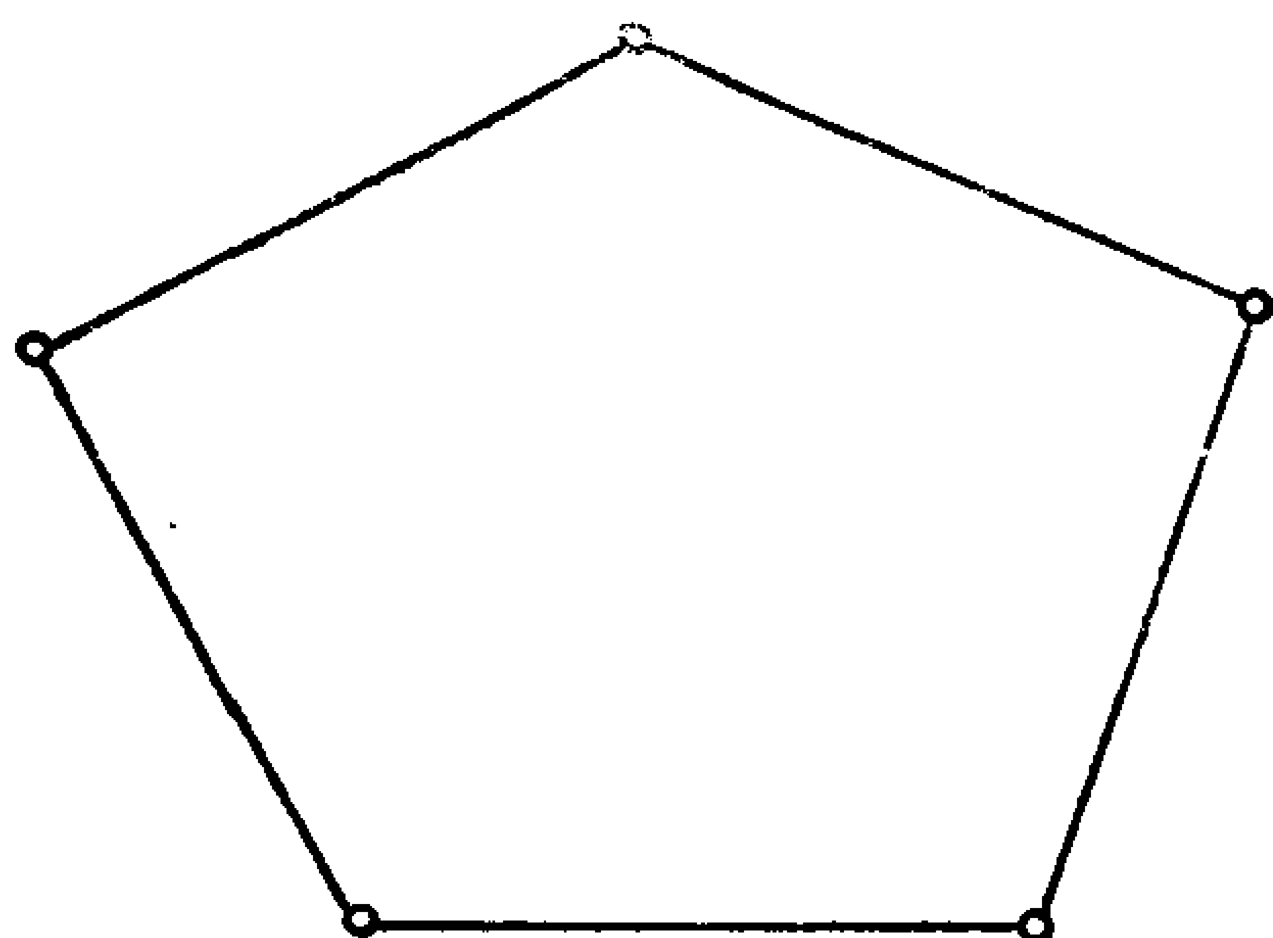


图 7.5

评注 本题中取出一个元素，用这个元素与其它元素之间的关系对所有元素进行分类的方法，是验证和应用 Ramsey 定理时常用的一种方法，下文将一再运用。本题证实 $q_1=3$, $q_2=3$, $r=2$ 时 Ramsey 定理成立，且 Ramsey 数 $N(3,3,2)=6$。这里的相识、不相识只是红、蓝线段的另一种说法而已，也只是 2–子集的一种直观解释而已。

7.24 在任何 10 个人中或者有 3 个人互相不认识，或者有 4 个人互相认识。

证 同上题考虑一人 a 和集合 A, B。A, B 把其余 9 人分成了两部分，其中有一部分至少有 4 个人。设 B 中有 4 人或更多，那么 B 中的人或者互相都认识，或者至少有两人互相不认识，不管那种情况，命题已能成立。设 B 中至多有 3 人，那么 A 中至少有 6 人。据题 7.23, A 中或者有 3 人互不相识（此时命题已满足），或者有 3 人互相认识，于是连同 a 便是互相认识的 4 人了，命题又得到满足。

评注 本题在 9 个人时也成立，证明相仿。讨论到 B 中至多有 3 人时，我们可以改为“B 中至多有 2 人”，因为我们总可以适当地选择所考虑的第一个人 a 以做到这一点。若不是这样，即每个人都恰有 3 人不认识，那么互不认识的人应当有 $\frac{3\times 9}{2}$ 对，

这是不可能的，因为 $3\times 9/2$ 不是整数。

7.25 证明 $N(3, 4, 2)>8$。

证 如图 7.6 所示，8 个点被虚、实(分别表示红、蓝)两种线段两两相连，但没有三个点完全被虚线所连，也没有 4 个点完全被实线所连，因此 $N(3, 4, 2)>8$(参阅提要 7.3)。

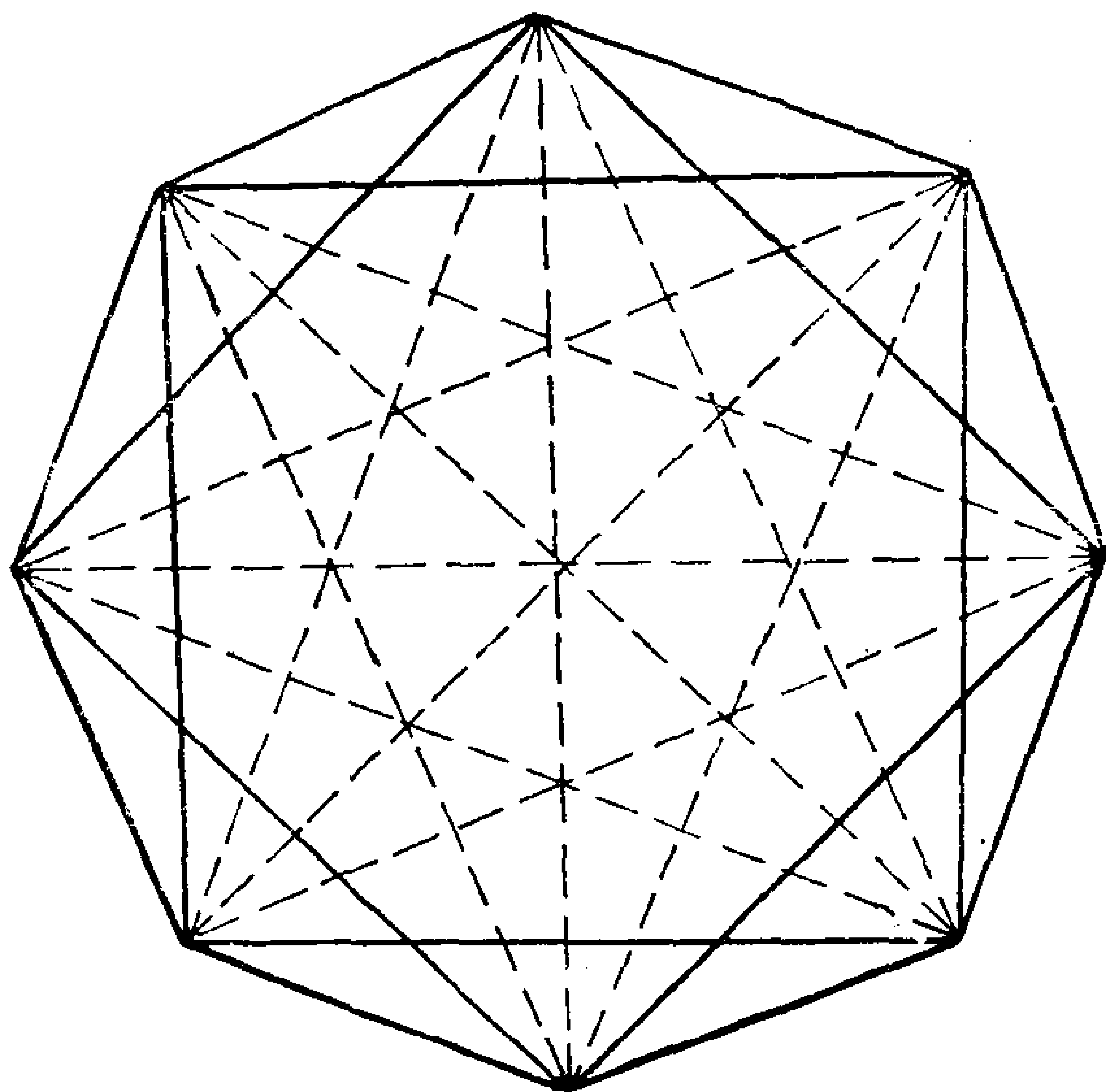


图 7.6

评注 连同题 7.24，可知 $N(3, 4, 2)=9$。

7.26 设 q_3 和 t 是正整数且 $q_3\geqslant t$，确定 Ramsey 数 $N(t, t, q_3, t)$。

解 可证明 $N(t, t, q_3, t)=q_3$。

先证 $N(t, t, q_3, t)\geqslant q_3$。这是因为当集合只有 q_3-1 个元素时，我们可将全部 t-子集放入第三个盒子中，此时三个盒子都不合要求，即第一盒子、第二盒子都没有 t 个元素的全部 t-子集，

第三盒子也没有 q_3 个元素的全部 t-子集。

再证 $N(t, t, q_3, t) \leqslant q_3$。这是因为当集合有 q_3 个元素时，无论将其 t-子集如何分放，(i)将全部 t-子集放入第三盒中，或(ii)至少有一个 t-子集进入第一或第二盒子，都使条件“或者第一盒子包含 t 个元素的全部 t-子集(注意：它只有一个)，或者第二盒子包含 t 个元素的全部 t-子集，或者第三盒子包含 q_3 个元素的全部 t-子集”得到满足。

7.27 证明 $N(3, 5, 2)=14$。

证 应用题 7.30 即将证明的结论 $N(a, b, 2) \leqslant N(a-1, b, 2)+N(a, b-1, 2)$ 得

$$
\begin{aligned}
N(3, 5, 2) &\leqslant N(2, 5, 2)+N(3, 4, 2) \\
&=5+9=14(\text{据题 7.26 及题 7.25})
\end{aligned}
$$

而图 7.7 表明，13 个点可以被虚、实线两两相连，使得没有三个

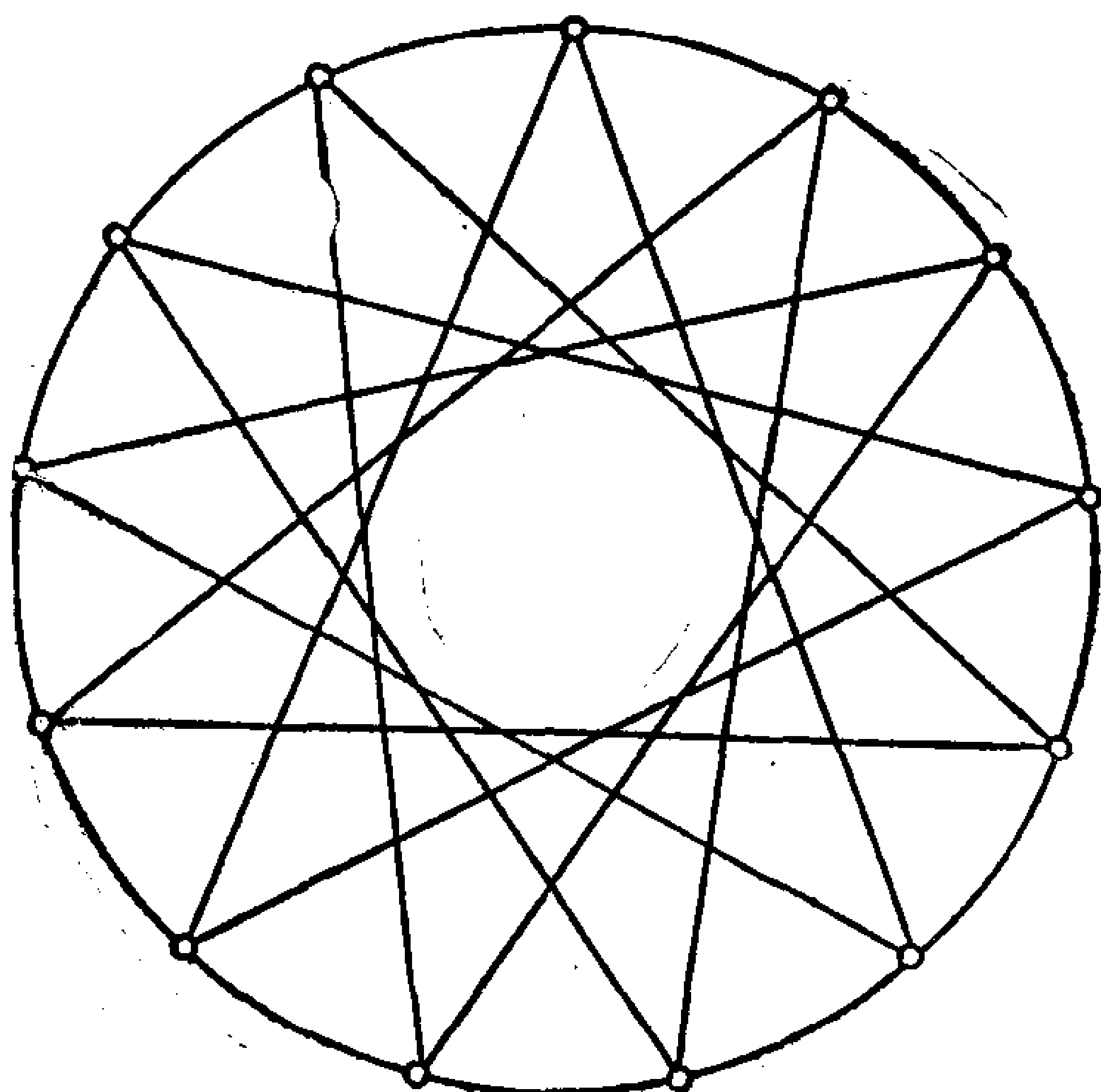


图 7.7

点全由实线相连，也没有五个点全由虚线相连(为了图的简明，我们将虚线隐去)，因此 $N(3, 5, 2)>13$。于是 $N(3, 5, 2)=14$ 得证。

7.28 设 $q_1, q_2, \cdots, q_n, r$ 为正整数，$q_i \geqslant r (i=1, 2, \cdots, n)$，而 Q 是 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的最大者。证明

$$N(Q, Q, \cdots, Q, r) \geqslant N(q_1, q_2, \cdots, q_n, r)$$

由此断定：为证明 Ramsey 定理，只需对 $q_1=q_2=\cdots=q_n$ 的情况立论。

证 设 $N(q_1, q_2, \cdots, q_n, r)=a$，那么存在一种方法将仅含 $a-1$ 个元素的集合 S 的全部 r-子集分配在 n 个盒子里，使第 i 盒子里都不含 q_i 个元素的全部 r-子集 $(i=1, 2, \cdots, n)$，因而也不可能含 $Q(>q_i)$ 个元素的全部 r-子集，因此 $N(Q, Q, \cdots, Q, r) \geqslant a$。

如果对 $q_1=q_2=\cdots=q_n=Q$ 的情况证明了 Ramsey 定理，即证明了 $N(Q, Q, \cdots, Q, r)$ 存在，那么由已证不等式可以断定 $N(q_1, q_2, \cdots, q_n, r)$ 存在。

7.29 证明

(1) $N(p, q, 1)=p+q-1$；

(2) $N(p, r, r)=p$。

证 利用 $N(q_1, \cdots, q_n, r)$ 的定义易证，请读者思考。

***7.30** 证明

(1) $N(a, b, 2) \leqslant N(a-1, b, 2)+N(a, b-1, 2)$；

(2) $N(a, b, 2) \leqslant \binom{a+b-2}{b-1}$。

证 (1) 我们只须证，有 $N(a-1, b, 2)+N(a, b-1, 2)$ 个人的集合 S 中，或者有 a 个人互相认识，或者有 b 个人互相不认识(参阅题 7.23 评注)。

考虑 S 中一人 m，并将余下的

$$N(a-1,\ b,\ 2)+N(a,\ b-1,\ 2)-1$$

个人分成两个集合 A, B:

$$A=\{x|x\text{ 认识 }m\}$$

$$B=\{x|x\text{ 不认识 }m\}$$

因而或者 A 有 $N(a-1,\ b,\ 2)$个人，或者 B 有 $N(a,\ b-1,\ 2)$个人(否则 A, B 总人数将少于 $N(a-1,\ b,\ 2)+N(a,\ b-1,2)-1$)。

若 A 有 $N(a-1,\ b,\ 2)$个人，据 $N(a-1,\ b,\ 2)$定义，或者有 $a-1$ 个人相互认识，从而连同 m, S 中便有 a 个人相互认识，或者有 b 个人相互不相识，从而 S 中亦然。此种情况总能使我们需要证的结论成立。

若 B 有 $N(a,\ b-1,\ 2)$ 个人，同上可证我们所需证的结论。

(2) 对 a, b 联立归纳。

$a=b=2$ 时，$N(2,\ 2,\ 2)=2$，而 $\binom{2+2-2}{2-1}=2$，命题成立。

设 $N(a-1,\ b,\ 2)\leqslant\binom{a-1+b-2}{b-1}$

$$N(a,\ b-1,\ 2)\leqslant\binom{a+b-1-2}{b-2}$$

据本题之(1)，

$$\begin{aligned}N(a,\ b,\ 2)&\leqslant N(a-1,\ b,\ 2)+N(a,\ b-1,\ 2)\\&\leqslant\binom{a+b-3}{b-1}+\binom{a+b-3}{b-2}\\&=\binom{a+b-2}{b-1}\end{aligned}$$

*7.31 当 $N(a-1, b, 2)$, $N(a, b-1, 2)$ 均为偶数时，上题中

$$N(a, b, 2) \leqslant N(a-1, b, 2) + N(a, b-1, 2)$$

的等号不能成立，即

$$N(a, b, 2) < N(a-1, b, 2) + N(a, b-1, 2)$$

证 我们证明在此种情况下

$$N(a, b, 2) \leqslant N(a-1, b, 2) + N(a, b-1, 2) - 1$$

证明过程同题 7.29，我们有：或者集合 A 至少有 $N(a-1, b, 2) - 1$ 个人，或者集合 B 至少有 $N(a, b-1, 2) - 1$ 个人。显然 $N(a-1, b, 2) - 1$, $N(a, b-1, 2) - 1$ 是奇数。如果对第一个人 m 的任意选择(共 $N(a-1, b, 2) + N(a, b-1, 2) - 1$ 种可能)，A, B集中均分别恰为 $N(a-1, b, 2) - 1$ 和$N(a, b-1, 2) - 1$ 个人，那将导至互相认识的人和互相不认识的人的对数分别是

$$\frac{(N(a-1, b, 2)-1)(N(a-1, b, 2)+N(a, b-1, 2)-1)}{2}$$

(非整数)

$$\frac{(N(a, b-1, 2)-1)(N(a-1, b, 2)+N(a, b-1, 2)-1)}{2}$$

(非整数)

这是不可能的。因此恒可适当选择第一个人 m，使得集合 A 至少有 $N(a-1, b, 2)$ 个人，或者集合 B 至少有 $N(a, b-1, 2)$ 个人。以后的讨论又同上题。

评注 本题的讨论与题 7.24 类似。

7.32 证明，$m \geqslant 2$ 时

(1) $$N(a_1, a_2, \cdots, a_m, 2) \leqslant N(a_1-1, a_2, \cdots, a_m, 2) + N(a_1, a_2-1, \cdots, a_m, 2) + \cdots + N(a_1, a_2, \cdots, a_m-1, 2);$$

(2) $N(a_1+1, a_2+1, \cdots, a_m+1, 2)\leqslant\binom{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_1, a_2, \cdots, a_m}$。

证 (1) 证明方法同题7.30，我们概述如下：

用 m 种颜色的线段两两连接

$$N(a_1-1, a_2, \cdots, a_m, 2)+N(a_1, a_2-1, \cdots, a_m, 2)+\cdots+N(a_1, a_2, \cdots, a_m-1, 2)$$

个点，只须证或者有 a_1 个点由颜色 1° 的线段相连，或者有 a_2 个点由颜色 2° 的线段相连，…，或者有 a_m 个点由颜色 m° 的线段相连。考虑一个点 A，并将余下的

$$N(a_1-1, a_2, \cdots, a_m, 2)+N(a_1, a_2-1, \cdots, a_m, 2)+\cdots+N(a_1, a_2, \cdots, a_m-1, 2)-1$$

个点分成 m 个集合

$S_1=\{x|x$ 与 A 用颜色 1° 的线段连接$\}$

$S_2=\{x|x$ 与 A 用颜色 2° 的线段相连$\}$

……

$S_m=\{x|x$ 与 A 用颜色 m° 的线段相连$\}$

那么，或者 S_1 有 $N(a_1-1, a_2, \cdots, a_m, 2)$个点，或者 S_2 有 $N(a_1, a_2-1, \cdots, a_m, 2)$个点，…，或者 S_m 有 $N(a_1, a_2, \cdots, a_m-1, 2)$个点。于是仿题7.30讨论，立得本命题。

(2) 对 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 联列归纳。

对 $a_1=a_2=\cdots=a_m=2$, $N(2, 2, \cdots, 2, 2)=2$，而

$$\binom{2+2+\cdots+2}{2, 2, \cdots, 2}=\frac{(2m)!}{(2!)^m}=\frac{(2m)!}{2^m},$$

显然，
$$N(2, 2, \cdots, 2, 2)\leqslant\binom{2+2+\cdots+2}{2, 2, \cdots, 2}$$

设 $N(a_1, a_2+1, \cdots, a_m+1, 2)\leqslant\binom{a_1-1+a_2+\cdots+a_m}{a_1-1, a_2, \cdots, a_m}$

$$N(a_1+1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m+1,\ 2)\leqslant\binom{a_1+a_2-1+\cdots+a_m}{a_1,\ a_2-1,\ \cdots,\ a_m}$$

$\cdots\cdots$

$$N(a_1+1,\ a_2+1,\ \cdots,\ a_m,\ 2)\leqslant\binom{a_1+a_2+\cdots+a_m-1}{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m-1}$$

据本题之(1)

$$\begin{aligned}&N(a_1+1,\ a_2+1,\ \cdots,\ a_m+1,\ 2)\\&\quad\leqslant N(a_1,\ a_2+1,\ \cdots,\ a_m+1,\ 2)\\&\qquad+N(a_1+1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m+1,\ 2)\\&\qquad\cdots\cdots\\&\qquad+N(a_1+1,\ a_2+1,\ \cdots,\ a_m,\ 2)\end{aligned}$$

从而由归纳假设得

$$N(a_1+1,\ a_2+1,\ \cdots,\ a_m+1,\ 2)\leqslant\binom{a_1-1+a_2+\cdots+a_m}{a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m}+\binom{a_1+a_2-1+\cdots+a_m}{a_1,\ a_2-1,\ \cdots,\ a_m}+\cdots+\binom{a_1+a_2+\cdots+a_m-1}{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m-1}$$

而左边为

$$\begin{aligned}&\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m-1)!}{(a_1-1)!a_2!\cdots a_m!}+\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m-1)!}{a_1!(a_2-1)!\cdots a_m!}+\cdots\\&\quad+\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m-1)!}{a_1!a_2!\cdots(a_m-1)!}\\&=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m-1)!(a_1+a_2+\cdots+a_m)}{a_1!a_2!\cdots a_m!}\\&=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)!}{a_1!a_2!\cdots a_m!}\\&=\binom{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m}\end{aligned}$$

归纳完成，定理得证。

7.33 设S是三维空间中任何3点都不共线的6个点的集合。用红、蓝两色的线段两两连接各点(共15条红线段或蓝线段)。证明:至少可以得到两个红色三角形或两个蓝色三角形或一个红色三角形及一个蓝色三角形。

证 由题7.23可知,至少可以得到一个红色三角形或一个蓝色三角形。不妨设可得到一个红色三角形(得到一个蓝色三角形的情况可作类似讨论以证明本命题成立),其顶点为a_1, a_2, a_3(如图7.8所示,图中实线表示红色线段,虚线表示兰色线段),其余顶点为A, B, C。

考虑顶点A,可设Aa_1, Aa_2, Aa_3中至少有两条兰线段(否则又有一红色三角形,命题得证)。同理,可设Ba_1, Ba_2, Ba_3中至少有两条兰线段。从而,至少有一个a_i(例如图中的a_2)使Aa_i与Ba_i同色(蓝色),因此AB是红色(否则可得一蓝色三角形,命题得证)。

同理可证AC, BC是红色,于是又得到一个红色三角形ABC。

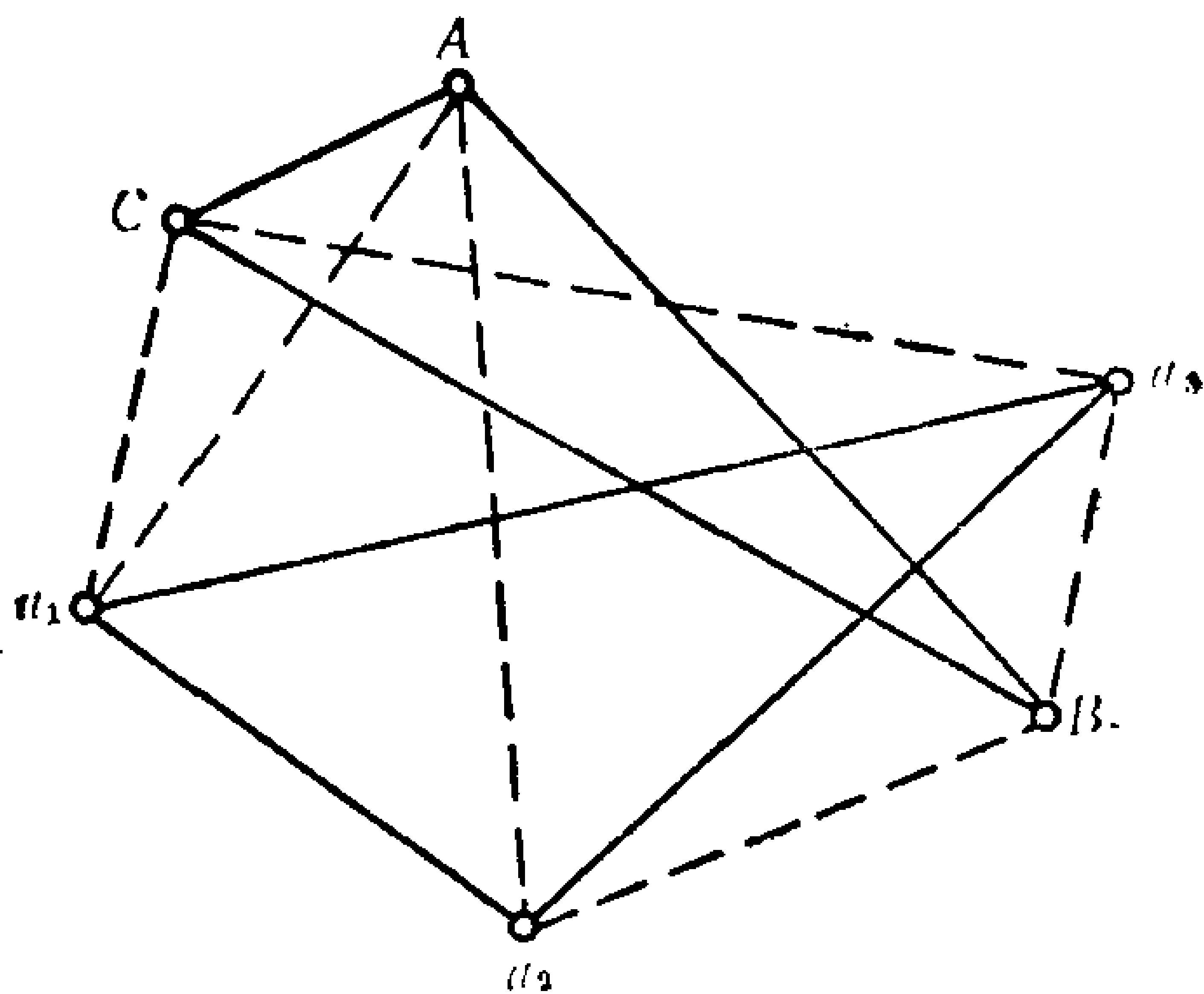


图 7.8

总之，本命题成立。

评注 为了推广本题的结果，还可采用以下解法：

设 6 个点是 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$，用 r_i 表示 P_i 点所关联的红色线段的条数 ($i=1, 2, \cdots, 6$)，用 $\triangle_6$ 表示同色三角形(红色三角形或蓝色三角形)的总数。我们注意到下列明显事实：

(*) 一个三角形三边不同色当且仅当三个顶点中恰有两个顶点，它们中的每一个所关联的两条边都是一红一蓝。

显然，$\binom{6}{3}$ 是所有三角形的总数。此外，对于顶点 $P_i(i=1, 2, \cdots, 6)$ 来说，一条红边和一条蓝边交汇于 P_i 从而造成三边不同色的三角形的总数是 $r_i(5-r_i)$ (因为 P_i 共关联 5 条边，而其中 r_i 条红边)。如果不考虑重复，这样算得的不同色三角形有 $\sum_{i=1}^{6} r_i(5-r_i)$ 个。但事实(*)告诉我们，每一个不同色三角形恰包含两个关联一红一蓝两边的顶点，因此同一个不同色三角形在对诸 P_i 计算时重复计算了两次，因此事实上只有 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} r_i(5-r_i)$ 个不同色三角形。故

$$\triangle_6=\binom{6}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} r_i(5-r_i)$$

由于 $r_i(5-r_i)$ 在 $r_i=2$ 时取得极大值 6，因而

$$\triangle_6 \geqslant 20-\frac{1}{2}\cdot 36=2$$

这就是说至少有两个同色三角形，题 7.33 又获证。

7.34 题 7.33 中集合 S 有 7 个点时情况如何？

解 此时，至少有三个同色三角形，因为

$$\triangle_7=\binom{7}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}r_i(6-r_i)$$

$$\geqslant 35-\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 9\geqslant 3$$

7.35 证明：题 7.33 中集合 S 有 $2n$ 个点时，至少有 $2\binom{n}{3}$ 个同色三角形。

证 同题 7.33 讨论，

$$\triangle_{2n}=\binom{2n}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}r_i(2n-1-r_i)$$

$$\geqslant\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}n(n-1)$$

$$=\frac{2n(2n-1)(2n-2)-6n^2(n-1)}{6}$$

$$=\frac{2n(4n^2-6n+2-3n^2+3n)}{6}$$

$$=\frac{2n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$=2\binom{n}{3}$$

***7.36** 令 $p_n=[ln!]+1$。证明：当用 n 种颜色的线段连接空间 p_n 个点（没有三点共线）时，至少有一个同色三角形。

证 对 n 归纳。

$n=2$ 时 $p_n=[l\cdot 2!]+1=6$。我们已知，6 个点用两种颜色的线段连接时，恰至少有一个同色三角形（见题 7.23）。

设 $p_{n-1}=[l(n-1)!]+1$ 个点在用 $n-1$ 种颜色的线段相连接时至少有一个同色三角形。现考虑空间的 $p_n=[ln!]+1$ 个点中的任一点 A，与 A 关联的边是 $[ln!]$ 条，据鸽笼原理，其中

至少有$[[ln!]/n]+1$条边同色$\left(因为\frac{[ln!]}{n}>\left[\frac{[ln!]}{n}\right]\right)$。令$l=[[ln!]/n]+1$，如图7.9中$AB_1$, AB_2, …, AB_l诸边同色。

由于

$$[ln!]\geqslant[l(n-1)!]\cdot n$$

故

$$l\geqslant[[l(n-1)!]n/n]+1$$
$$=[l(n-1)!]+1$$

考虑B_1, B_2, …, B_l诸点，如果B_iB_j $(i\neq j)$诸边中有一边与AB_1同色，那么我们已有本题结论；如果它们全非此色，而只是其它$n-1$种颜色之一，那么据归纳假设，这l个点中有一个同色三角形，命题又得证。

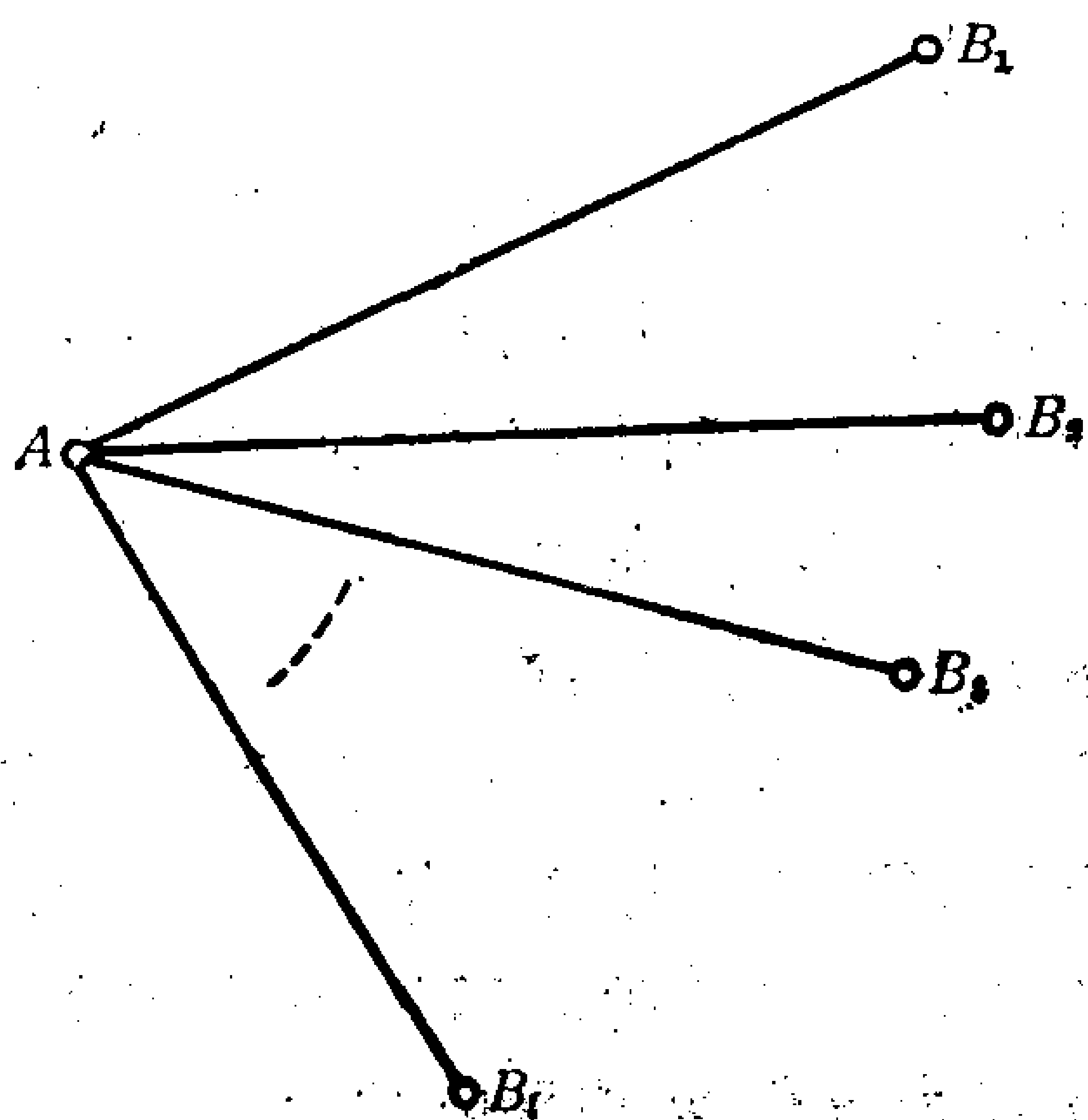


图 7.9

评注 文献[2]习题认为这是最好结果，这与文献[4]不合。当$n=4$时，$p_n=[l\cdot4!]+1=65$。但文献[4]指出

$$N(3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2)\leqslant64$$

7.37 证明 任意给定平面上的五个点（没有三点共线）中，必有四点是一个凸四边形的四个顶点。

证 考虑其中三点所组成的三角形。如果其余两点中有一点落在三角形之外，那么这一点与原三点必为一凸四边形的四个顶点。如果其余两点全在三角形之中，那么这两点确定的直线总使三角形的某两个顶点落在该直线的同一侧，这两个顶点与直线上两点又构成一个凸四边形。

7.38 证明：平面上的m个点(没有三点共线)中，若任意

四点都是凸四边形的四个顶点，那么这 m 个点必是一凸 m 边形的顶点。

证 设 $\frac{m(m-1)}{2}$ 条边联接 m 点所得图形(如图7.10)中最大的凸多边形是 $V_1V_2\cdots V_n$。我们对每一边 V_iV_{i+1} 延长其两邻边 $V_{i-1}V_i$ 和 $V_{i+1}V_{i+2}$(注意 $V_i=V_n$ 时，$V_{i+1}=V_1$，$V_{i+2}=V_2$)，可得到以边 V_iV_{i+1}，$V_{i-1}V_i$，$V_{i+1}V_{i+2}$ 为界，在边 V_iV_{i+1} 外侧的区域，例如 $n=5$ 时，各边对应的外侧区域如图7.10阴影部分所示。

若有点落在 $V_1V_2\cdots V_n$ 中或落在它所有外侧区域之外(即图7.10中的非阴影部分)，象图7.10中的 V，V'，则必有四点构成凹四边形，与题设矛盾。若有点落在阴影部分，如图7.10中的 V'' 点，则我们有凸 $n+1$ 边形 $V_1V_2\cdots V_nV$，与 $V_1V_2\cdots V_n$ 的最大性相矛盾。因此 m 个点全落在 $V_1V_2\cdots V_n$ 的边界上，即 m 点为一凸 m 边形的顶点。

评注 上两题是求解下一问题的准备。

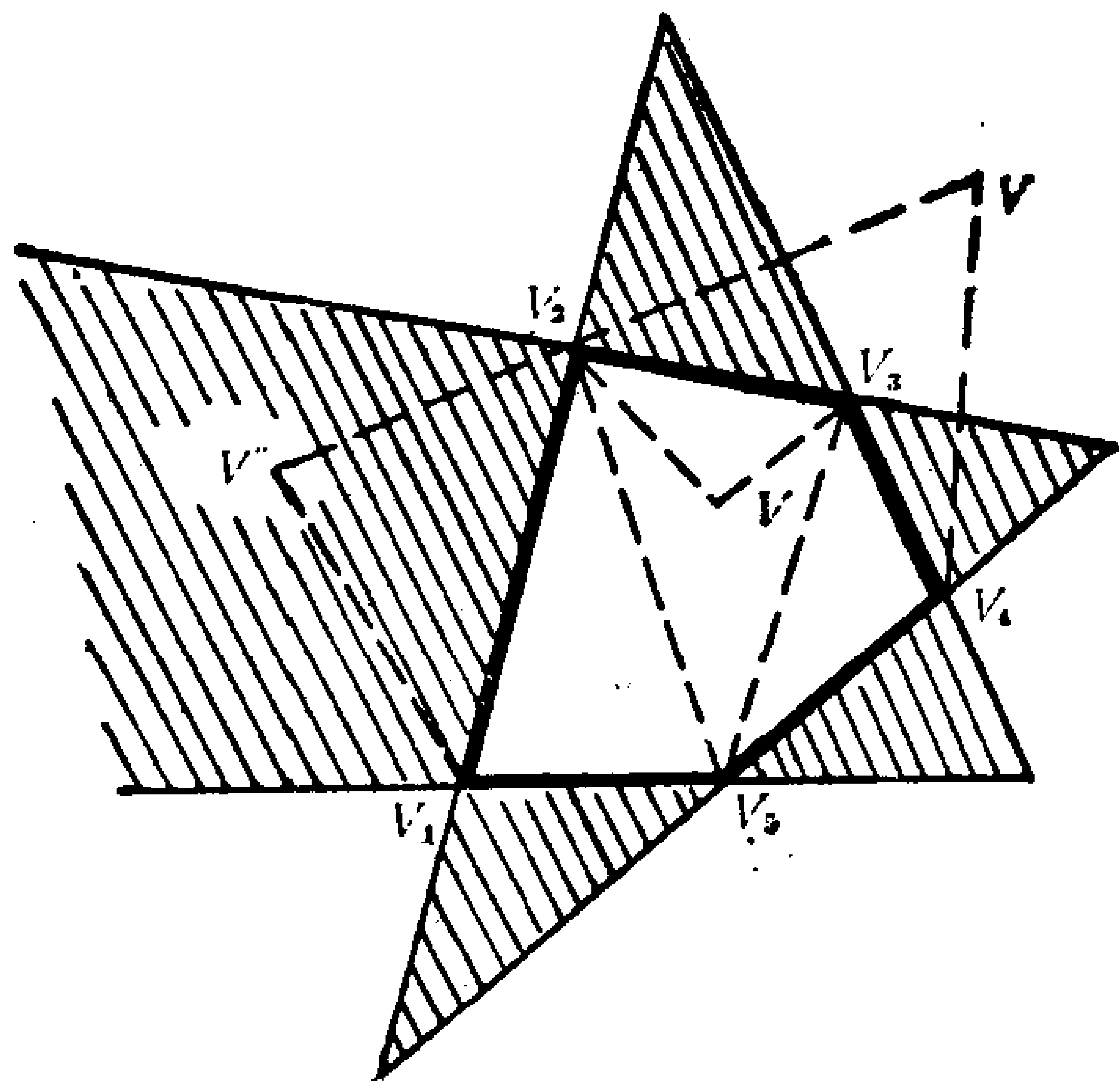


图 7.10

7.39 设 m 是不小于3的整数，证明：存在 N，使得当 $n\geqslant$

N时，在平面上任何三点不共线的n个点中，必有m个点是凸m边形的顶点。

证 $m=3$时，显然成立。设$m\geqslant 4$，$N=N(5,m,4)$，$n\geqslant N$。据Ramsey定理，$N(5, m, 4)$中或者有5个点，它的4-子集都是凹四边形4角的顶点，或者有m个点，它的4-子集都是凸四边形4角的顶点。由题7.37，第一种可能是不会成立的，因此第二种可能必定成立，即有m个点，它的所有4-子集都是凸四边形的4个顶点。据题7.38，这m个点必是凸m边形的m个顶点。

***7.40** 证明 对任意给定的正整数m，只要n充分大，每个n阶(0, 1)方阵一定含有如下四种m阶主子方阵之一：

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & * \end{pmatrix}$$

(它们在对角线上、下或者全为0，或者全为1，但对角线上可以是0也可以是1)

证 取$N=N(m, m, m, m, 2)$。设A表示$N\times N$(0, 1)方阵，a_{ij}表示A的第i行第j列分量，b_i表示A的第i行，$S=\{b_1, b_2, \cdots, b_N\}$。假定$S$的所有2-子集$\{b_i, b_j\}$如下分为四类：

(0, 0)类，$\{b_i, b_j\}\in$(0, 0)类当且仅当$a_{ij}=a_{ji}=0$，

(0, 1)类，$\{b_i, b_j\}\in$(0, 1)类当且仅当$a_{ij}=0, a_{ji}=1 (i<j)$，

(1, 0)类，$\{b_i, b_j\}\in$(1, 0)类当且仅当$a_{ij}=1, a_{ji}=0 (i<j)$，

(1, 1)类，$\{b_i, b_j\}\in$(1, 1)类当且仅当$a_{ij}=a_{ji}=1$。

据Ramsey定理，有S中的m行，使其2-子集全部属于这四类之一。这些行组成的$m\times m$主子方阵必定是题中所列形式之一。例如

$$m\begin{cases} b_i \\ b_j \end{cases}\begin{pmatrix} \diagdown & a_{ij}=0 \\ a_{ji}=1 & \diagdown \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & & * \end{pmatrix}$$

($\{b_i, b_j\}\in(0, 1)$类, $1\leqslant i, j\leqslant N$, 该主子方阵为所列方阵的第二种)

评注 在解有关 Ramsey 定理及其应用的问题时，最重要的是正确理解定理意义，特别 $r=2$ 时定理的几种形象的说法。在解题时则要正确地设计点集 S，点集分成哪 n 个部分，正确地确定 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 及 r 分别体现在哪些已知量或已知事实当中。

如果从更高的角度来看问题，有关鸽笼原理和 Ramsey 定理的应用问题的解法都是模式化归方法，即把实际问题化归到"鸽子、鸽笼"的模式，化归到"点集的 r-子集分类"的模式的方法。

第八章 Polya 定 理

内容提要

本章着重讨论 Polya 计数定理及其应用。Polya 定理分为特殊形式和普遍形式两种。特殊形式的 Polya 定理，简称 Polya 定理，主要用于计数，是解决“在置换群的作用下，不同等价类个数”这类问题的有力工具。普遍形式的 Polya 定理，亦称加权 Polya 定理，是权、生成函数和在置换群作用下的等价性三方面概念的巧妙结合的范例，主要用于列举，也用于解决“在置换群的作用下，特定事物的个数”这类复杂计数问题。

两种形式 Polya 定理都建立在置换群概念和 Burnside 定理的基础上。所以我们先对置换群作些介绍，再证明 Burnside 定理，然后才转入两种形式的 Polya 定理。

8-1 置换群

1. 置换及其运算

定义 8.1 设集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，一个 A 到 A 的双射函数称为 A 的一个置换，记成

$$p=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_n} \end{pmatrix}$$

它表示 $p(a_1)=a_{i_1}$，$p(a_2)=a_{i_2}$，$\cdots$，$p(a_n)=a_{i_n}$ 的意思。$p(a_j)=a_{i_j}$ 常简写成 $a_j \to a_{i_j}$，形象地读作把 a_j 送入 a_{i_j}。

为方便论述，通常就取 $A=\{1, 2, \cdots, n\}$ 进行讨论。

和函数一样，可以定义 A 上的两个置换的合成运算，简称乘法，合成运算满足结合律，但不满足交换律。例如

$$p_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad p_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

则

$$p_1p_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$p_2p_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$p_1p_2 \neq p_2p_1$$

2．圈

定义 8.2 一个圈是列在圆括号中的一排数，这些数用逗号或空位隔开，圈 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 表示"把 a_1 送到 a_2，把 a_2 送到 a_3，…，把 a_{m-1} 送到 a_m，把 a_m 送到 a_1"这样一个重排。圈中元素个数称为该圈的长度。例如(1, 3, 2, 4)的圈长为 4，称为 4–圈。

由此定义可知，要表示一个圈仅需表示出圈中各元素的相邻关系，而与哪个元素先写无关，因此轮转括号内各元素，仍表示相同的圈，例如 (1, 2, 3) = (2, 3, 1) = (3, 1, 2)。

圈是特殊的置换，也可进行合成运算。

若两个圈 $(a_1, a_2, \cdots, a_l)$ 和 $(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ 中没有相同的元素，则称这两个圈是不相交的。例如 (1, 4, 3), (2, 6, 5) 是两个不相交的圈。两个不相交的圈的乘法可以交换。

任何一个置换都可写成不相交的圈的乘积，例如

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\\ 5, & 4, & 3, & 6, & 1, & 2\end{pmatrix}=(1,\ 5)(2,\ 4,\ 6)(3)$$

其中 1–圈有时可不写出，所缺的元素都是 1–圈。例如，(1, 5)(2, 4, 6)(3)可写成(1, 5)(2, 4, 6)。

这种表示法在不考虑各圈的次序时（因为可交换）是唯一

的，有表达出置换内在结构的优点。

若一个圈的长度为 r，则该圈自乘 r 次，就得到 r 个长度为 1 的圈。因此，一个置换若是 k 个长分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的圈的乘积，且 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的最小公倍数是 m，则这个置换自乘 m 次后，一定得出一个恒等置换 I（每个元素位置不变的置换）。例如

（i） $c=(1, 3, 2)$

$c^2=(1, 3, 2)(1, 3, 2)=(1, 2, 3)$

$c^3=(1, 2, 3)(1, 3, 2)=(1)(2)(3)$

（ii） $p=(1, 2)(3, 4, 5, 6)$

$p^2=(1)(2)(3, 5)(4, 6)$

$p^3=(1, 2)(3, 6, 5, 4)$

$p^4=(1)(2)(3)(4)(5)(6)=I$

3．对换

定义 8.3 长度为 2 的圈称为**对换**。

每个置换都可写成对换之乘积。这种分解的形式不唯一，也不一定是不相交的。但能分解成奇数个还是偶数个对换的乘积，这种奇偶性却是不变的。例如

$$(1, 2, 3, 4, 5)=(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)$$
$$=(2, 4)(5, 1)(3, 1)(3, 4)(4, 1)(2, 5)$$
$$=(1, 5)(2, 5)(4, 3)(3, 5)$$

一个置换若只能分解成偶数个对换的乘积则称该置换为**偶置换**，否则称为**奇置换**。这一定义和第二章中用倒置个数来定义是一致的。

4．群

定义 8.4 一个代数结构 $\langle G, \circ\rangle$ 称为一个**群**，如果

(1) 满足封闭性，即若 $a, b\in G$，则 $a\circ b\in G$。

(2) 满足结合律，$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$。

(3) 有幺元 e，即存在一元素 e，对任意 $a\in G$ 有 $a\circ e=e\circ a=a$。

(4) 有逆元，即对任意 $a\in G$，存在元素 a^{-1}，使得 $a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=e$。

设 $A=\{1, 2, \cdots, n\}$，容易验证 A 上的所有置换在合成运算下满足上述条件，所以构成一个群，称为**对称群**，记为 S_n。有时，A 上的部分置换在合成运算下也满足上述条件，这样所得的群称为 **n 次置换群**。n 次置换群是 n 次对称群 S_n 的子群，而对称群是置换群的特殊情况。

例如 $A=\{1, 2, 3\}$，A 上的 6 个置换为

$$p_1=(1)(2)(3),\ p_2=(1, 2, 3),\ p_3=(1, 3, 2)$$
$$p_4=(1, 2)(3),\ p_5=(1)(2, 3),\ p_6=(2)(1, 3)$$

则 $\langle\{p_1, p_2, \cdots, p_6\}, \circ\rangle$ 是对称群 S_3，而 $\langle\{p_1, p_2, p_3\}, \circ\rangle$ 是 3 次置换群。

5．共轭类

我们把置换按其不相交圈的分解式分类，凡是相同长度的圈的个数相等的归于一类，称为**共轭类**。例如

$$(1)(2, 3)(4, 5, 6, 7)\text{和}(1, 2)(3, 4, 5, 6)(7)$$

在同一类中。

共轭类可形式表示为 $(1)^{\lambda_1}(2)^{\lambda_2}\cdots(n)^{\lambda_n}$，其中 $(k)^{\lambda_k}$ 表示长为 k 的圈出现 λ_k 次。例如

$(1)(2, 3)(4, 5, 6, 7)$ 属于 $(1)^1(2)^1(3)^0(4)^1(5)^0(6)^0(7)^0$ 类；

$(1, 2)(3, 4)(5, 6, 7)$ 属于 $(1)^0(2)^2(3)^1(4)^0(5)^0(6)^0(7)^0$ 类。容易看出

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+n\lambda_n=n$$

在 S_n 中，含在共轭类 $(1)^{\lambda_1}(2)^{\lambda_2}\cdots(n)^{\lambda_n}$ 中的置换个数是

$$\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}}$$

称为 Cauchy 公式(证明见题 8.18)。

8-2 Burnside 定理

1. 轨

定义 8.5 设 G 是 S_n 的一个子群，对任意 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，集合 $\{x|G$ 的某元素把 k 送到 $x\}$ 称为 k 的**轨**，记为 O_k。

例如，$G=\langle\{I,(1,2)(3)(4),(1)(2)(3,4),(1,2)(3,4)\},\circ\rangle$

则 $O_1=\{1,2\}$ $O_2=\{1,2\}$ $O_3=\{3,4\}$ $O_4=\{3,4\}$

因为

(1) 若有 G 中的元素 g_1(置换)把 k 送到 x，则必存在 G 中的元素 g_1^{-1} 把 x 送到 k，又若有元素 g_2 把 k 送入 y，则在 G 中存在置换 $g_3=g_1^{-1}g_2$ 把 x 送入 y，同理存在置换 g_4 把 y 送入 x，即具有对称性。

(2) 若有 G 中的元素 g_1 和 g_2，分别把 x 送到 y，把 y 送到 z，则必存在 G 中的元素 g_1g_2 把 x 送到 z，即具有传递性。

(3) G 中含有恒等置换，它把 x 送到 x，即具有自反性。

所以，轨实际上是一等价类。与 G 相联结的所有轨，实际上是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 在置换群 G 的作用下的一个等价划分。因此，任何两个轨 O_x 和 O_y 或是不相交或是全等。

2. 稳定集

定义 8.6 在 S_n 的子群 G 中，使数 k 保持不动的 G 中所有置换的集合，称为 k 的**稳定集**，记作 St_k。

例如，在上例中稳定集为：

$St_1=\{I,(3,4)\}$; $St_2=\{I,(3,4)\}$

$St_3=\{I,(1,2)\}$; $St_4=\{I,(1,2)\}$

稳定集和轨有以下关系：

$$N(St_k)\cdot N(O_k)=N(G) \quad \text{(证明见题 8.23)}$$

$N(x)$表示集合 x 中的元素个数，即 x 的基数。

3．Burnside 定理

定理 8.1 设 $\overline{G}$ 是 S_n 的一个子群，与 $\overline{G}$ 相联结的不同轨的个数为

$$l=\frac{1}{N(\overline{G})}[\lambda_1(\overline{g}_1)+\lambda_1(\overline{g}_2)+\cdots] \tag{8-1}$$

以上和式是对 $\overline{G}$ 中所有元素进行，其中 $\lambda_1(\overline{g}_i)$ 是 $\overline{g}_i$ 中保持不动的元素个数，即 1-圈的个数。(证明见题 8.25)

例如 $\overline{G}=\{I,\ (1,\ 2)(3)(4),\ (1)(2)(3,\ 4),\ (1,2)(3,4)\}$，$\overline{G}$ 中 1-圈的总和是 8，而 $N(\overline{G})=4$，所以 $l=\frac{1}{4}(8)=2$，这和(1)中的结论一致。

8-3 Polya 定理

1．格式

在置换群的作用下，事物的一个等价类叫做一个格式。例如，有方块 1，2，3，4，如图 8.1 所示。现给每一方块着上黑色或白色。若在置换群

$$G=\{g_0,\ g_1,\ g_2,\ g_3\}$$

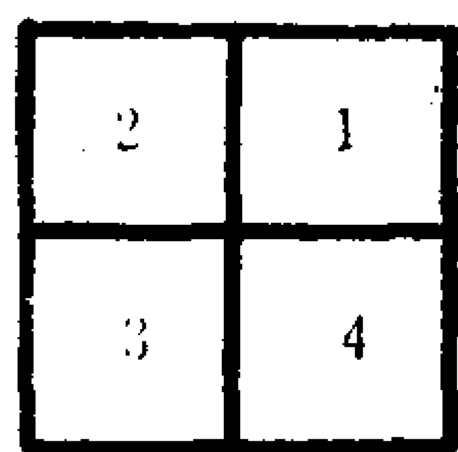


图 8.1

的作用下，其中 g_0 表示不动，即 $g_0=(1)(2)(3)(4)$，g_1 表示逆时针转 90°，即 $g_1=(1,2,3,4)$，g_2 表示逆时针转180°，即 $g_2=(1,\ 3)(2,\ 4)$，g_3 表示逆时针转 270°，即 $g_3=(4,\ 3,\ 2,1)$，则图 8.2 所示的相等价图形组成一类，称为一个格式。

2．特殊形式的 Polya 定理

定理 8.2 设 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 是对象集，在对象集上定义一

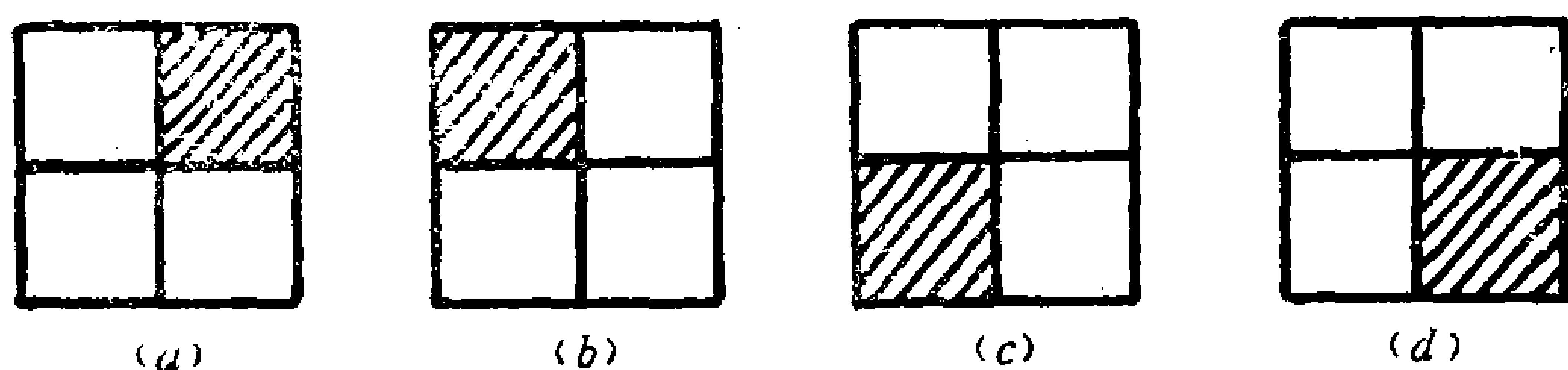


图 8.2

个置换群 G, 又设 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 是颜色集, 用 m 种颜色之一给每一对象着色。若在 G 的作用下, 对 n 个元素的一种着色可转变为另一种着色, 则认为这两种着色是同格式的。不同格式数是

$$l=\frac{1}{N(G)}[m^{\lambda(g_0)}+m^{\lambda(g_1)}+\cdots] \tag{8-2}$$

上式求和是对 G 中所有元素 g 进行, 其中 $\lambda(g_i)$ 表示置换 g_i 分解成不相交圈的积中圈的总个数(包括 1-圈)。(证明见题 8.29)

例如, 上例中, 四个方块的不同着色方式有 16 种, 如图 8.3 所示。不同格式数可按(8-2)式计算。因 $N(G)=4$, $\lambda(g_0)=4$ $\lambda(g_1)=1$, $\lambda(g_2)=2$, $\lambda(g_3)=1$, 所以

$$l=\frac{1}{4}[2^4+2^1+2^2+2^1]=6$$

实际上也确有 6 种格式, 如图 8.4 所示。

3. 权

设对象集为 $D=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$, 颜色集为 $R=\{1, 2, \cdots, m\}$。对每一种颜色 r 定义一个权 $w(r)$, 则对 D 中所有元素的一种着色 c, 定义 c 的权为

$$w(c)=w(d_1\text{所着颜色})\cdot w(d_2\text{所着颜色})\cdots\cdots w(d_n\text{所着颜色})$$

这里 $w(r)$ 可以是数值, 也可以是文字(形式符号)。

例如, $D=\{d_1, d_2, d_3\}$, $R=\{$红、黄$\}$, $w($红$)=2, w($黄$)=$

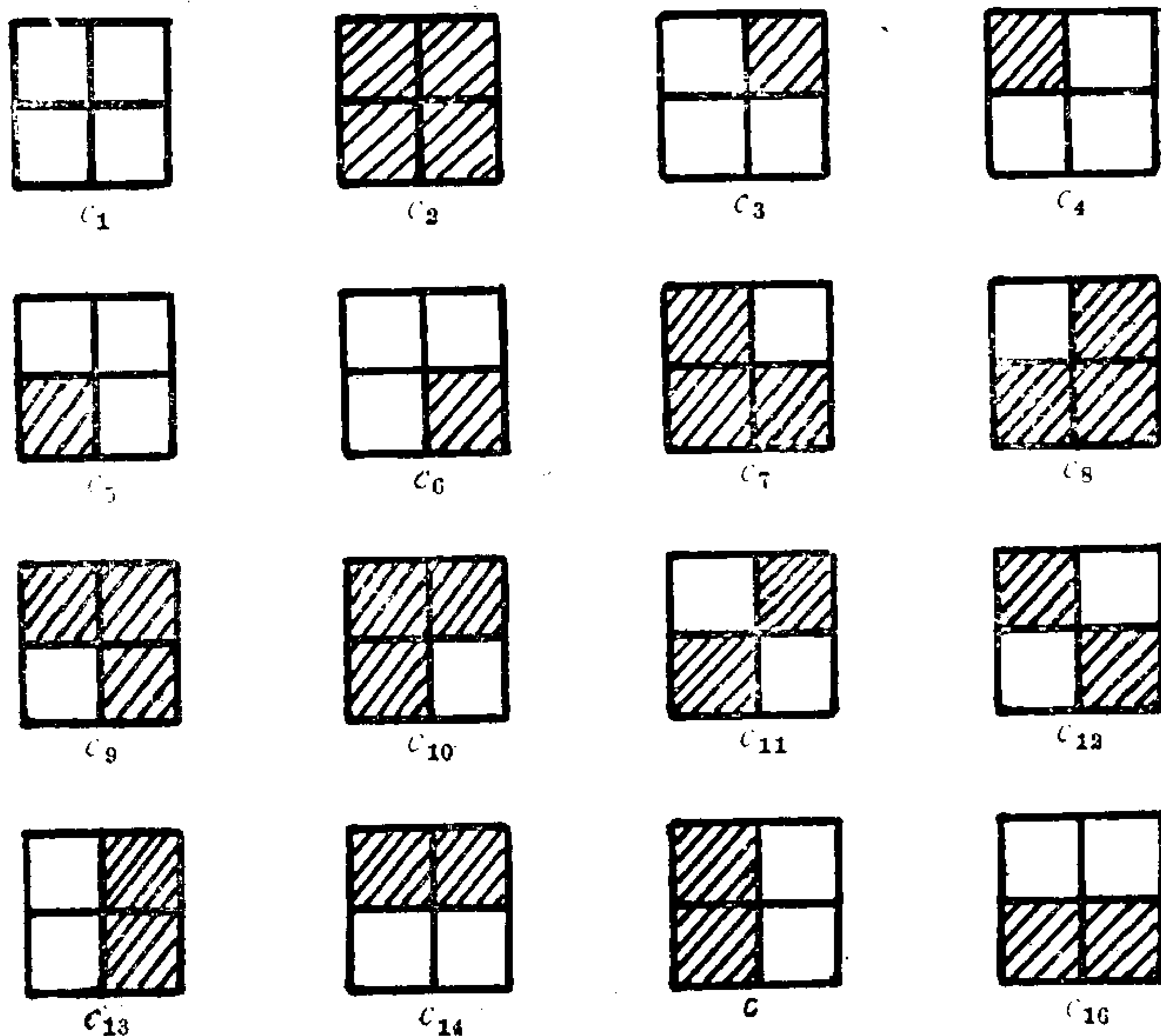


图 8.3

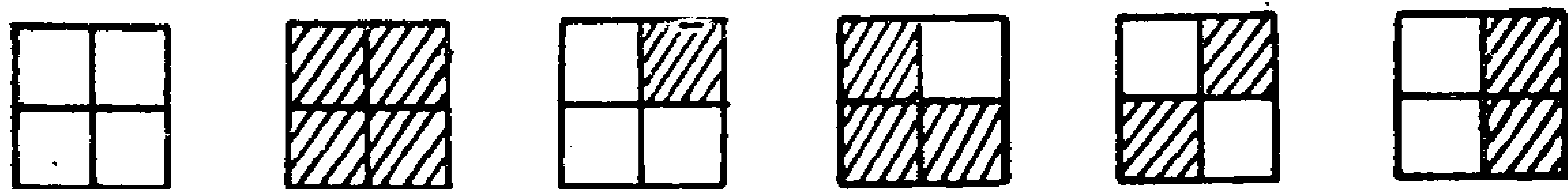


图 8.4

3, 则 d_1 着红色, d_2 着黄色, d_3 着红色所得的着色 c 的权是

$$w(c)=w(红)\cdot w(黄)\cdot w(红)=2\cdot 3\cdot 2=12$$

4. 清单

如果 S 是某一着色集合(例如上边的 c 是一种着色, 着色集合是指以各种不同着色为元素的集合), S 的**清单**定义为 S 中各种着色的权之和, 记作 $\text{inv}(S)$。设颜色集为 $R=\{1,2,\cdots,m\}$, 对象集为 $D=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$, 所有可能的着色集合为 S, 则

$$\mathrm{inv}(S)=[w(1)+w(2)+\cdots+w(m)]^n \tag{8-3}$$

如果 D 被分解为不相交的子集 D_1, D_2, $\cdots$, D_k, 同在一子集中的元素限着同一颜色, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}(S)=&[w(1)^{N(D_1)}+w(2)^{N(D_1)}+\cdots+w(m)^{N(D_1)}]\\&\cdot[w(1)^{N(D_2)}+w(2)^{N(D_2)}+\cdots+w(m)^{N(D_2)}]\\&\cdots\cdots\\&\cdot[w(1)^{N(D_k)}+w(2)^{N(D_k)}+\cdots+w(m)^{N(D_k)}]\end{aligned} \tag{8-4}$$

例 1 用 r, y, b, g 四种颜色给三个同样的球着色, 求所有方案数。

解 形式地看待本题, 即 $D=\{d_1, d_2, d_3\}$, $R=\{1,2,3,4\}$, $w(1)=r$, $w(2)=y$, $w(3)=b$, $w(4)=g$, 求得着色集合 S 的清单, 即可求得方案数。应用公式(8-3)得

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}(S)&=(r+y+b+g)^3\\&=r^3+y^3+b^3+g^3+3r^2y+3r^2b+3r^2g\\&\quad+3ry^2+3y^2b+3y^2g+3rb^2+3yb^2\\&\quad+3b^2g+3rg^2+3yg^2+3bg^2+6ryb\\&\quad+6rbg+6ryg+6ybg\end{aligned}$$

式中各项的文字表示方案, 系数表示该方案个数, 例如 $3r^2y$ 项表示两个球着红色(r)一个球着黄色(y)的方案有 3 种:

(1) d_1 着 r, d_2 着 r, d_3 着 y。

(2) d_1 着 r, d_2 着 y, d_3 着 r。

(3) d_1 着 y, d_2 着 r, d_3 着 r。

所以不同方案数为 20(若三个球是不同的, 则方案数为 4^3)。

把(8-3)和(8-4)式中的权都取 1, 分别得

$$\mathrm{inv}(S)=[1+1+\cdots+1]^n=m^n \tag{8-5}$$

$$\text{inv}(S)=(1+1+\cdots+1)(1+1+\cdots+1)\cdots(1+1+\cdots+1)$$
$$=m^k \tag{8-6}$$

式(8–5)正好说明用 m 种颜色对 n 个元素着色的方法数。

式(8–6)正好说明用 m 种颜色对 k 个子集着色的方法数。

5．带权的 Burnside 定理

定理 8.3 设对象集 $D=\{d_1, d_2, \cdots, d_l\}$，颜色集 $R=\{1, 2, \cdots, m\}$，G 是 D 上的一个置换。由 D 和 R 可产生着色集合 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$，$s_i$ 的权用 $w(s_i)$ 表示。由 G 可诱导出 S 上的一个置换群 $\overline{G}$，对 $\overline{G}$ 中的每个元素 $\overline{g}$，在 $\overline{g}$ 的作用下，保持不变的元素的权之和记为 $\overline{w}(\overline{g})$。另外，记 G 的轨为 $O_1, O_2, \cdots$，假定每个轨中的元素都有相同的权，定义每个轨的权 $w(O_i)$ 为轨中元素的共同权，则

$$w(O_1)+w(O_2)+\cdots=\frac{1}{N(\overline{G})}[\overline{w}(\overline{g}_1)+\overline{w}(\overline{g}_2)+\cdots] \tag{8-7}$$

左侧和式对 G 的不同轨进行，右侧和式是对 $\overline{G}$ 的所有元素进行。(证明见题 8.37)

若所有的 $w(s_i)=1$，则(8–7)式成为

$$l=\frac{1}{N(\overline{G})}[\lambda_1(\overline{g}_1)+\lambda_2(\overline{g}_2)+\cdots]$$

即 Burnside 定理中的公式。

6．普遍形式的 Polya 定理

定理 8.4 设 $R=\{1, 2, \cdots, m\}$ 是颜色集，$D=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 是对象集，S 是 R 对 D 的着色集合。G 是 D 上的置换群。如果有 G 中某个 g 把某种着色送到另一种着色，我们就认为这两种着色是等价的。我们定义在 G 作用下的等价类(即格式)的权为等价类中诸元素的共同权，则所有格式的权之和是

$$\frac{1}{N(G)}\cdot[w_1^{\lambda_1(g_1)}w_2^{\lambda_2(g_1)}\cdots w_n^{\lambda_n(g_1)}$$

$$+w_1^{\lambda_1(g_2)}w_2^{\lambda_2(g_2)}\cdots w_n^{\lambda_n(g_2)}+\cdots] \qquad (8\text{-}8)$$

其中
$$w_1=w(1)+w(2)+\cdots+w(m)$$
$$w_2=w^2(1)+w^2(2)+\cdots+w^2(m)$$
$$\cdots$$
$$w_n=w^n(1)+w^n(2)+\cdots+w^n(m)$$

$\lambda_i(g_r)$表示 $g_r\in G$ 写成不相交圈时 i-圈的个数。(证明见题8.38)

题解及评注

8.1 设

$$a=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ 6, & 3, & 5, & 2, & 4, & 1, & 7\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ 6, & 7, & 2, & 1, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix}$$

(a) 将 a 和 b 写成不相交的圈的乘积。

(b) 计算 ab 和 ba, 两者相等吗?

解 (a) $a=(1,\ 6)(2,\ 3,\ 5,\ 4)(7)$

$b=(1,\ 6,\ 4)(2,\ 7,\ 5,\ 3)$

(b) $$ab=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ 6, & 3, & 5, & 2, & 4, & 1, & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ 6, & 7, & 2, & 1, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ 4, & 2, & 3, & 7, & 1, & 6, & 5\end{pmatrix}=(1,\ 4,\ 7,\ 5)(2)(3)(6)$$

$$ba=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ 6, & 7, & 2, & 1, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ 6, & 3, & 5, & 2, & 4, & 1, & 7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ 1, & 7, & 3, & 6, & 5, & 2, & 4\end{pmatrix}=(1)(2,\ 7,\ 4,\ 6)(3)(5)$$

$$ab\neq ba$$

8.2 (a) 证明若 p 是不相交的对换的积, 则 $p^2=I$。

(b) 证明如果 $q^2=I$，则 q 可写成不相交对换的积。

证 (a) 设 $p=t_1t_2\cdots t_k$，其中诸 $t_i=(a_i, b_i)$ 且互不相交，因 p 是不相交对换之积，其各因子可交换，因此 $p=t_kt_{k-1}\cdots t_1$。又 $(a_ib_i)(a_ib_i)=(a_i)(b_i)$ 于是

$$\begin{aligned}
p^2&=(t_1t_2\cdots t_k)(t_kt_{k-1}\cdots t_1)\\
&=(t_1(t_2\cdots(t_{k-1}(t_kt_k)t_{k-1})\cdots t_2)t_1)\\
&=(t_1(t_2\cdots(t_{k-1}(a_k)(b_k)t_{k-1})\cdots t_2)t_1)\\
&=(t_1(t_2\cdots((a_k)(t_{k-1}t_{k-1})(b_k))\cdots t_2)t_1)\\
&=(t_1(t_2\cdots((a_k)(a_{k-1})(b_{k-1})(b_k))\cdots t_2)t_1)\\
&=\cdots\\
&=(a_k)(a_{k-1})\cdots(a_1)(b_1)\cdots(b_{k-1})(b_k)=I
\end{aligned}$$

(b) 设 $q^2=I=(a_1)(a_2)\cdots(a_n)$，若 n 是一奇数，则没有这样的 q 存在，若不然 $q=(a_{i_1}a_{i_2})(a_{i_3}a_{i_4})\cdots(a_{i_{2m-1}}\ a_{i_{2m}})$，则 $q^2=(a_{i_1})(a_{i_2})\cdots(a_{i_{2m-1}})(a_{i_{2m}})$ 必由偶数个 1-圈组成，与 n 是奇数矛盾。今由题意知 q 是存在的，所以 n 必为偶数，可把 n 个 1-圈两两划分成 $\frac{n}{2}$ 块，每块作一对换，并把它们并置在一起，即得 q 的不相交对换组成的表示式，显然有 $q^2=I$，因此本题得证。

8.3 一副扑克牌 52 张，已按一定顺序排好，并自上而下编号为 1, 2, …, 52。我们按以下方法洗牌：使顶牌和底牌不动，其它牌交替放置。即

$$\begin{matrix}
1 & & 1 & 27 & & 1\\
2 & & 2 & 28 & & 27\\
3 & \xrightarrow{\text{分成两半}} & 3 & 29 & \xrightarrow{\text{第一次对洗}} & 2\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & 28\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
52 & & 26 & 52 & & 52
\end{matrix}$$

问这种方法洗牌，洗多少次后才能使一副牌回复到原来的顺序？

解 这种方法洗牌对应于以下这个置换：

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \cdots & 49, & 50, & 51, & 52\\ 1, & 27, & 2, & 28, & 3, & 29, & & 25, & 51, & 26, & 52\end{pmatrix}$$

$$=(1)(2,\ 27,\ 14,\ 33,\ 17,\ 9,\ 5,\ 3)$$
$$(4,\ 28,\ 40,\ 46,\ 49,\ 25,\ 13,\ 7)$$
$$(6,\ 29,\ 15,\ 8,\ 30,\ 41,\ 21,\ 11)$$
$$(10,\ 31,\ 16,\ 34,\ 43,\ 22,\ 37,\ 19)$$
$$(12,\ 32,\ 42,\ 47,\ 24,\ 38,\ 45,\ 23)$$
$$(20,\ 36,\ 44,\ 48,\ 50,\ 51,\ 26,\ 39)$$
$$(18,\ 35)(52)$$

这是两个1–圈，一个2–圈和六个8–圈的乘积，而1，2，8的最小公倍数是8，所以这个置换自乘8次就成为恒等置换。所以用这种方法洗8次后，回复到原来的顺序。

8.4 设 $a=(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)(m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n)$，$b=(m,\ m+1)$求 ab 和 ba。

解 $ab=(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)(m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n)(m,\ m+1)$

$=(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m-2,\ m-1,\ m+1,\ \cdots,\ n-1,\ n,\ m)$

$ba=(m,\ m+1)(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)(m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n)$

$=(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m-2,\ m-1,\ m,$

$m+2,\ \cdots,\ n-1,\ n,\ m+1)$

评注 本题说明两个不相交的圈可乘以一个对换，合成为一个圈；反之一个圈乘以一个对换，可分解成两个不相交的圈。

8.5 用15块标记着1，2，…，15的骨牌，初始时如图8.5(a)那样放置在4×4棋盘上，若只允许与空格相邻的骨牌可以移至空格，问可否经过若干次移动，使初始格局变成图8.5(b)所示的格局。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(a)

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

(b)

图 8.5

解 给空格放上一块标记为 16 的骨牌，并给棋盘的方格标上与骨牌初始放置相同的标记，于是初始格局相当于

$$p_0=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & \cdots, & 16\\ 1, & 2, & 3, & \cdots, & 16\end{pmatrix}=I$$

终止格局相当于

$$p_f=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & \cdots, & 15, & 16\\ 15, & 14, & 13, & \cdots, & 1, & 16\end{pmatrix}$$

骨牌 x 与骨牌 16(即空格)换位后所得的置换，就是原来的置换右乘对换$(x, 16)$的结果。若 p_0 经若干次移动后能得出 p_f，那末骨牌 16 从方格 16 开始，经若干次移动又回到方格 16，它向上和向下的移动次数应该相等，向左和向右的移动次数也应相等，因此骨牌必须移动偶数次。p_0 是偶置换，右乘偶数个对换仍应是偶置换，但 p_f 是奇置换，可见从 p_0 变到 p_f 是不可能的。

8.6 证明$(a, b)(c, d)$和$(a, c)(b, d)$是可交换的。

证 $(a, b)(c, d)\cdot(a, c)(b, d)=(a, d)(b, c)$

$(a, c)(b, d)\cdot(a, b)(c, d)=(a, d)(b, c)$

所以$(ab)(cd)$和$(ac)(bd)$是可交换的。

8.7 证明在 S_{10} 中与$(1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10)$可交换的恰有 50 个元素。

证 设置换 p 满足

$$p(1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10) = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10)p$$

且 p 中 $1 \to k$,

(1) 若 $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则有以下连续结果

左边:	右边:
$1 \xrightarrow{p} k \xrightarrow{(1, 2, 3, 4, 5)} k+1$	$1 \xrightarrow{(1, 2, 3, 4, 5)} 2 \xrightarrow{p} k+1$
$2 \longrightarrow k+1 \longrightarrow k+2$	$2 \longrightarrow 3 \longrightarrow k+2$
$3 \longrightarrow k+2 \longrightarrow k+3$	$3 \longrightarrow 4 \longrightarrow k+3$
$4 \longrightarrow k+3 \longrightarrow k+4$	$4 \longrightarrow 5 \longrightarrow k+4$
$5 \longrightarrow k+4 \longrightarrow k$	$5 \longrightarrow 1 \longrightarrow k$
$6 \longrightarrow l \xrightarrow{(6, 7, 8, 9, 10)} l+1$	$6 \xrightarrow{(6, 7, 8, 9, 10)} 7 \longrightarrow l+1$
$7 \longrightarrow l+1 \longrightarrow l+2$	$7 \longrightarrow 8 \longrightarrow l+2$
$8 \longrightarrow l+2 \longrightarrow l+3$	$8 \longrightarrow 9 \longrightarrow l+3$
$9 \longrightarrow l+3 \longrightarrow l+4$	$9 \longrightarrow 10 \longrightarrow l+4$
$10 \longrightarrow l+4 \longrightarrow l$	$10 \longrightarrow 6 \longrightarrow l$

上边的 $k+i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $k+i>5$ 时表示 $k+i-5$, $k+i \leqslant 5$ 时表示本身; $l+i \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $l+i>10$ 时表示 $l+i-5$, $k+i \leqslant 10$ 时, 表示本身, $i=0, 1, 2, 3, 4$。

(2) 若 $k \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$, 有类似结果。

故 k 有 10 种选择, 因为 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 与 $(6, 7, 8, 9, 10)$ 是不相交的, 在 k 选定后, l 只能有 5 种选择。在 k 和 l 选定后, 置换 p 也就确定了, 所以满足题意的置换 p 恰有 $10 \times 5 = 50$ 个。

8.8 一个置换若其不相交圈都是等长的则称为**正则的**, 例如 $(1, 7, 9)(2, 8, 4)(3, 6, 5)$ 是正则的。

(a) 证明 $(1, 2, 3, \cdots, n)$ 的每次幂是正则的。

(b) 证明 S_n 中每个正则置换都是 n-圈的某次幂。

(c) 计算 S_n 中正则置换的个数。

(d) 证明 S_n 中与 n-圈 $(1, 2, \cdots, n)$ 可交换的置换都是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的幂。

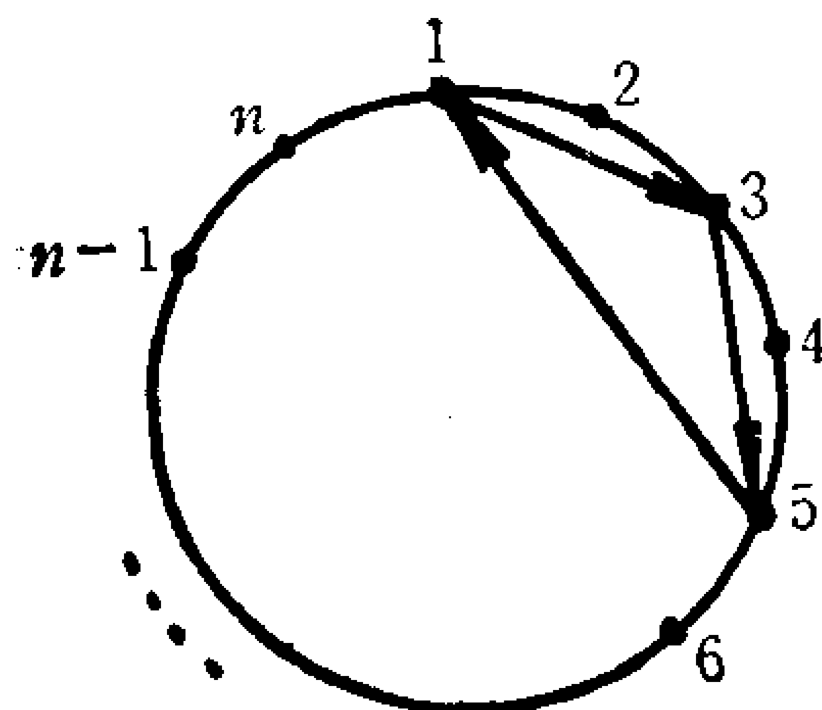


图 8.6

证 (a) 如果把 n 个数排成圆周，则一个圈就相当于穿程圈中各元素的点上的一条回路，回路长就是圈长，比如圈是 $(1, 3, 5)$ 时，有向回路如图 8.6 所示。

记 $p=(1, 2, \cdots, n)$。现在考虑在 p^k 作用下，从某点 j 出发的回路。显然

$$j\to k+j,\ k+j\to 2k+j,\ 2k+j\to 3k+j,\ \cdots,\ (n-1)k+j\to nk+j$$

这里 $ik+j$, $i=1, 2, \cdots, n$, 表示

$$\begin{cases} ik+j & \text{当 } ik+j\leqslant n \text{ 时} \\ (ik+j-1 \bmod n)+1, & \text{当 } ik+j>n \text{ 时} \end{cases}$$

(1) 若 k 与 n 互质，则 $i<n$ 时 ik 不能为 n 整除，所以 $ik+j$, $i=0, 1, 2, \cdots, n-1$, 各点无重合，但 $nk+j$ 与 j 重合，所以此时的圈长为 n, 且只有一个圈。故 p^k 是正则的。

(2) 若 k 与 n 不互质，设其最小公倍数为 $mk(m<n)$, 则 $mk+j$ 点开始与 j 点重合。所以，$(j, k+j, 2k+j, \cdots, (m-1)k+j)$ 形成一个圈，圈长为 m。现取不在上述圈中的一点 j', 同理 $(j', k+j', 2k+j', \cdots, (m-1)k+j')$ 也形成长为 m 的一个圈。显然这个圈与已有圈不相交，因为步长 k 的一致，若有一点相交，两圈即全部重合，这与 j' 不在已有圈中的事实矛盾。如此以往，直至 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的数恰好都在构造的圈中为止。这是可能的，因为 mk 是 k 和 n 的最小公倍数，由数论知识知 m 整除

n。不妨设 $l=\frac{n}{m}$，所以在构造了 l 个长为 m 的不同圈之后，必然如此。这就证明了 k 与 n 不互质时的正则性。

综上所述，p^k 是正则的。

(b) 设 S_n 中任一正则置换

$$q=(a_1, a_2, \cdots, a_m)(a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots, a_{2m})\cdots$$
$$(a_{(k-1)m+1}, a_{(k-1)m+2}, \cdots, a_{km})$$

这里 $km=n$。我们可以构造一个 n–圈组成的置换 p 如下：

$$p=(a_1, a_{m+1}, a_{2m+1}\cdots, a_{(k-1)m+1}, a_2, a_{m+2},$$
$$a_{2m+2}, \cdots, a_{(k-1)m+2}, \cdots, a_m, a_{2m}, \cdots, a_{km})$$

显然

$p^k=q$，所以本题得证。

(c) 正则置换的个数有

$$\sum_{d\mid n}\frac{n!}{(n/d)!(d)^{(n/d)}}$$

个，这里 d 是 n 的因子。

(d) 设 $p=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & \cdots, & n\\ a_1, & a_2, & a_3, & \cdots, & a_n\end{pmatrix}$ $p_0=(1, 2, 3, \cdots, n)$

若 $pp_0=p_0p$，则有

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & \cdots, & n\\ a_1+1, & a_2+1, & a_3+1, & \cdots, & a_n+1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & \cdots, & n\\ a_2, & a_3, & a_4, & \cdots, & a_1\end{pmatrix}$$

所以 $$a_2=a_1+1, a_3=a_2+1\cdots$$
$$a_n=a_{n-1}+1,\ a_1=a_n+1$$

这里 $a_i+1=\begin{cases}a_i+1 & 若\ a_i+1\leqslant n\\ a_i+1-n & 若\ a_i+1>n\end{cases}$。

所以 $$p=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & \cdots, & n\\ a_1, & a_1+1, & a_1+2, & \cdots, & a_1+n-1\end{pmatrix}$$

这里的 $a_1+i=\begin{cases}a_1+i & 若\ a_1+i\leqslant n\\ a_1+i-n & 若\ a+i>n\end{cases}$

故 $$p=p_{01}$$

8.9 (a) 证明每一 $(1, x)$ 形式的对换都可写成 $(1, 2)$ 和 $(2, 3, \cdots, n)$ 两个圈的积，这里每一个因子都可重复应用。

提示：$(2, 3, 4, 5, 6)^3(1, 2)(2, 3, 4, 5, 6)^2=(1, 4)$。

(b) 证明 S_n 的每一元素都能写作这两个圈的重复的积。

证 (a) 因 $(n-x+1)+(x-2)=n-1$，所以

$$(2, 3, \cdots, n)^{n-x+1}\ 和\ (2, 3, \cdots, n)^{x-2}$$

互为逆元。把它们分解成不相交的圈之积，不妨设

$$(2, 3, \cdots, n)^{n-x+1}=c_1c_2\cdots c_k$$

则 $$(2, 3, \cdots, n)^{x-2}=c_k^{-1}c_{k-1}^{-1}\cdots c_1^{-1}$$

因 x 到 2 的位移恰好是 $n-x+1$，所以其中有一个圈是 $(x, 2, \cdots)$，不妨设 $c_k=(x, 2, \cdots)$，因而 $c_k^{-1}=(2, x, \cdots)$。所以

$$c_k(1, 2)c_k^{-1}=(1, x)$$

其它的 c_i 和 c_i^{-1}，$i=1, 2, \cdots, k-1$ 都与 $(1, x)$ 不相交且互逆，所以

$$(2, 3, \cdots, n)^{n-x+1}(1, 2)(2, 3, \cdots, n)^{x-2}=(1, x)$$

(b) S_n 中的每一元素可分解成对换之积。在这些对换中，对已是 $(1, x)$ 型的对换代入(a)中的分解式；对不是 $(1, x)$ 型的对换，先把对换 (x, y) 写成

$$(x, y)=(1, x)(1, y)(1, x)$$

然后对 $(1, x)$，$(1, y)$，$(1, x)$ 代入(a)中的分解式，这样就得到了所求的分解式。

8.10 (a) 证明任何由 3-圈乘积（可以相交）构成的置换

是偶的。

(b) 证明每个偶置换可以写成(可相交的)3-圈的乘积。

证 (a) 因任一 3-圈 $(a, b, c)=(a, b)(a, c)$，即每一 3-圈可分解成两个对换，因此共可分解成偶数个对换，故此置换是偶的。

(b) 因每一偶置换可分解成偶数个对换，而每两个对换，如果是不相交的，可写成两个 3-圈之积：

$$(a, b)(c, d)=(a, b, c)(a, d, c)$$

如果是相交的，可写成一个 3-圈：

$$(a, b)(a, c)=(a, b, c)$$

故整个偶置换可写成 3-圈之积。

8.11 S_n 中所有偶置换构成一个群，称为**交代群**，记为 A_n。证明如果 G 是 A_n 的子群且含有 3-圈

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), \cdots, (1, 2, n)$$

那末 $G=A_n$。

证 G 是 A_n 的子群，所以 $G\subseteq A_n$。另一方面，由上题的结果知，每一偶置换都可写成 3-圈之积，在这些 3-圈中，如果已是 $(1, 2, x)$ 形式，则不必改动，若不是 $(1, 2, x)$ 形式，则按以下规则改写：

(1) $(2, 1, x)=(1, 2, x)(1, 2, x)$

(2) $(2, x, y)=(1, 2, x)(1, 2, y)(1, 2, y)$

(3) $(1, x, y)=(1, 2, y)(1, 2, x)(1, 2, y)(1, 2, y)$

(4) $(x, y, z)=(1, x, y)(1, z, x)$

$$=(1, 2, y)(1, 2, x)(1, 2, y)(1, 2, y)(1, 2, x)(1, 2, z)(1, 2, x)(1, 2, x)$$

这里 $x, y, z\notin\{1, 2\}$。可见任何 A_n 的元素 p 都可写成 $(1, 2, x)$ 形式的圈的积，所以 $p\in G$，$A_n\subseteq G$。于是得 $G=A_n$。

8.12 如果我们以置换 $p_m=(1, 2, \cdots, m)$ 和 $p_n=(1, 2, \cdots, n)$ 开始，这里 $m<n$，通过取它们的积，试表明我们能够产生

(a) p_m^{-1} 和 p_n^{-1}。

(b) $(1, 2, m+1)$。

(c) 对所有 $x, y\leqslant n$，$(1, x, y)$。

(d) A_n 的任一元素。

(e) 如果 m 或 n 是偶数，所有 S_n 的元素。

解 (a) 因 $p_m^m=p_m^{m-1}\cdot p_m=I$，所以 $p_m^{-1}=p_m^{m-1}$，同理 $p_n^{-1}=p_n^{n-1}$。

(b) $(1, 2, m+1)=p_n^{-1}p_m^{-1}p_np_m$。此结果可推广为

$$(1, k, m+1)=p_n^{-1}p_m^{-k+1}p_np_m^{k-1}\quad(2\leqslant k\leqslant m)\tag{1}$$

(1)式可直接验证知其是正确的。

(c) 我们先证明 $(1, m, k)$，$m+1\leqslant k\leqslant n$，可用 p_m 和 p_n 的积表达。设 $A=p_m^{-1}p_n$，$B=p_mp_n^{-1}$

$$(1, m, k)=A^{n-k+1}B^{n-k+1}\tag{2}$$

用归纳法证明。

$k=n$ 时，$(1, m, n)=AB$。可直接验证知其成立。

设 $(1, m, k)=A^{n-k+1}B^{n-k+1}$，有

$$\begin{aligned}A^{n-k+2}B^{n-k+2}&=A(A^{n-k+1}B^{n-k+1})B\\&=p_m^{-1}p_n(1, m, k)p_mp_n^{-1}=(1, m, k-1)\end{aligned}$$

所以，对一切 $m+1\leqslant k\leqslant n$，$(1, m, k)=A^{n-k+1}B^{n-k+1}$。

现在研究 $(1, x, y)$ 的表达，我们分情况讨论。

(1) 若 $x, y\geqslant m+1$。

$$(1, x, y)=(1, m, y)(1, m, x)(1, m, y)(1, m, y)$$

对每一 $(1, m, x)(1, m, y)$ 用(2)式代入即得表达式。

(2) 若 $x<m+1$，$y=m+1$，则用(1)式代入 $(1, x, y)$ 即得；若 $x=m+1$，$y<m+1$，则 $(1, x, y)=(1, y, x)^{-1}$ 亦可用 (1) 式

代入。

(3) 若 $x<m+1,\ y>m+1$，则

$$(1,\ x,\ y)=(1,\ m+1,\ y)(1,\ m+1,\ x)$$
$$(1,\ m+1,\ y)(1,\ m+1,\ y)$$

$(1,\ m+1,\ y)$可按情况(1)处理：

$$(1,\ m+1,\ x)=(1,\ x,\ m+1)^{-1}$$

可用(1)式代入；若 $x>m+1,\ y<m+1$，可类似地处理。

(4) 若 x、$y<m+1$，则

$$(1,\ x,\ y)=(1,\ m+1,\ y)(1,\ m+1,\ x)$$
$$(1,\ m+1,\ y)(1,\ m+1,\ y)$$

对每一$(1,\ m+1,\ y)$或$(1,\ m+1,\ x)$可按情况(2)处理。

综上所述，$(1,\ x,\ y)$均可表达成 p_m、p_n 的积。

(d) 根据题8.10的结果知每一偶置换都可写成3-圈之积，若这些3-圈是

(1) $(1,\ x,\ y)$形式，即圈中有一个元素是1，则由(c)知可表达成 p_m 和 p_n 的乘积。

(2) $(x,\ y,\ z)$ 形式，即圈中没有一个元素是1，则可化为$(1,\ x,\ y)(1,\ z,\ x)$，因此亦可表达。所以，A_n 的任何元素都可表达。

(e) 设 x 是 S_n 中的任一元素。若 $x\in A_n$，已知可表达，若 $x\notin A_n$，则 x 可表达成一个对换 $(a,\ b)$ 乘以一个 A_n 的元素，因此只须证明$(a,\ b)$可表达就行。若m是偶数记 $k=m$，若 n 是偶数记 $k=n$，于是

$$(a,\ b)=p_kp_k^{-1}=p_k(1,\ k)(1,\ k-1)\cdots(1,\ 2)(a,\ b)$$

$(1,\ k)(1,\ k-1)\cdots(1,\ 2)(a,\ b)$是偶数个对换，是 A_n 的元素，可以用 p_m 和 p_n 的积表达。这样，S_n 中任意元素 x 都可表达。

8.13 一个置换 p，如果 $p^2=I$，则称 p 为二阶的，证明每

一置换都可写成两个2阶置换的积。

证

$$(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n)=(1,\ 2n-1)(2,\ 2n-2)\cdots(n-1,\ n+1)(1,\ 2n)(2,\ 2n-1)\cdots(n,\ n+1)。$$

记 $p_1=(1,\ 2n-1)(2,\ 2n-2)\cdots(n-1,\ n+1)$

$p_2=(1,\ 2n)(2,\ 2n-1)\cdots(n,\ n+1)$

这说明长为偶数的圈可分解成两个不相交的对换组成的置换的乘积。

同理,

$$(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n+1)=(1,\ 2n)(2,\ 2n-1)\cdots(n,\ n+1)(1,\ 2n+1)(2,\ 2n)\cdots(n,\ n+2)$$

这说明长为奇数的圈可分解成两个不相交的对换组成的置换的乘积。

设 p 是任一置换，p 可分解成不相交圈的乘积，略去1-圈而对其中所有 $i>1$ 的 i-圈应用以上两式分解，得

$$\begin{aligned}
p&=(p_{11}\cdot p_{12})(p_{21}\cdot p_{22})\cdots(p_{k1}\cdot p_{k2})\\
&=(p_{11}\cdot(p_{12}\cdot p_{21})\cdot p_{22})(p_{31}\cdot p_{32})\cdots(p_{k1}\cdot p_{k2})\\
&=(p_{11}\cdot(p_{21}\cdot p_{12})\cdot p_{22})(p_{31}\cdot p_{32})\cdots(p_{k1}\cdot p_{k2})\\
&=(p_{11}\cdot p_{21})\cdot(p_{12}\cdot p_{22})\cdot(p_{31}\cdot p_{32})\cdots(p_{k1}\cdot p_{k2})\\
&=(p_{11}\cdot p_{21}\cdot(p_{12}\cdot p_{22}\cdot p_{31})\cdot p_{32})\cdots(p_{k1}\cdot p_{k2})\\
&=(p_{11}\cdot p_{21}\cdot p_{31})\cdot(p_{12}\cdot p_{22}\cdot p_{32})\cdots(p_{k1}\cdot p_{k2})\\
&=\cdots\cdots\\
&=(p_{11}\cdot p_{21}\cdot\cdots\cdot p_{k1})\cdot(p_{12}\cdot p_{22}\cdot\cdots\cdot p_{k2})
\end{aligned}$$

其中 p_{ij} 是不相交的对换组成的置换。显然，$(p_{11}\cdot p_{21}\cdot\cdots\cdot p_{k1})$ 和 $(p_{12}\cdot p_{22}\cdot\cdots\cdot p_{k2})$ 都是由不相交的对换组成的置换，由题8.2

知是二阶的。因此本题得证。

8.14 证明如果两个置换在同一共轭类中，则它们具有相同的奇偶性。

证 若两个置换 p 和 q 都在同一共轭类 $(1)^{\lambda_1}(2)^{\lambda_2}(3)^{\lambda_3}\cdots(n)^{\lambda_n}$ 中，则 p 和 q 中的 i-圈，$i=1, 2, \cdots, n$，可作出一一对应。对应的 i-圈可分解成相同个数的对换，因此，p 和 q 可分解成相同个数的对换，故有相同奇偶性。

8.15 (a) p 是 S_n 中任意置换，设 $q=(1, 2)p(1, 2)$，证明 p 和 q 有相同的圈结构，即它们在同一个共轭类中。

(b) 如果 p 和 q 在相同的共轭类中，试证明存在对换 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 使得

$$q=t_k\cdots t_2t_1pt_1t_2\cdots t_k$$

(c) 证明 p 和 q 在相同的共轭类中当且仅当存在某置换 x 使得

$$q=xpx^{-1}$$

证 (a) 把 p 分解成不相交圈的积，可能出现两种情况：

(1) 1, 2 含在同一圈中。不妨设

$$p=(1, a, \cdots, b, 2, c, \cdots, d)\cdots$$

则

$$\begin{aligned}(1, 2)p(1, 2)&=(1, 2)(1, a, \cdots, b, 2, c, \cdots, d)(1, 2)\cdots\\&=(1, c, \cdots, d)(2, a, \cdots, b)(1, 2)\cdots\\&=(1, c, \cdots, d, 2, a, \cdots, b)\cdots \qquad (1)\end{aligned}$$

所以，p 和 q 有相同的结构。

(2) 1, 2 含在不同圈中。不妨设

$$p=(1, a, \cdots, b)(2, c, \cdots, d)\cdots$$

则

$$(1,\ 2)p(1,\ 2)=(1,\ 2)(1,\ a,\ \cdots,\ b)(2,\ c,\ \cdots,\ d)(1,\ 2)\cdots$$
$$=(1,\ c,\ \cdots,\ d,\ 2,\ a,\ \cdots,\ b)(1,\ 2)\cdots$$
$$=(1,\ c,\ \cdots,\ d)(2,\ a,\ \cdots,\ b)\cdots \qquad (2)$$

所以，p 和 q 有相同的结构，本题得证。

另外，从 (1) 和 (2) 式可看出，$(1,\ 2)p(1,\ 2)$ 相当于把 p 的圈分解式中的 1 和 2 交换位置，这一结论可推广到任意 $(m,\ n)p(m,\ n)$。

(b) 设 p 和 q 都已分解成不相交的圈之积，为了便于查找，不妨假定在积中：

(1) 每个圈都以圈中最小元素放在首位。

(2) 相同长短的圈已按字典序排好。

(3) 不同长短的圈，短的排在左边。

因 p 和 q 在同一共轭类中，有相同分解形式，作了以上约定后，所有的括号必已对齐，所不同者仅数字而已。

我们用以下几步找出 $t_1t_2\cdots t_k$。

第一步 置 $q_0=p$, $k=0$;

第二步 自左至右扫描 q 和 q_k 中的数字。如果所有数字全相同，这说明

$$q=q_k=t_kq_{k-1}t_k=t_kt_{k-1}q_{k-2}t_{k-1}t_k=\cdots$$
$$=t_k\cdots t_1pt_1\cdots t_k$$

工作结束。

第三步 若第一个不同的数字是 q 中的 a 与 q_k 中的 b，作则 $t_{k+1}=(a,\ b)$，令 $q_{k+1}=t_{k+1}q_kt_{k+1}$。根据本题 (a) 的结果，知 q_{k+1} 与 q 中的数字从 a 起往左都已相同。

第四步 置 k 等于 $k+1$，转第二步。

因为最多只有 n 个数字，每执行一次第三步，不同的数字至

少减少一个，所以最终会找出 $t_1t_2\cdots t_k$，使 $q=t_k\cdots t_1pt_1\cdots t_k$。

(c) 必要性。若 p 和 q 在同一共轭类中，由(b)的结果知，存在 t_1, t_2, $\cdots$, t_k，使得

$$q=t_k\cdots t_1pt_1\cdots t_k$$

记 $x=t_kt_{k-1}\cdots t_1$，则 $x^{-1}=t_1t_2\cdots t_k$，这是因为

$$xx^{-1}=(t_k\cdots t_1)(t_1\cdots t_k)=(t_k(t_{k-1}\cdots(t_2(t_1t_1)t_2)\cdots t_{k-1})t_k)=I$$

同理，$x^{-1}x=I$。所以存在 x 使 $q=xpx^{-1}$。

充分性。若有 x 使 $q=xpx^{-1}$，则可将 x 分解成对换之积 $t_kt_{k-1}\cdots t_1$，于是 $x^{-1}=t_1t_2\cdots t_k$。

$$q=t_kt_{k-1}\cdots t_1pt_1\cdots t_{k-1}t_k$$

反复应用(a)的结论，即得 p 和 q 在同一共轭类中。

8.16 证明若置换 p 的圈形式为 $(1)^{\lambda_1}(2)^{\lambda_2}\cdots(n)^{\lambda_n}$，则 p 与 $\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6+\cdots$ 有相同奇偶性。

证 因为 $(a_1a_2\cdots a_m)=(a_1a_2)(a_1a_3)\cdots(a_1a_m)$，所以，置换 p 可化为

$$0\cdot\lambda_1+1\cdot\lambda_2+2\cdot\lambda_3+3\cdot\lambda_4+\cdots+(n-1)\cdot\lambda_n \tag{1}$$

个对换。因为 $0\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_3+4\cdot\lambda_5+\cdots$ 是偶数，所以上式的奇偶性取决于

$$1\cdot\lambda_2+3\cdot\lambda_4+5\cdot\lambda_6+\cdots \tag{2}$$

因 $2\lambda_4+4\lambda_6+6\lambda_8+\cdots$ 是偶数，所以(2)式的奇偶性又取决于

$$\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6+\cdots$$

故置换 p 与 $\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6+\cdots$ 同奇偶。

8.17 设 $\lambda(p)$ 是 S_n 中置换 p 的表达式中不相交圈的个数(包括1–圈)，证明 $n+\lambda(p)$ 与置换 p 同奇偶。

证 设 p 的圈结构形式为 $(1)^{\lambda_1}(2)^{\lambda_2}\cdots(n)^{\lambda_n}$，则

$$\lambda(p)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n$$

而
$$n=\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+n\lambda_n$$

得 $$n+\lambda(p)=2\lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3+\cdots+(n+1)\lambda_n$$

$n+\lambda(p)$的奇偶性取决于

$$\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6+\cdots$$

题 8.16 已指出 p 与 $\lambda_2+\lambda_4+\lambda_6+\cdots$ 同奇偶，故置换 p 与 $n+\lambda(p)$ 同奇偶。

8.18 证明在 S_n 中含在共轭类 $(1)^{\lambda_1}(2)^{\lambda_2}\cdots(n)^{\lambda_n}$ 中的置换个数是

$$\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!1^{\lambda_1}2^{\lambda_1}\cdots n^{\lambda_n}}$$

证 把 S_n 中 $n!$ 个置换逐个填写入

$$\underbrace{(1)(1)\cdots(1)}_{\lambda_1}\ \underbrace{(2)(2)\cdots(2)}_{\lambda_2}\cdots\underbrace{(n)}_{\lambda_n}$$

格式中，每填入一个可得该共轭类中的一个成员，但其中有许多重复：

(1) λ_i 个 i-圈有 $\lambda_i!$ 种排列，这些排列应该看作相同的，故应除以 $\lambda_i!$，$i=1, 2, \cdots, n$。

(2) 每个 i-圈有 i 个数字，其首数字可以有 i 种选择，λ_i 个 i-圈，它们的首数字有 i^{λ_i} 种选择，这些选择应该看作是相同的，故应除以 i^{λ_i}，$i=1, 2, \cdots, n$。

这样，就得出了以上公式。

8.19 证明 S_n 中恰可分解成 k 个不相交圈的置换数是 $S_1(n, k)$——第一类 Stirling 数。

证 设所求置换数有 $f(n, k)$ 个。显然有

$$f(n, 0)=0,\ f(n, n)=1$$

另外，这样的置换可从 S_{n-1} 的元素，用以下两种方法之一构成：

(1) 对有 $k-1$ 个圈的 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的置换，加上圈 (n)。

(2) 对有 k 个圈的 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的置换，我们把数 n 插入这些圈之一，因为 n 可插入任一数的右边，故有 $(n-1)$ 种插法。

这样就得出以下递推关系

$$\begin{cases} f(n, k)=f(n-1, k-1)+(n-1)f(n-1, k) \\ f(n, 0)=0, f(n, n)=1 \end{cases}$$

这是第一类 Stirling 数所满足的递推关系，故其解为 $S_1(n, k)$。

8.20 证明

$$\sum_{1\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n} \frac{x^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n_{\lambda_n}} = \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n!}$$

证 由 8.19 题知 $S_1(n, k)$ 是表示 S_n 中恰能分解成 k 个不相交圈的所有置换个数。我们用形式记号 $S_1(n, k)x^k$ 表示此事实。因此，S_n 中所有共轭类的置换总数应是

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}} x^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$
$$=S_1(n, n)x^n+S_1(n, n-1)x^{n-1}+\cdots+S_1(n, 0)$$

第五章的题 5.33 已证明

$$x(x-1)\cdots(x-n+1)$$
$$=S_1(n, n)x^n-S_1(n, n-1)x^{n-1}+\cdots\pm S_1(n, 0)$$

用 $-x$ 代 x，并两边约去 $(-1)^n$，得

$$x(x+1)\cdots(x+n-1)$$
$$=S_1(n, n)x^n+S_1(n, n-1)x^{n-1}+\cdots+S_1(n, 0)$$

因而

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n}\frac{x^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}}$$
$$=\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n!}$$

8.21 证明

(a) $$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n}\frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}}=1$$

(b) $$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n}\frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}}=0$$

证 题8.20已证明

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n}\frac{x^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}}$$
$$=\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n!}$$

以 $x=1$ 代入即证明了 (a)，以 $x=-1$ 代入，即证明了 (b)。

8.22 设 $f(n, k)$ 表示 S_n 中的置换分解成不相交圈的符号时圈长不超过 k 的置换个数。试证明

$$f(n+1, k)=\binom{n}{0}0!\,f(n, k)+\binom{n}{1}1!\,f(n-1, k)$$
$$+\binom{n}{2}2!\,f(n-2, k)+\cdots$$
$$+\binom{n}{k-1}(k-1)!\,f(n-k+1, k)$$

证 我们把在 S_{n+1} 中圈长不超过 k 的置换按含有 $n+1$ 这个数的圈分类：

第 1 类含有 1-圈 $(n+1)$ 的，有 $\binom{n}{0}!f(n,\ k)$ 个；

第 2 类含有 2-圈 $(a_1, n+1)$ 的，有 $\binom{n}{1}1!f(n-1, k)$ 个；

第 3 类含有 3-圈 $(a_1,\ a_2,\ n+1)$ 的，有 $\binom{n}{2}2!f(n-2, k)$ 个；

……

第 k 类含有 k-圈 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1},\ n+1)$ 的，

有 $\binom{n}{k-1}(k-1)!\ f(n-k+1,\ k)$ 个。

所以

$$f(n+1,\ k)=\binom{n}{0}0!\ f(n,\ k)+\binom{n}{1}1!f(n-1,\ k)+\cdots$$

$$+\binom{n}{k-1}(k-1)!f(n-k+1,\ k)$$

8.23 证明公式 $N(St_k)\cdot N(O_k)=N(G)$。

证 设 $O_k=\{a_1=k,\ a_2,\ \cdots,\ a_l\}$，根据 O_k 的定义，存在 G 中的 l 个置换 $p_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$，使得

$$k\xrightarrow{p_i}a_i\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$$

作

$$G_i=St_k\cdot p_i$$

$St_k\cdot p_i$ 是陪集，其元素属于 G，即 $G_i\subseteq G$，因此

$$G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_l\subseteq G$$

另一方面，设 p 是 G 的任一元素，使得

$$k\xrightarrow{p}a_j$$

所以，$a_j\in St_k$。因 a_j 是 St_k 的元素，根据上边的作法有 $P=\{p_i|i$

$=1, 2, \cdots, l\}$ 中的某个元素 p_j 也使得

$$k \xrightarrow{p_j} a_j$$

于是 G 中存在 p_j^{-1}，使得

$$a_j \xrightarrow{p_j^{-1}} k$$

所以
$$k \xrightarrow{pp_j^{-1}} k$$

$$pp_j^{-1} \in St_k$$

所以
$$p \in St_k \cdot p_j$$

p 是任意的，所以 $G \subseteq G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_l$。故

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_l$$

现证明 $t \neq m$ 时，$G_t \cap G_m = \varnothing$。若不然，有

$$p \in St_k \cdot p_t, \ p \in St_k \cdot p_m$$

$$s_a \cdot p_t = p = s_b \cdot p_m$$

两边都使
$$k \xrightarrow{p} a_j$$

因此
$$p_t = p_m = p_j$$

进而有
$$s_a = s_b$$

得出矛盾。所以 $G_t \cap G_m = \varnothing$，但 $G_i \neq \varnothing$，所以

$$\begin{aligned} |G| &= |G_1| + |G_2| + \cdots + |G_l| \\ &= |St_k| + |St_k| + \cdots + |St_k| \\ &= |St_k| \cdot l = |St_k| \cdot |O_k| \end{aligned}$$

即
$$N(St_k) \cdot N(O_k) = N(G)$$

8.24 对群 S_4 的每一元素说明公式 $N(St_k) \cdot N(O_k) = N(G)$ 是真。

解　$S_4=\{I, (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4),$
$(3, 4), (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3),$
$(1, 3)(2, 4), (1, 2, 3), (1, 2, 4),$
$(1, 3, 2), (1, 3, 4), (1, 4, 2), (1, 4, 3),$
$(2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 2, 3, 4),$
$(1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2),$
$(1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2)\}$

$$O_1=O_2=O_3=O_4=\{1, 2, 3, 4\}$$

$St_1=\{I, (2, 3), (2, 4), (3, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 3)\}$

$St_2=\{I, (1, 3), (1, 4), (3, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 3)\}$

$St_3=\{I, (1, 2), (1, 4), (2, 4), (1, 2, 4), (1, 4, 2)\}$

$St_4=\{I, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$

所以　$|St_k|\cdot|O_k|=6\cdot4=24=|G|, k=1, 2, 3, 4$

8.25　证明 Burnside 定理——设 $\overline{G}=\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \cdots\}$ 是 S_n 的一个子群，与 $\overline{G}$ 相联结的不同轨的个数为

$$l=\frac{1}{N(\overline{G})}[\lambda_1(\bar{g}_1)+\lambda_1(\bar{g}_2)+\cdots]$$

以上和式是对 $\overline{G}$ 中所有元素进行，其中 $\lambda_1(\bar{g}_i)$ 是 $\bar{g}_i$ 中保持不动的元素个数，即 $\bar{g}_i$ 分解成不相交的圈的积中1–圈的个数。

证　$\lambda_1(\bar{g}_1)+\lambda_1(\bar{g}_2)+\cdots$ 表示所有 $\bar{g}_i$ 中不动元素个数，$N(St_1)+N(St_2)+\cdots$ 也表示所有 $\bar{g}_i$ 中不动元素的个数。而后者等于

$$\frac{N(\overline{G})}{N(O_1)}+\frac{N(\overline{G})}{N(O_2)}+\cdots$$

所以

$$\frac{1}{N(\bar{G})}[\lambda_1(\bar{g}_1)+\lambda_1(\bar{g}_2)+\cdots]$$

$$=\frac{1}{N(\bar{G})}\left[\frac{N(\bar{G})}{N(O_1)}+\frac{N(\bar{G})}{N(O_2)}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{N(O_1)}+\frac{1}{N(O_2)}+\cdots \tag{1}$$

在一个等价类中若有 k 个元素，不妨设为 $\{s, t, \cdots, u\}$，则

$$\frac{1}{N(O_s)}+\frac{1}{N(O_t)}+\cdots+\frac{1}{N(O_u)}=\underbrace{\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{k}}_{k\text{个}}=1$$

(1) 式是对所有元素求和，所以有多少个不同等价类，和就是多少，换言之，(1)式的和就是不同轨的个数。

8.26 在 Burnside 定理中，如果 G 是由唯一的恒等置换 I 组成的平凡群，则和式变成什么?

解 $$l=\frac{1}{N(\bar{G})}[\lambda_1(\bar{g}_1)+\cdots]=\frac{1}{1}[\lambda_1(I)]=n$$

这说明有 n 条轨，即 $\{1\}$, $\{2\}$, $\cdots$, $\{n\}$。

8.27 当 $G=S_n$ 时，Burnside 定理说明什么?

解 在 S_n 中使 k 不变的置换有 $(n-1)!$ 个，而 $k=1, 2, \cdots, n$，所以使一个元素不变的置换有 $n!$ 个。其中有重复计数，若某置换有 k 个 1-圈，则它被重复计数 k 次，但这正好等于它应该被计算的次数，所以 $n!$ 就是 1-圈的总个数，即

$$\lambda_1(\bar{g}_1)+\lambda_1(\bar{g}_2)+\cdots+\lambda_1(\bar{g}_{n!})=n!$$

代入 Burnside 公式得

$$l=\frac{1}{N(\bar{G})}n!=\frac{1}{n_i}\cdot n!=1$$

这说明只有一条轨。

8.28 应用 Burnside 定理去计算一个圈中 n 个不同事物的重排个数。

解 不妨设想对象集 D 由外形相同的 n 个不同事物组成，颜色集 $R=\{1, 2, \cdots, n\}$，D 的一个排列相当于 R 对 D 的一个着色，且每个事物必需着不同颜色。因此着色集 S 有 $n!$ 个元素。想象 D 排成圆周，D 上的置换群 G 由旋转 $\frac{360°}{n}\cdot k(k=0, 1, 2, \cdots, n-1,)$ 构造，共有 n 个元素，$\overline{G}$ 是由 G 诱导出的 S 上的一个置换，也有 n 个元素，于是除了 $\overline{G}$ 中的恒等置换有 $n!$ 个 1–圈外，其余元素并无 1–圈，所以代入 Burnside 定理中的公式得

$$l=\frac{1}{n}\cdot n!=(n-1)!$$

即所求的重排个数。

8.29 证明特殊形式的 Polya 定理——设 $D=\{1, 2, \cdots, n\}$ 是对象集，G 是 D 上的置换群，又设 $R=\{1, 2, \cdots, m\}$ 是颜色集，用 m 种颜色之一给每一对象着色，若在 G 的作用下，对 n 个元素的一种着色可转变为另一种着色，认为这两种着色是同格式的，则不同格式数为

$$l=\frac{1}{N(G)}[m^{\lambda(g_1)}+m^{\lambda(g_2)}+\cdots]$$

上式求和是对 G 中所有元素 g_i 进行，其中 $\lambda(g_i)$ 表示置换 g_i 分解成不相交圈的积中圈的总个数(包括 1–圈在内)。

证 用 R 给 D 着色，可诱导出着色集合 S，由 D 上的置换群 G 可诱导出 S 上的置换群 $\overline{G}$，所以 Burnside 定理中的轨数，就是 Polya 定理中的格式数，而 $\overline{G}$ 由 G 诱导出来，所以 $N(\overline{G})=N(G)$。因此我们只要证明在 Burnside 定理中的 $\lambda_1(\overline{g}_i)$ 等于 Polya 定理中的 $m^{\lambda(g_i)}$ 即可。

$\lambda_1(\bar{g}_i)$ 表示 S 中在 $\bar{g}_i$ 的作用下不变的元素个数，即不变的着色个数；$\lambda(g_i)$ 表示 g_i 的不相交圈的个数，而每一圈中着上相同颜色时，才能在 g_i 的作用下等价，又每一圈都有 m 种颜色可选，故共有 $m^{\lambda(g_i)}$ 种方案可选。这些方案的任一个都是 S 的一个元素（一种着色），它们在 g_i 的作用下，就 D 而言是等价的，换言之，在 $\bar{g}_i$ 的作用下，就 S 而言是不变的着色，故 $\lambda_1(\bar{g}_i)=m^{\lambda(g_i)}$。定理得证。

8.30 一个正方形均分成 4 个方格，如图 8.7 所示，用黑白两种颜色对 4 个方格着色，问能得到多少种不同的方案？经过旋转能吻合的方案认为是相同的。

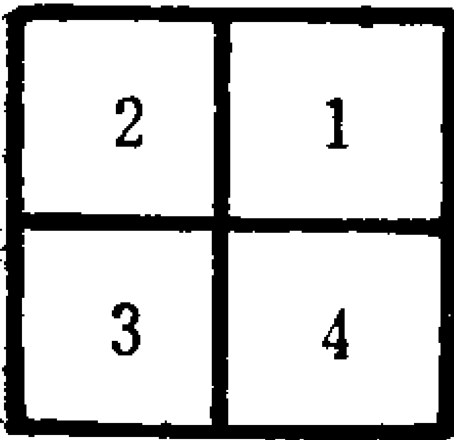


图 8.7

解 抽象地看待本题，对象集是 $D=\{1, 2, 3, 4\}$，颜色集是 $R=\{b$（黑），w（白）$\}$，每格有两种颜色可供选择，故共有 16 种可能方案，即着色集合 $S=\{c_1, c_2, \cdots, c_{16}\}$，参看图 8.3。$D$ 上的置换群是 $G=\langle\{g_0, g_1, g_2, g_3\}, *\rangle$——$g_0$ 表示不动，即 $g_0=(1)(2)(3)(4)$，g_1 表示逆时针转 90°，即 $g_1=(1, 2, 3, 4)$，g_2 表示逆时针转 180°，即 $g_2=(1, 3)(2, 4)$，g_3 表示逆时针转 270°，即 $g_3=(4, 3, 2, 1)$。由 G 诱导的 S 上的置换群 $\bar{G}=\langle\{\bar{g}_0, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}, *\rangle$，其中

$$\bar{g}_0=(c_1)(c_2)(c_3)(c_4)(c_5)(c_6)(c_7)(c_8)(c_9)(c_{10})(c_{11})(c_{12})(c_{13})(c_{14})(c_{15})(c_{16})$$

$$\bar{g}_1=(c_1)(c_2)(c_3, c_4, c_5, c_6)(c_7, c_8, c_9, c_{10})(c_{11}, c_{12})(c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16})$$

$$\bar{g}_2=(c_1)(c_2)(c_3, c_5)(c_4, c_6)(c_7, c_9)(c_8, c_{10})(c_{11})(c_{12})(c_{13}, c_{15})(c_{14}, c_{16})$$

$$\bar{g}_3=(c_1)(c_2)(c_6, c_5, c_4, c_3)(c_{10}, c_9, c_8, c_7)(c_{12}, c_{11})(c_{16}, c_{15}, c_{14}, c_{13})$$

诱导过程是这样的，例如 $g_1=(1, 2, 3, 4)$，在 g_1 的作用下

c_1(1 白 2 白 3 白 4 白)→c_1(2 白 3 白 4 白 1 白)

c_2(1 黑 2 黑 3 黑 4 黑)→c_2(2 黑 3 黑 4 黑 1 黑)

c_3(1 黑 2 白 3 白 4 白)→c_4(2 黑 3 白 4 白 1 白)

c_4(1 白 2 黑 3 白 4 白)→c_5(2 白 3 黑 4 白 1 白)

余类推。这样就得出

$$\bar{g}_1=(c_1)(c_2)(c_3, c_4, c_5, c_6)(c_7, c_8, c_9, c_{10})$$
$$(c_{11}, c_{12})(c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16})$$

现在我们应用不同方法来求方案数。

(1) 用 Burnside 定理求的方案数，相当于定理中的轨数。

$$N(\bar{G})=4,\ \lambda_1(\bar{g}_0)=16,\ \lambda_1(\bar{g}_1)=2$$
$$\lambda_1(\bar{g}_2)=4,\ \lambda_1(\bar{g}_3)=2$$

所以
$$l=\frac{1}{4}[16+2+4+2]=6$$

(2) 用 Polya 定理求的方案数，相当于定理中的格式数。

$$N(G)=4,\ \lambda(g_0)=4,\ \lambda(g_1)=1$$
$$\lambda(g_2)=2,\ \lambda(g_3)=1$$

所以
$$l=\frac{1}{4}[2^4+2^1+2^2+2^1]=6$$

不同方案可参看图 8.4。

评注 对比以上两种解法，可见 Burnside 定理是对着色集上的置换群而言的，Polya 定理是就对象集 D 上的置换而言的，显然后者要方便些。

8.31 在有 15 个位置的轮盘赌的轮上(图 8.8)，用三种颜色(r(红)，b(蓝)，g(绿))着色，可以有多少种不同的方案?(这种

轮子能旋转，但不能翻转到它的镜象位置)

解 (1) 用 Polya 定理解

$$G=\{\langle g_0,\ g_1,\ \cdots,\ g_{14}\rangle,\ *\}$$

g_i 表示逆时针旋转 $i\times 24°$, $i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 14$, 具体地说

$g_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)$

$g_1=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15)$

$g_2=(1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14)$

$g_3=(1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13)(2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14)(3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15)$

$g_4=(1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 4,\ 8,\ 12)$

$g_5=(1,\ 6,\ 11)(2,\ 7,\ 12)(3,\ 8,\ 13)(4,\ 9,\ 14)(5,\ 10,\ 15)$

$g_6=(1,\ 7,\ 13,\ 4,\ 10)(2,\ 8,\ 14,\ 5,\ 11)(3,\ 9,\ 15,\ 6,\ 12)$

⋮

$\lambda(g_0)=15,\quad \lambda(g_1)=1,\quad \lambda(g_2)=1,\quad \lambda(g_3)=3$

$\lambda(g_4)=1,\quad \lambda(g_5)=5,\quad \lambda(g_6)=3,\quad \lambda(g_7)=1$

$\lambda(g_8)=1,\quad \lambda(g_9)=3,\quad \lambda(g_{10})=5,\quad \lambda(g_{11})=1$

$\lambda(g_{12})=3,\quad \lambda(g_{13})=1,\quad \lambda(g_{14})=1$

代入 Polya 公式得

$$l=\frac{1}{15}[3^{15}+3^1+3^1+3^3+3^1+3^5+3^3+3^1+3^1+3^3+3^5+3^1+3^3+3^1+3^1]=956,635$$

(2) 用 Burnside 定理解

着色集合有 3^{15} 个元素，所以 $\lambda_1(\bar{g}_0)=3^{15}$。如果一个着色通过 24° 旋转后依然不变，全部扇形必着同一种颜色，因此只有 3 种着色方案是不变的，即 $\lambda_1(\bar{g}_1)=3$。同理可得

$$\lambda_1(\bar{g}_2)=\lambda_1(\bar{g}_4)=\lambda_1(\bar{g}_7)=\lambda_1(\bar{g}_8)=\lambda_1(\bar{g}_{11})=\lambda_1(\bar{g}_{13})=\lambda_1(\bar{g}_{14})=3$$

如果一种着色通过 $3\times24°$ 旋转后依然不变，则必定扇形 1, 4, 7, 10, 13 同色，扇形 2, 5, 8, 11, 14 同色，扇形 3, 6, 9, 12, 15 同色，所以旋转 $3\times24°$ 着色不变的数目就是用 3 种颜色对 3 组扇形的着色数，故有 $3^3=27$ 种，即 $\lambda_1(\bar{g}_3)=27$。同理可得

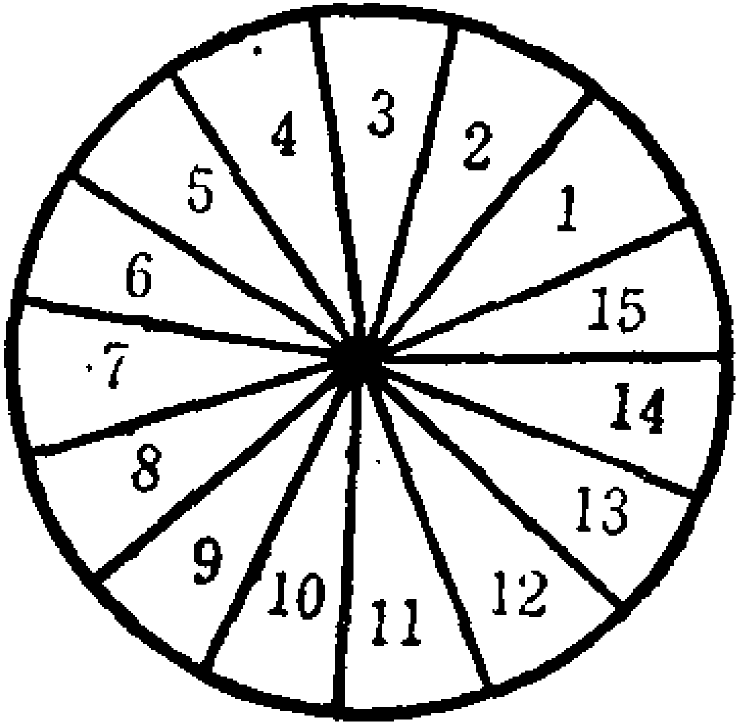


图 8.8

$$\lambda_1(\bar{g}_6)=\lambda_1(\bar{g}_9)=\lambda_1(\bar{g}_{12})=27$$

如果一个着色通过 $5\times24°$ 旋转依然不变，则{1, 6, 11}{2, 7, 12}{3, 8, 13}{4, 9, 14}{5, 10, 15}各组扇形必定同色。所以旋转 $5\times24°$ 后着色不变的数目就是用 3 种颜色对 5 组扇形的着色方法数，故有 $3^5=243$ 种，即 $\lambda_1(\bar{g}_5)=243$。代入 Burnside 公式得

$$l=\frac{1}{15}[3^{15}+3+3+27+3+243+27+3+3+27$$

$$+243+3+27+3+3]=956,635$$

8.32 在一个有 7 匹马的旋转木马上用 n 种颜色着色，问有多少种可供选择的方案？（旋转木马也只能转动而不能翻转）

解 对象集 $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，颜色集是 $R=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$，D 上的置换群 $G=\langle\{g_0, g_1, \cdots, g_6\}, *\rangle$，其中 g_i 表示旋转 $\frac{360°}{7}\cdot i$，因 7 是质数，所以除 $\lambda(g_0)=7$ 外，其它 $\lambda(g_i)=1(i=1, 2, \cdots, 6)$ 代入 Polya 公式得

$$l=\frac{1}{7}[n^7+6\cdot n]$$

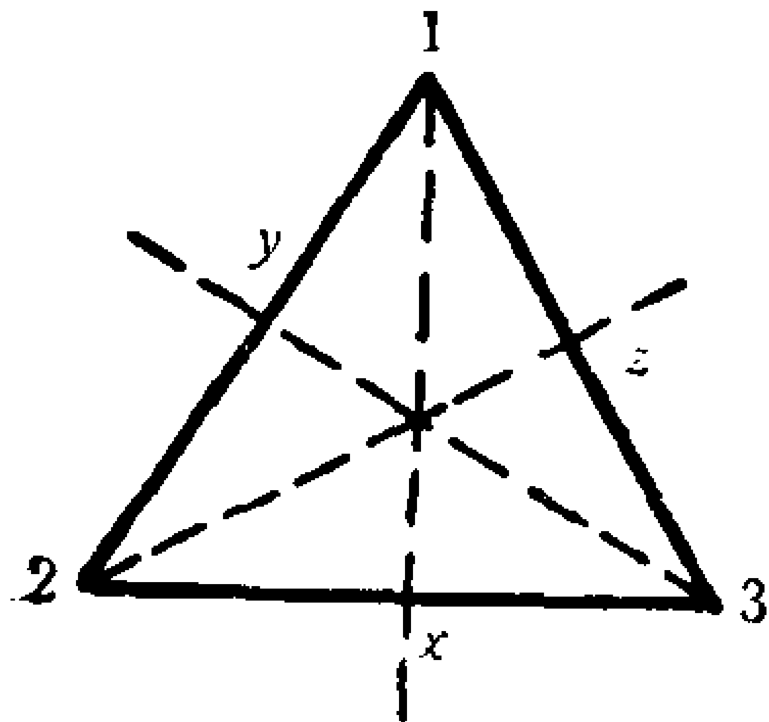


图 8.9

8.33 求用三种颜色（红、蓝、绿）对一个等边三角形顶点着色的方式数。（等边三角形可以绕中心旋转，也

可绕对称轴翻转，见图 8.9)

解 对象集 $D=\{1, 2, 3\}$，颜色集 $R=\{$红、蓝、绿$\}$，D 上的置换群 G 有以下元素：

$g_0=(1)(2)(3)$	不动	$\lambda(g_0)=3$
$g_1=(1,2,3)$	转 120°	$\lambda(g_1)=1$
$g_2=(1,3,2)$	转 240°	$\lambda(g_2)=1$
$g_3=(1)(2,3)$	绕 $1x$ 轴翻转	$\lambda(g_3)=2$
$g_4=(2)(1,3)$	绕 $2z$ 轴翻转	$\lambda(g_4)=2$
$g_5=(3)(1,2)$	绕 $3y$ 轴翻转	$\lambda(g_5)=2$

代入 Polya 公式得

$$l=\frac{1}{6}[3^3+3^1+3^1+3^2+3^2+3^2]=10$$

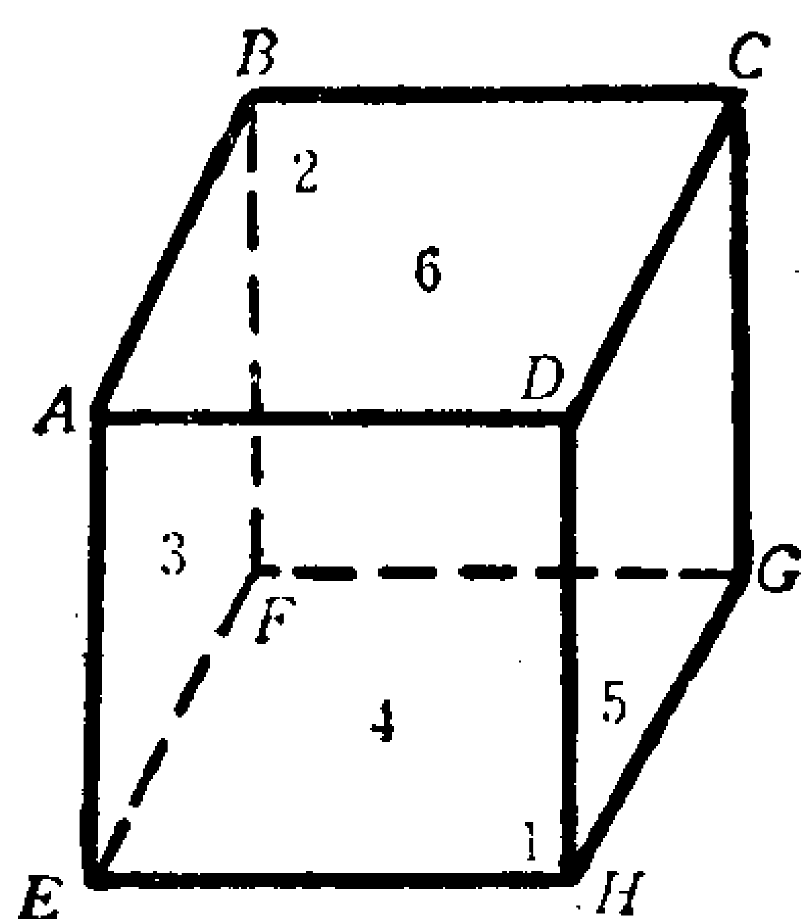


图 8.10

8.34 一个立方体如图 8.10 所示。用 1, 2, 3, 4, 5, 6 分别标记 $ADHE$（前），$BCGF$（后），$ABFE$（左），$EFGH$（下），$DCGH$（右），$ABCD$（上）。$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$的某些置换对应于立方体的一种物理转动，例如$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&4&5&6&3\end{pmatrix}$对应于立方体绕前后面中心点的轴逆时针转 90°，但有的则明显不行，例如$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&1&2\end{pmatrix}$，它要把 1 和 2（二者是对面）放置到 3 和 4（两者是相邻），物理上不可能实现。设 G 是与立方体物理转动相对应的 S_6 的子群。

(a) 列出所有 G 的置换。

(b) 用六种颜色给立方体的六个面着色，每面颜色不同，并

且当一个着色的立方体经转动可得到另一个时，则认为二者相同。问有多少种着色的方案？

解　(a) G 由以下 24 个置换构成：

1. 以 1, 2 面中心联线为轴逆时针旋转 0°, 90°, 180°, 270°，共 4 个置换：

$$g_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)$$
$$g_2=(1)(2)(3, 4, 5, 6)$$
$$g_3=(1)(2)(3, 5)(4, 6)$$
$$g_4=(1)(2)(3, 6, 5, 4)$$

2. 以 3, 5 面中心联线为轴逆时针旋转 90°, 180°, 270°，共 3 个置换：

$$g_5=(1, 4, 2, 6)(3)(5)$$
$$g_6=(1, 2)(3)(4, 6)(5)$$
$$g_7=(1, 6, 2, 4)(3)(5)$$

3. 以 4, 6 面中心联线为轴逆时针旋转 90°, 180°, 270°，共 3 个置换：

$$g_8=(1, 5, 2, 3)(4)(6)$$
$$g_9=(1, 2)(3, 5)(4)(6)$$
$$g_{10}=(1, 3, 2, 5)(4)(6)$$

4. 以 $\{BF, DH\}$, $\{AE, CG\}$, $\{AB, HG\}$, $\{EF, DC\}$, $\{EH, BC\}$, $\{AD, FG\}$ 每组边的中点联线为轴翻转 180°，共 6 个置换：

$$g_{11}=(1, 5)(2, 3)(4, 6)$$
$$g_{12}=(1, 3)(2, 5)(4, 6)$$
$$g_{13}=(1, 2)(3, 6)(4, 5)$$
$$g_{14}=(1, 2)(3, 4)(5, 6)$$
$$g_{15}=(1, 4)(2, 6)(3, 5)$$

$$g_{16}=(1,\ 6)(2,\ 4)(3,\ 5)$$

5．分别以对角线 BH, CE, DF, AG 为轴旋转 $120°$ 和 $240°$，共 8 个置换：

$$g_{17}=(1,\ 4,\ 5)(2,\ 6,\ 3)$$
$$g_{18}=(1,\ 5,\ 4)(2,\ 3,\ 6)$$
$$g_{19}=(1,\ 4,\ 3)(2,\ 6,\ 5)$$
$$g_{20}=(1,\ 3,\ 4)(2,\ 5,\ 6)$$
$$g_{21}=(1,\ 5,\ 6)(2,\ 3,\ 4)$$
$$g_{22}=(1,\ 6,\ 5)(2,\ 4,\ 3)$$
$$g_{23}=(1,\ 3,\ 6)(2,\ 5,\ 4)$$
$$g_{24}=(1,\ 6,\ 3)(2,\ 4,\ 5)$$

(b) G 是对象集 $D=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 6\}$ 上的置换群，颜色集 $R=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 6\}$。用 R 给 D 着色，因要求每面着不同颜色，共有 $6!=720$ 种着色方案，着色集合 S 有 720 个元素，即 $S=\{s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{720}\}$。设 $\overline{G}$ 是 G 诱导的 S 上的置换群，显然 $\overline{G}$ 中恒等置换 $\overline{g}_1$ 有 $\lambda_1(\overline{g}_1)=720$，因没有其它 $\overline{g}_i$ 可使 S 中的元素不变，故 $\lambda_1(\overline{g}_i)=0(i=2,\ 3,\ \cdots,\ 720)$ 代入 Burnside 公式得着色方案总数为

$$l=\frac{1}{24}(720)=30$$

评注　本题不能用 Polya 定理来解是因为题中有“每面颜色不同”的要求，不符合 Polya 定理的条件所致。这说明 Polya 定理的适用范围比 Burnside 定理要狭些。因为凡是 Polya 定理可解的题应用 Burnside 定理一定可解，而反之不然。

8.35　我们用数 1～8 来标记立方体的 8 个顶点，如图 8.11 所示。

(a) 我们把立方体的 24 种转动看成是 8 个顶点的置换。它

们构成一个群 G，试写出 G 的元素。

(b) 证明 给立方体的 8 个顶点着黑白 2 色，其不同方案数是 23。

(c) 证明 用 x 种颜色给立方体顶点着色的不同方案数是 $\frac{1}{24}(x^8+17x^4+6x^2)$。

(d) 证明 如果 n 是整数，则 24 可除尽 $n^8+17n^4+6n^2$。

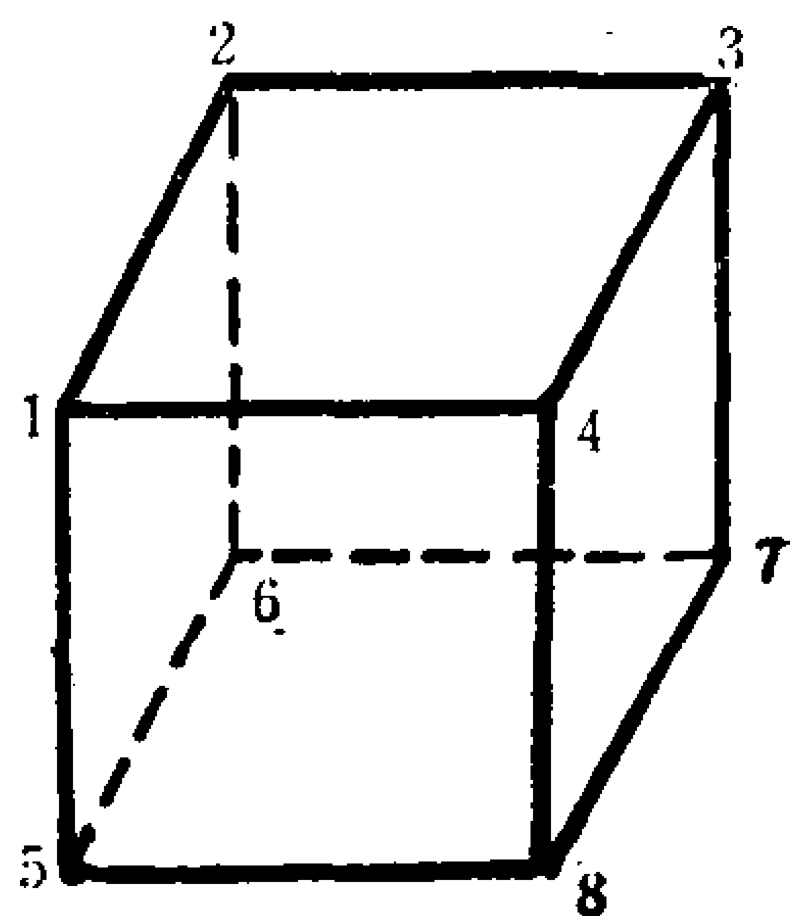


图 8.11

解 (a) 应用上题 (a) 的方法即可求得 G 的元素如下：

$$g_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$$
$$g_2=(1,\ 4,\ 3,\ 2)(5,\ 8,\ 7,\ 6)$$
$$g_3=(1,\ 3)(2,\ 4)(5,\ 7)(6,\ 8)$$
$$g_4=(1,\ 2,\ 3,\ 4)(5,\ 6,\ 7,\ 8)$$
$$g_5=(1,\ 4,\ 8,\ 5)(2,\ 3,\ 7,\ 6)$$
$$g_6=(1,\ 8)(2,\ 7)(3,\ 6)(4,\ 5)$$
$$g_7=(1,\ 5,\ 8,\ 4)(2,\ 6,\ 7,\ 3)$$
$$g_8=(1,\ 5,\ 6,\ 2)(3,\ 4,\ 8,\ 7)$$
$$g_9=(1,\ 6)(2,\ 5)(3,\ 8)(4,\ 7)$$
$$g_{10}=(1,\ 2,\ 6,\ 5)(3,\ 7,\ 8,\ 4)$$
$$g_{11}=(1,\ 5)(2,\ 8)(3,\ 7)(4,\ 6)$$
$$g_{12}=(1,\ 7)(2,\ 6)(3,\ 5)(4,\ 8)$$
$$g_{13}=(1,\ 4)(2,\ 8)(3,\ 5)(6,\ 7)$$
$$g_{14}=(1,\ 7)(2,\ 8)(3,\ 4)(5,\ 6)$$
$$g_{15}=(1,\ 7)(2,\ 3)(4,\ 6)(5,\ 8)$$
$$g_{16}=(1,\ 2)(3,\ 5)(4,\ 6)(7,\ 8)$$

$$g_{17}=(1)(2,4,5)(3,8,6)(7)$$
$$g_{18}=(1)(2,5,4)(3,6,8)(7)$$
$$g_{19}=(1,3,8)(2,7,5)(4)(6)$$
$$g_{20}=(1,8,3)(2,5,7)(4)(6)$$
$$g_{21}=(1,8,6)(2,4,7)(3)(5)$$
$$g_{22}=(1,6,8)(2,7,4)(3)(5)$$
$$g_{23}=(1,3,6)(2)(4,7,5)(8)$$
$$g_{24}=(1,6,3)(2)(4,5,7)(8)$$

(b) 由(a)知 $N(G)=24$, G 中一个置换是 8 个圈, 17 个置换是 4 个圈, 6 个置换是 2 个圈, 而颜色数 $m=2$, 代入 Polya 公式, 得着色方案数为

$$l=\frac{1}{24}[2^8+17\cdot2^4+6\cdot2^2)=23$$

(c) 只须令 $m=x$ 代入 Polya 公式即得。

(d) 因为着色方案数总是整数, 令 $m=n$, 所以 $\frac{1}{24}(n^8+17n^4+6n^2)$ 是整数, 即 24 可除尽 $n^8+17n^4+6n^2$。

评注 从以上几题可以看出, 应用 Polya 定理计算时, 关键是找出对象集 D 上的置换群 G, 一旦找出了 G, 余下的工作就很简单了, 只是代入公式计算而已。

8.36 掷五颗骰子 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, 有多少种布局使 $d_1=d_2=d_3$, $d_4=d_5$, 而总和为 19。

解 记 $D=\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$, 我们把这个问题看成是 D 的着色问题, 每颗骰子可用颜色集 $R=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的元素之一着色。设颜色 r 的权重为 x^r, 则五颗骰子的一种着色的权重为 x 的方幂, 其次数等于 5 颗骰子的总点数。例如掷出

$$d_1=3,\ d_2=4,\ d_3=1,\ d_4=1,\ d_5=6$$

则其权重为

$$w(3)\cdot w(4)\cdot w(1)\cdot w(1)\cdot w(6)=x^3\cdot x^4\cdot x\cdot x\cdot x^6=x^{15}$$

记 $D_1=\{d_1, d_2, d_3\}$, $D_2=\{d_4, d_5\}$, 则我们所要计算的满足题意的骰子布局数,只要列出 D 的着色清单就可得出。由于这个着色要求 D_1 和 D_2 中的元素分别着相同颜色,而 $N(D_1)=3$, $N(D_2)=2$, 根据内容提要 8.3-4 的公式(8-4)知,这样一个着色集合的清单为

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}(S)&=(x^{1\cdot3}+x^{2\cdot3}+x^{3\cdot3}+x^{4\cdot3}+x^{5\cdot3}+x^{6\cdot3})\\&\quad\cdot(x^{1\cdot2}+x^{2\cdot2}+x^{3\cdot2}+x^{4\cdot2}+x^{5\cdot2}+x^{6\cdot2})\\&=(x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15}+x^{18})\\&\quad\cdot(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})\\&=x^5+x^7+x^8+x^9+x^{10}+2x^{11}+x^{12}+2x^{13}\\&\quad+2x^{14}+2x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+2x^{18}+2x^{19}\\&\quad+2x^{20}+2x^{21}+2x^{22}+x^{23}+2x^{24}+x^{25}\\&\quad+x^{26}+x^{27}+x^{28}+x^{30}\end{aligned}$$

因为 x^{19} 前的系数为 2, 所以满足题意的布局有2种, 即 5, 5, 5, 2, 2 和 3, 3, 3, 5, 5。

评注 从题中还可看出其它布局。例如,要求 $d_1=d_2=d_3$, $d_4=d_5$ 且总点数是 29 的布局是没有的。

8.37 证明带权的 Burnside 定理——设对象集 $D=\{d_1, d_2, \cdots, d_l\}$, 颜色集 $R=\{1, 2, \cdots, m\}$, G 是 D 上的置换群,用 R 对 D 着色,可得着色集合 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$, s_i 的权用 $w(s_i)$ 表示,由 G 可诱导出 S 上的置换群 $\overline{G}$, 对 $\overline{G}$ 中的每个元素 $\overline{g}$, 在 $\overline{g}$ 的作用下,保持不变的元素的权之和记为 $\overline{w}(\overline{g})$。另外,记 G 的轨为 O_1, O_2, $\cdots$, 假定轨中的元素都有相同的权,定义每个轨的权 $w(O_i)$ 为轨中元素的共同权,则

$$w(O_1)+w(O_2)+\cdots=\frac{1}{N(\overline{G})}[\overline{w}(\overline{g}_1)+\overline{w}(\overline{g}_2)+\cdots] \qquad (1)$$

上式左边是对所有不同轨求和，右边是对 $\overline{G}$ 中所有元素求和。

证 (1)式右边是被每一 $\overline{g}$ 保持固定的着色 x 的权 $w(x)$ 之和，而 $N(St_x)=\dfrac{N(\overline{G})}{N(O_x)}$ 表示着色 x 被 G 中元素保持不变的次数，又 x 的权重是 $w(x)$，所以

$$\overline{w}(\overline{g}_1)+\overline{w}(\overline{g}_2)+\cdots=\left[\frac{w(x_1)}{N(O_{x_1})}+\frac{w(x_2)}{N(O_{x_2})}+\cdots\right]N(\overline{G})$$

代入(1)式右边可消去 $N(\overline{G})$。

又若 $O_i=\{x_s, x_t, \cdots, x_u\}$，则

$$\begin{aligned}&\frac{w(x_s)}{N(O_{x_s})}+\frac{w(x_t)}{N(O_{x_t})}+\cdots+\frac{w(x_u)}{N(O_{x_u})}\\&=\frac{w(O_i)}{N(O_{x_s})}+\frac{w(O_i)}{N(O_{x_t})}+\cdots+\frac{w(O_i)}{N(O_{x_u})}\\&=w(O_i)\end{aligned}$$

而右边是对 S 的所有元素 x_i 求和的。故左边等于右边。

8.38 证明带权的 Polya 定理——设 $R=\{1, 2, \cdots, m\}$是颜色集，$D=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 是对象集，S 是 R 对 D 的着色集合。G 是 D 上的置换群。如果有 G 中某个 g 把某种着色送到另一种着色，我们就认为这两种着色是等价的，我们定义在 G 作用下的等价类(即格式)的权为等价类中诸元素的共同权，则所有格式的权之和是：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N(G)}[w_1^{\lambda_1(g_1)}w_2^{\lambda_2(g_1)}\cdots w_n^{\lambda_n(g_1)}\\&\quad+w_1^{\lambda_1(g_2)}w_2^{\lambda_2(g_2)}\cdots w_n^{\lambda_n(g_2)}+\cdots]\end{aligned} \qquad (1)$$

其中，
$$w_1 = w(1) + w(2) + \cdots + w(m)$$
$$w_2 = w^2(1) + w^2(2) + \cdots + w^2(m)$$
$$\cdots\cdots$$
$$w_n = w^n(1) + w^n(2) + \cdots + w^n(m)$$
$\lambda_i(g_r)$表示 $g_r \in G$ 写成不相交圈时 i-圈的个数。

证 为简化叙述，延用上题的符号。由上题得所有格式的权之和是
$$\frac{1}{N(\overline{G})}[\overline{w}(\overline{g}_1) + \overline{w}(\overline{g}_2) + \cdots] \tag{2}$$
其中 $\overline{w}(\overline{g})$ 是 $\overline{g}$ 使之保持不变的着色的权之和。

另一方面，如果 D 被 g 分解成不相交的子集 D_1, D_2, $\cdots$, D_k, 在同一子集中的元素限着同一颜色，根据提要 8-3.4，则 S 的清单是
$$\text{inv}(S) = [w(1)^{N(D_1)} + \cdots + w(m)^{N(D_1)}] \cdot \cdots \cdot [w(1)^{N(D_k)} + \cdots + w(m)^{N(D_k)}]$$
这里每一因子都是
$$w_t = w^t(1) + w^t(2) + \cdots + w^t(m)$$
形式，而 w_t 的因子个数恰是长度为 t 的圈的个数，即 $\lambda_t(g)$。因此
$$\text{inv}(S) = w_1^{\lambda_1(g)} w_2^{\lambda_2(g)} \cdots w_n^{\lambda_n(g)} \tag{3}$$
它也就是在 $\overline{g}$ 作用下保持不变的着色的权之和。当 g 遍历 G 的所有元素 g_1, g_2, $\cdots$ 时，$\overline{g}$ 也遍历 $\overline{G}$ 的所有元素 $\overline{g}_1$, $\overline{g}_2$, $\cdots$, 把(3)式逐个代入(2)式的右边 $\overline{w}(\overline{g})$, 又 $N(\overline{G}) = N(G)$。这样就得出欲证的公式(1)。

8.39 用带权的 Burnside 定理和带权 Polya 定理重做题 8.30。

解 (a) 用带权的 Burnside 定理解

所求的不同方案，就是定理中不同轨的权重之和，它是

$$\frac{1}{N(\bar{G})}[\bar{w}(\bar{g}_0)+\bar{w}(\bar{g}_1)+\bar{w}(\bar{g}_2)+\bar{w}(\bar{g}_3)]$$

$$=\frac{1}{4}[(w^4+b^4+4w^3b+4b^3w+6b^2w^2)$$

$$+(w^4+b^4)+(w^4+b^4+2b^2w^2)+(w^4+b^4)]$$

$$=w^4+b^4+w^3b+b^3w+2b^2w^2$$

可见不同的方案数是 6 个。(参看图 8.4)

(b) 用带权 Polya 定理解

所求的不同方案，就是定理中不同格式的权重之和，它是

$$\frac{1}{N(G)}[w_1^{\lambda_1(g_1)}w_2^{\lambda_2(g_1)}w_3^{\lambda_3(g_1)}w_4^{\lambda_4(g_1)}$$

$$+w_1^{\lambda_1(g_2)}w_2^{\lambda_2(g_2)}w_3^{\lambda_3(g_2)}w_4^{\lambda_4(g_2)}+\cdots]$$

$$=\frac{1}{4}[(w+b)^4+(w^4+b^4)^1+(w^2+b^2)^2+(w^4+b^4)^1]$$

$$=w^4+b^4+w^3b+wb^3+2w^2b^2$$

结果与(a)一致，即有 6 种方案。

8.40 如果我们把经过旋转能吻合的着色认为是相同的。

(a) 给正立方体着成三面白色和三面黑色的不同方案有多少？

(b) 给正立方体着成 4 面黑色和 2 面白色的不同方案有多少？

(c) 给正立方体着成黑白两种颜色的不同方案有多少？

(d) 证明用 x 种颜色给立方体的面着色，在一种着色中并不要求使用全部颜色，则不同的着色方案数为 $\frac{1}{24}(x^6+3x^4+12x^3+8x^2)$。

解 (a) 对象集 $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，颜色集为 $R=\{1,$

2}。并定义 $w(1)=b$(黑), $w(2)=w$(白), 由题 8.34 知 $G=\{g_1, g_2, \cdots, g_{24}\}$, 其中由 6 个 1–圈组成的 1 个($g_1$)。由 2 个 1–圈 1 个 4–圈组成的 6 个($g_2, g_4, g_5, g_7, g_8, g_{10}$), 由 2 个 1–圈 2 个 2–圈组成的 3 个 (g_3, g_6, g_9), 由 3 个 2–圈组成的 6 个 ($g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{16}$), 由 2 个 3–圈组成的 8 个 ($g_{17}, g_{18}, g_{19}, g_{20}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, g_{24}$)

$$w_1=b+w \qquad w_2=b^2+w^2 \qquad w_3=b^3+w^3$$
$$w_4=b^4+w^4 \qquad w_5=b^5+w^5 \qquad w_6=b^6+w^6$$

又 $N(G)=24$, 代入带权 Polya 定理中的公式得不同格式的权重之和是

$$\frac{1}{24}[w_1^6+6w_1^2w_4^1+3w_1^2w_2^2+6\cdot w_2^3+8w_3^2]$$
$$=\frac{1}{24}[(b+w)^6+6(b+w)^2(b^4+w^4)$$
$$+3(b+w)^2(b^2+w^2)^2+6(b^2+w^2)^3+8(b^3+w^3)^2]$$
$$=b^6+w^6+b^5w+bw^5+2b^4w^2+2b^2w^4+2b^3w^3$$

b^3w^3 前的系数是2, 所以给正立方体的面着成三白三黑的方案有 2 个。

(b) b^4w^2 前系数是 2, 所以给正立方体的面着成四黑二白的方案也有 2 个。

(c) 由 8.34 题知 $\lambda(g_1)=6$, $\lambda(g_2)=\lambda(g_4)=\lambda(g_5)=\lambda(g_7)=\lambda(g_8)=\lambda(g_{10})=\lambda(g_{11})=\lambda(g_{12})=\lambda(g_{13})=\lambda(g_{14})=\lambda(g_{15})=\lambda(g_{16})=3$, $\lambda(g_3)=\lambda(g_6)=\lambda(g_9)=4$, $\lambda(g_{17})=\lambda(g_{18})=\lambda(g_{19})=\lambda(g_{20})=\lambda(g_{21})=\lambda(g_{22})=\lambda(g_{23})=\lambda(g_{24})=2$, $m=2$, $N(G)=24$, 代入 Polya 定理中的公式, 得不同方案数

$$l=\frac{1}{24}(2^6+3\cdot 2^4+12\cdot 2^3+8\cdot 2^2)=10$$

(d) $m=x$, 其余参数同(c), 代入得

$$l=\frac{1}{24}(x^6+3x^4+12x^3+8x^2)$$

评注 从本题(a)和(b)可以看出带权Polya定理把权、生成函数和在置换群作用下的等价性概念巧妙地结合在一起，使得在置换群的作用下，特定事物的计数问题得到解决。

8.41 在一个有七匹木马的旋转木马上着色，使成为

(a) 三蓝，三红，一黄。

(b) 三蓝，两红，两黄。

求方案数。

解 (a)用带权Polya定理来解。由题意知对象集 $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$D$ 上的置换群 G 的元素如下：

$$g_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$$
$$g_1=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$
$$g_2=(1, 3, 5, 7, 2, 4, 6)$$
$$g_3=(1, 4, 7, 3, 6, 2, 5)$$
$$g_4=(1, 5, 2, 6, 3, 7, 4)$$
$$g_5=(1, 6, 4, 2, 7, 5, 3)$$
$$g_6=(1, 7, 6, 5, 4, 3, 2)$$

颜色集是 $R=\{$红，蓝，黄$\}$，权重 $w($红$)=r$，$w($黄$)=y$，$w($蓝$)=b$。

$$w_1=(b+r+y) \quad w_2=b^2+r^2+y^2$$
$$w_3=b^3+r^3+y^3 \cdots w_7=b^7+r^7+y^7$$

代入带权Polya公式，得格式清单为

$$\frac{1}{7}[(b+r+y)^7+6(b^7+r^7+y^7)]$$
$$=b^7+r^7+y^7+20b^3r^3y+30b^3r^2y^2+\cdots$$

因为 b^3r^3y 前的系数为20，所以给木马着成三蓝，三红，一黄的方案有20种。

(b) $b^3r^2y^2$ 前的系数为 30，所以给木马着成三蓝，两红，两黄的方案有 30 种。

8.42 用四颗珠子，其中两颗蓝色，一颗红色和一颗黄色，能作成多少种项链？

解 对象集 $D=\{1, 2, 3, 4\}$，如图 8.12 所示。D 上的置换群 G 的元素有以下 8 个：

$$g_1=(1)(2)(3)(4)$$
$$g_2=(1, 2, 3, 4)$$
$$g_3=(1, 3)(2, 4)$$
$$g_4=(1, 4, 3, 2)$$
$$g_5=(1)(3)(2, 4)$$
$$g_6=(1, 3)(2)(4)$$
$$g_7=(1, 4)(2, 3)$$
$$g_8=(1, 2)(3, 4)$$

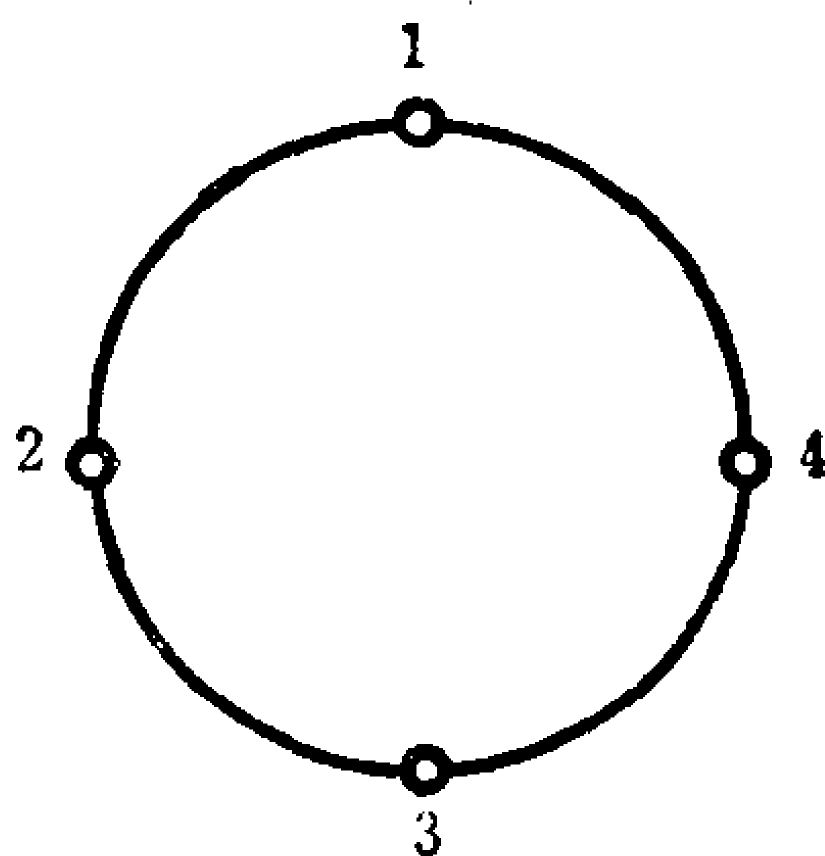


图 8.12

前 4 个是旋转，后 4 个是翻转，$N(G)=8$。颜色集 $R=\{$蓝、红、黄$\}$，$w($蓝$)=b$，$w($红$)=r$，$w($黄$)=y$。$w_1=b+r+y$，$w_2=b^2+r^2+y^2$，$w_3=b^3+r^3+y^3$，$w_4=b^4+r^4+y^4$。故格式清单为

$$\frac{1}{8}[(b+r+y)^4+2(b^4+r^4+y^4)$$
$$+2(b^2+r^2+y^2)(b+r+y)^2+3(b^2+r^2+y^2)^2$$
$$=b^4+r^4+y^4+b^3r+b^3y+r^3y+by^3+ry^3+br^3$$
$$+2b^2r^2+2b^2y^2+2r^2y^2+2b^2ry+2br^2y+2bry^2$$

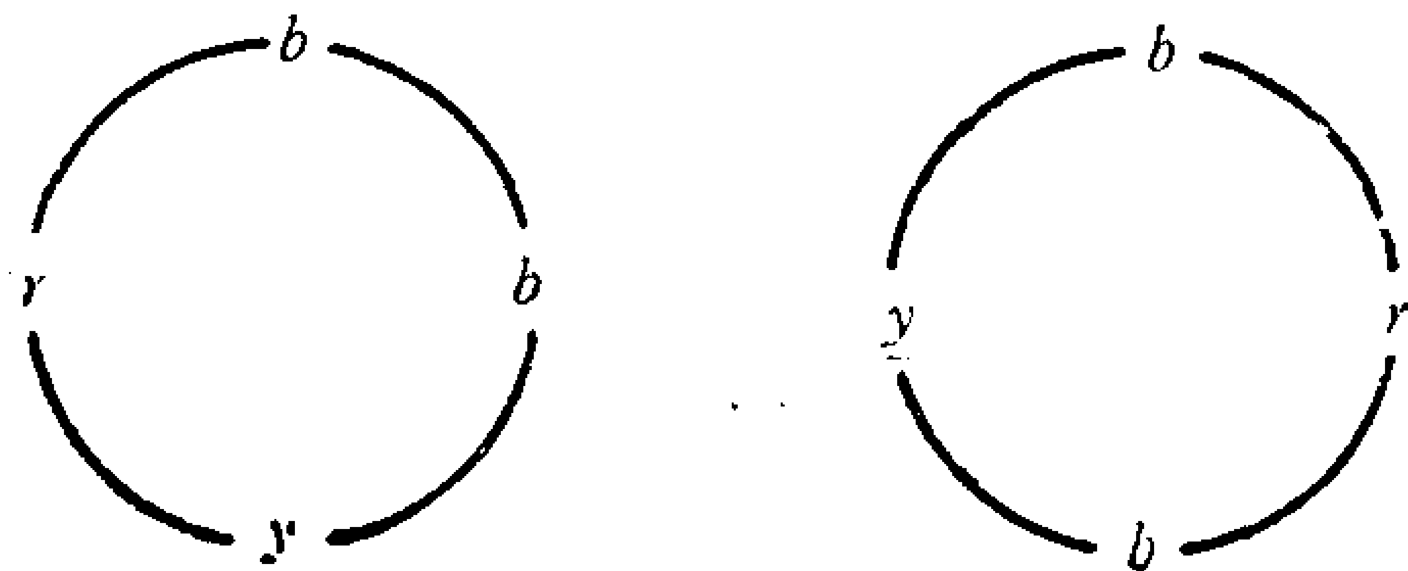


图 8.13

因 b^2ry 前的系数为 2，所以用两颗蓝色，一颗红色，一颗黄色珠子作成的项链有二种，如图 8.13 所示。

8.43 正四面体有四个全等的面，分别用 1，2，3，4 标记面 ABC，ABD，ACD，BCD，如图 8.14 所示。

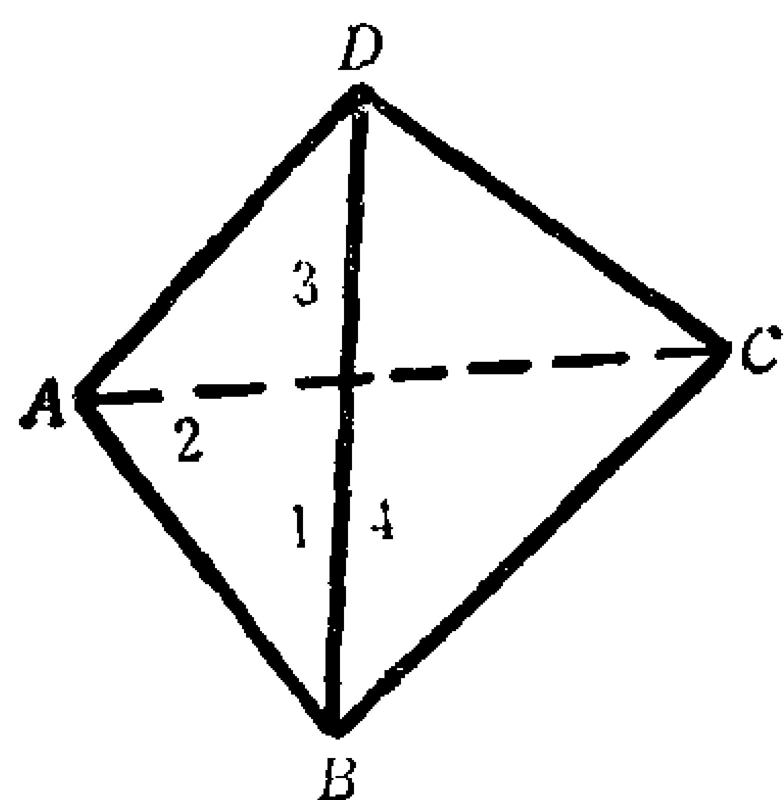


图 8.14

(a) 四面体的所有可能旋转构成的群是什么？

(b) 用m种颜色给四面体着色(每面着一色)，问有多少种方案？

(c) 用两面红，一面蓝，一面黄给四面体着色，共有多少种方案？

(d) 四面体顶点的旋转群是什么？

解 (a) 群 G 的元素如下：

$g_1=(1)(2)(3)(4)$	不动
$g_2=(1)(2,\ 4,\ 3)$	以 D 到对面的垂直线为轴逆时针转 120°
$g_3=(1)(2,\ 3,\ 4)$	以 D 到对面的垂直线为轴逆时针转 240°
$g_4=(2)(1,\ 3,\ 4)$	以 C 到对面的垂直线为轴逆时针转 120°
$g_5=(2)(1,\ 4,\ 3)$	以 C 到对面的垂直线为轴逆时针转 240°
$g_6=(3)(1,\ 4,\ 2)$	以 B 到对面的垂直线为轴逆时针转 120°
$g_7=(3)(1,\ 2,\ 4)$	以 B 到对面的垂直线为轴逆时针转 240°
$g_8=(4)(1,\ 2,\ 3)$	以 A 到对面的垂直线为轴逆时针转 120°

$g_9=(4)(1, 3, 2)$　　以 A 到对面的垂直线为轴逆时针转 240°

$g_{10}=(1, 3)(2, 4)$　　$g_3 \cdot g_4$ 的结果

$g_{11}=(1, 2)(4, 3)$　　$g_3 \cdot g_8$ 的结果

$g_{12}=(1, 4)(2, 3)$　　$g_3 \cdot g_6$ 的结果

除以上 12 个置换外，再无其它置换可物理实现。

(b) 由(a)知 $N(G)=12$, $\lambda(g_1)=4$, $\lambda(g_i)=2(i=2, 3, \cdots, 12)$，颜色数为 m, 根据 Polya 定理，不同的方案数为

$$\frac{1}{12}(m^4+11m^2)$$

(c) 对象集 $D=\{1, 2, 3, 4\}$, 由 (a) 知 g_1 是 4 个 1-圈，g_{10}, g_{11}, g_{12} 是两个 2-圈，其余为一个 1-圈，一个 3-圈。设权为 w(红)$=r$, w(蓝)$=b$, w(黄)$=y$，则

$$w_1=b+r+y,\ w_2=b^2+r^2+y^2$$
$$w_3=b^3+r^3+y^3,\ w_4=b^4+r^4+y^4$$

又 $N(G)=12$, 根据带权 Polya 定理，格式清单为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{12}(w_1^4+8w_1w_3+3w_2^2)\\&=\frac{1}{12}[(b+r+y)^4+8(b+r+y)(b^3+r^3+y^3)\\&\quad+3(b^2+r^2+y^2)^2]\\&=b^4+r^4+y^4+br^2y+\cdots\end{aligned}$$

因 br^2y 前的系数是 1，所以四面体四面着成两红，一蓝，一黄的方案只有一种。

(d) 四面体顶点在旋转下可能构成的置换实质上和 (a) 中的 G 一样，它的元素如下：

$$g_1=(A)(B)(C)(D)$$
$$g_2=(D)(ABC)$$

$$g_3=(D)(ACB)$$
$$g_4=(C)(ADB)$$
$$g_5=(C)(ABD)$$
$$g_6=(B)(ACD)$$
$$g_7=(B)(ADC)$$
$$g_8=(A)(BDC)$$
$$g_9=(A)(BCD)$$
$$g_{10}=(AC)(BD)$$
$$g_{11}=(AB)(CD)$$
$$g_{12}=(AD)(BC)$$

8.44 给一根 8 尺长的棍子着色，每尺着不同的颜色，共有 m 种颜色可供选择。仅有的变换是翻转 180°，因此置换群 G 只有两个元素。

(a) 标出棍子的每一尺，G 是什么？

(b) 给棍子着色，有多少种方案？

(c) 给三尺着蓝色，三尺着红色，两尺着绿色，有多少种着色方案？

(d) 三尺着蓝色，两尺着绿色，两尺着黄色，一尺着红色，有多少种着色方案？

解 (a) 若给棍子的每尺标上 1, 2, …, 8 如图 8.15 所示，则群 G 的两个元素是：

$$g_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$$
$$g_2=(1,\ 8)(2,\ 7)(3,\ 6)(4,\ 5)$$

(b) 由(a)知 $N(G)=2$, $\lambda(g_1)=8$, $\lambda(g_2)=4$, 而颜色数为



图 8.15

m, 所以着色方案数

$$l=\frac{1}{2}(m^8+m^4)$$

(c) 对象集 $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 颜色集 $R=\{$兰, 绿, 红, 黄$\}$, 权重为 w(蓝)$=b$, w(绿)$=g$, w(红)$=r$, w(黄)$=y$,

$$w_1=b+g+r+y,\ w_2=b^2+g^2+r^2+y^2,\ \cdots,$$
$$w_8=b^8+g^8+r^8+y^8$$

$N(G)=2$, 根据带权 Polya 定理, 不同格式的清单为

$$\frac{1}{2}(w_1^8+w_2^4)=\frac{1}{2}[(b+g+r+y)^8+(b^2+g^2+r^2+y^2)^4]$$
$$=\binom{8}{3,\ 3,\ 2}b^3g^2r^3+\binom{8}{3,\ 2,\ 2,\ 1}b^3g^2ry^2+\cdots$$
$$=280b^3g^2r^3+840b^3g^2ry^2+\cdots$$

$b^3g^2r^3$ 前的系数是 280, 所以给棍子着成三尺蓝, 三尺红, 两尺绿的方案总数有 280 种。

(d) 应用(c)的结果, $b^3g^2ry^2$ 前的系数是 840, 所以给棍子着成三尺蓝, 两尺绿, 两尺黄, 一尺红的方案总数为 840 种。

8.45 三个顶点的无向图有多少种图象?

解 这相当于给图 8.16 中的三条边着上"有、无"两种颜色, 着"有"的保留, 着"无"的去掉。设权重为 w(有)$=h$, w(无)$=n$, 则 $w_1=h+n$, $w_2=h^2+n^2$, $w_3=h^3+n^3$, 又三条边的置换群 G 的元素为

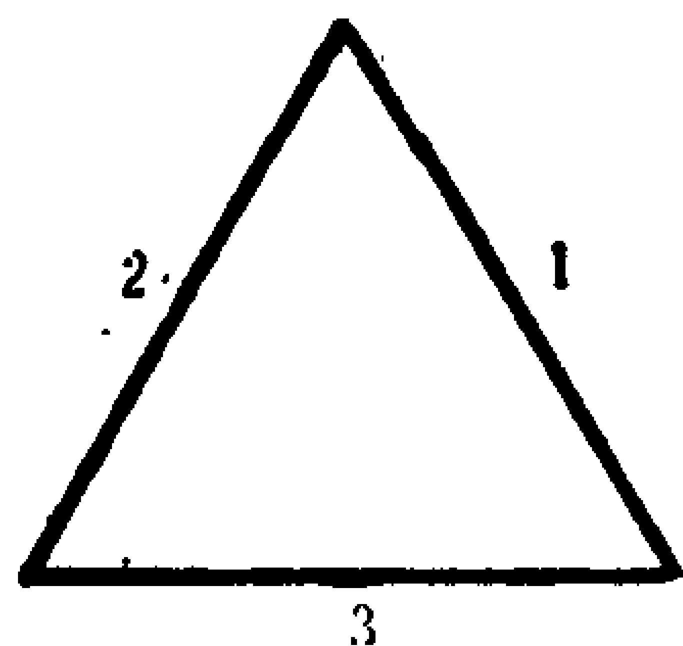


图 8.16

$$g_1=(1)(2)(3),\ g_2=(1,\ 2,\ 3),\ g_3=(1,\ 3,\ 2)$$
$$g_4=(1)(2,\ 3),\ g_5=(2)(1,\ 3),\ g_6=(3)(1,\ 2)$$

根据带权 Polya 定理，格式清单为

$$\frac{1}{6}[(h+n)^3+2(h^3+n^3)+3(h+n)(h^2+n^2)]$$
$$=h^3+n^3+h^2n+hn^2$$

所以有四种图象，它们如图 8.17 所示。

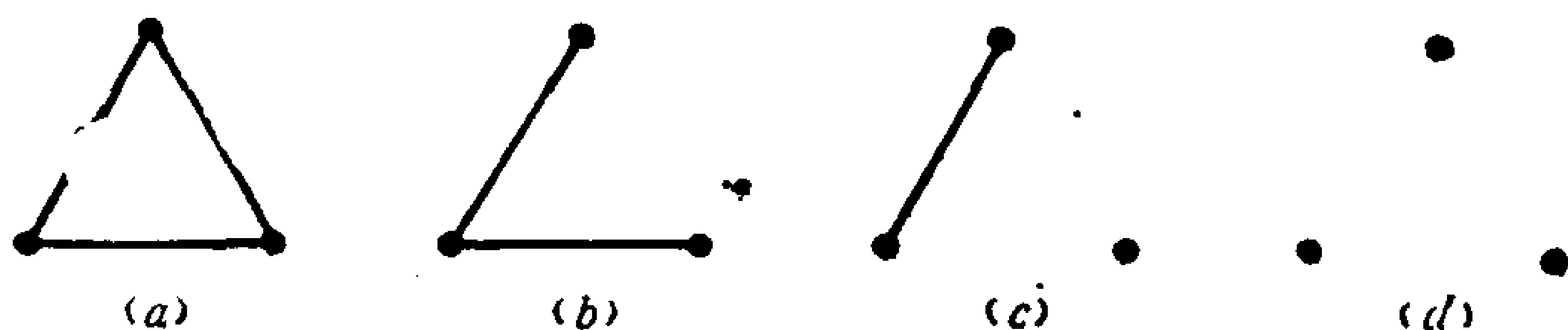


图 8.17

8.46 求四个顶点的有向图的不含自回路的图象的种数。

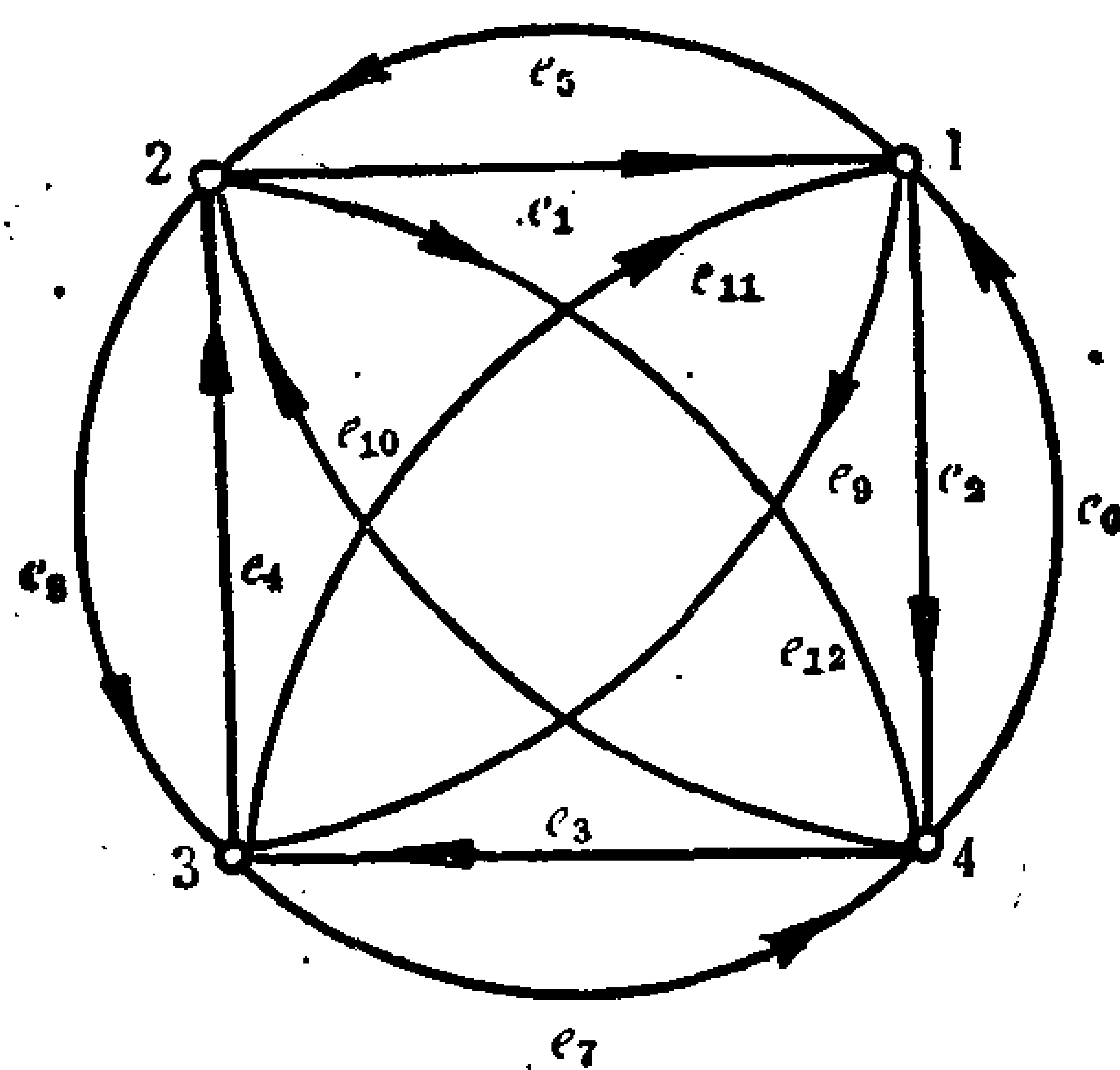


图 8.18

解 延用上题的记号。置换群 G 我们从 S_4 导出，导出方法如下：例如 S_4 中的 $p_2=(1,\ 2)$，可导出 G 的元素 $g_2=(e_1,\ e_5)(e_4,\ e_{11})(e_8,\ e_9)(e_2,\ e_{12})(e_{10},\ e_6)(e_3)(e_7)$，请结合图 8.18 核对。

现将从 S_4 的每个置换导出的 G 的每个置换列出，如表 8.1 所示。其中 $(1)^{12}$ 有 1 个，$(1)^2(2)^5$ 有 6 个，$(3)^4$ 有 8 个，$(2)^6$ 有 3 个，$(4)^3$ 有 6 个。根据带权 Polya 定理，格式清单为

表 8.1　S_4 的元素和它所导出的 G 的元素

S_4	G
$p_1=(1)(2)(3)(4)$	$g_1=(e_1)(e_2)(e_3)(e_4)(e_5)(e_6)(e_7)(e_8)(e_9)(e_{10})(e_{11})(e_{12})$
$p_2=(1, 2)$	$g_2=(e_1, e_5)(e_4, e_{11})(e_8, e_9)(e_2, e_{12})(e_{10}, e_6)(e_3)(e_7)$
$p_3=(1, 3)$	$g_3=(e_9, e_{11})(e_1, e_8)(e_4, e_5)(e_2, e_7)(e_3, e_6)(e_{10})(e_{12})$
$p_4=(1, 4)$	$g_4=(e_2, e_6)(e_1, e_{12})(e_5, e_{10})(e_7, e_{11})(e_9, e_3)(e_4)(e_8)$
$p_5=(2, 3)$	$g_5=(e_4, e_8)(e_5, e_9)(e_{11}, e_1)(e_7, e_{12})(e_3, e_{10})(e_2)(e_6)$
$p_6=(2, 4)$	$g_6=(e_{10}, e_{12})(e_1, e_6)(e_2, e_5)(e_3, e_8)(e_4, e_7)(e_9)(e_{11})$
$p_7=(3, 4)$	$g_7=(e_3, e_7)(e_2, e_9)(e_6, e_{11})(e_4, e_{10})(e_8, e_{12})(e_1)(e_5)$
$p_8=(1, 2, 3)$	$g_8=(e_2, e_{12}, e_7)(e_6, e_{10}, e_3)(e_5, e_8, e_{11})(e_1, e_4, e_9)$
$p_9=(1, 2, 4)$	$g_9=(e_1, e_{10}, e_2)(e_5, e_{12}, e_6)(e_9, e_8, e_3)(e_{11}, e_4, e_7)$
$p_{10}=(1, 3, 2)$	$g_{10}=(e_9, e_4, e_1)(e_{11}, e_8, e_5)(e_2, e_7, e_{12})(e_6, e_7, e_{10})$
$p_{11}=(1, 3, 4)$	$g_{11}=(e_{11}, e_3, e_2)(e_9, e_7, e_6)(e_1, e_8, e_{12})(e_5, e_4, e_{10})$
$p_{12}=(1, 4, 2)$	$g_{12}=(e_2, e_{10}, e_1)(e_6, e_{12}, e_5)(e_7, e_4, e_{11})(e_3, e_8, e_9)$
$p_{13}=(1, 4, 3)$	$g_{13}=(e_2, e_3, e_{11})(e_6, e_7, e_9)(e_1, e_{12}, e_8)(e_5, e_{10}, e_4)$
$p_{14}=(2, 4, 3)$	$g_{14}=(e_{12}, e_3, e_4)(e_{10}, e_7, e_8)(e_5, e_2, e_9)(e_1, e_6, e_{11})$
$p_{15}=(2, 3, 4)$	$g_{15}=(e_8, e_7, e_{10})(e_4, e_3, e_{12})(e_5, e_9, e_2)(e_1, e_{11}, e_6)$
$p_{16}=(1, 2, 3, 4)$	$g_{16}=(e_1, e_4, e_3, e_2)(e_5, e_8, e_7, e_6)(e_{11}, e_{10}, e_9, e_{12})$
$p_{17}=(1, 2, 4, 3)$	$g_{17}=(e_5, e_{12}, e_3, e_{11})(e_1, e_{10}, e_7, e_9)(e_2, e_8, e_6, e_4)$
$p_{18}=(1, 3, 2, 4)$	$g_{18}=(e_9, e_4, e_{12}, e_6)(e_{11}, e_8, e_{10}, e_2)(e_1, e_3, e_5, e_7)$
$p_{19}=(1, 3, 4, 2)$	$g_{19}=(e_9, e_7, e_{10}, e_1)(e_{11}, e_3, e_{12}, e_5)(e_2, e_4, e_6, e_8)$
$p_{20}=(1, 4, 2, 3)$	$g_{20}=(e_2, e_{10}, e_8, e_{11})(e_6, e_{12}, e_4, e_9)(e_1, e_7, e_5, e_3)$
$p_{21}=(1, 4, 3, 2)$	$g_{21}=(e_2, e_3, e_4, e_1)(e_6, e_7, e_8, e_5)(e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12})$
$p_{22}=(1, 2)(3, 4)$	$g_{22}=(e_1, e_5)(e_3, e_7)(e_{11}, e_{10})(e_9, e_{12})(e_2, e_8)(e_6, e_4)$
$p_{23}=(1, 3)(2, 4)$	$g_{23}=(e_9, e_{11})(e_{10}, e_{12})(e_2, e_4)(e_6, e_8)(e_1, e_3)(e_5, e_7)$
$p_{24}=(1, 4)(2, 3)$	$g_{24}=(e_2, e_6)(e_4, e_3)(e_1, e_7)(e_5, e_3)(e_9, e_{12})(e_{10}, e_{11})$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{24}[(h+n)^{12}+6(h+n)^2(h^2+n^2)^5\\
&\quad+8(h^3+n^3)^4+3(h^2+n^2)^6+6(h^4+n^4)^3]\\
&=h^{12}+h^{11}n+5h^{10}n^2+13h^9n^3+27h^8n^4+38h^7n^5\\
&\quad+48h^6n^6+38h^5n^7+27h^4n^8+13h^3n^9\\
&\quad+5h^2n^{10}+hn^{11}+n^{12}
\end{aligned}
$$

故所求图象种数是 218。

第九章 相异代表系

内容提要

9-1 相异代表系

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合(未必不同)。称元素系列 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的代表系，如果 $l_1\in A_1$, $l_2\in A_2$, $\cdots$, $l_n\in A_n$。称元素系列 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的相异代表系，如果它是一个代表系，并且 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 互不相同。

当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 非空时，总存在它的代表系，但相异代表系未必存在。相异代表系存在的充分必要条件由下列定理给出。

9-2 Hall 定理

有限集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有相异代表系当且仅当它们满足下列条件(Hall 条件)：

对于每个 $k=1, 2, \cdots, n$，以及对于任意选取的 $i_1, i_2, \cdots, i_k (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，均有

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k \tag{9-1}$$

(记号 $|A|$ 表示集合 A 的基数，即 A 的元素个数。证明见题 9.3)

9-3 关于相异代表系存在性的两点讨论

1. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一集合族，正整数 $r\leqslant n$，那么该集合族中 r 个集合有相异代表系当且仅当满足下列条件：

对于每一 $k=1,2,\cdots,n$，以及对于任意选取的 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，均有

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k-(n-r)$$

Hall 定理是本定理在 $r=n$ 时的特殊情况。(证明见题 9.4)

2．设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一集合族，那么该集合族中有相异代表系的集合的最大数目等于表达式

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|+(n-k)$$

在 $k=1, 2, \cdots, n$ 及 $i_1, i_2, \cdots, i_k (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$ 作所有可能选择时取得的最小值(证明见题 9.4)。

9-4 二部图及其匹配

1．$\langle X, E, Y\rangle$ 称为**二部图或偶图**，如果 X, Y 为结点集合，E 为边集合，且仅以 X 中结点为端点的边和仅以 Y 中结点为端点的边均不在 E 中。

图 9.1 给出了二部图的一个例子。

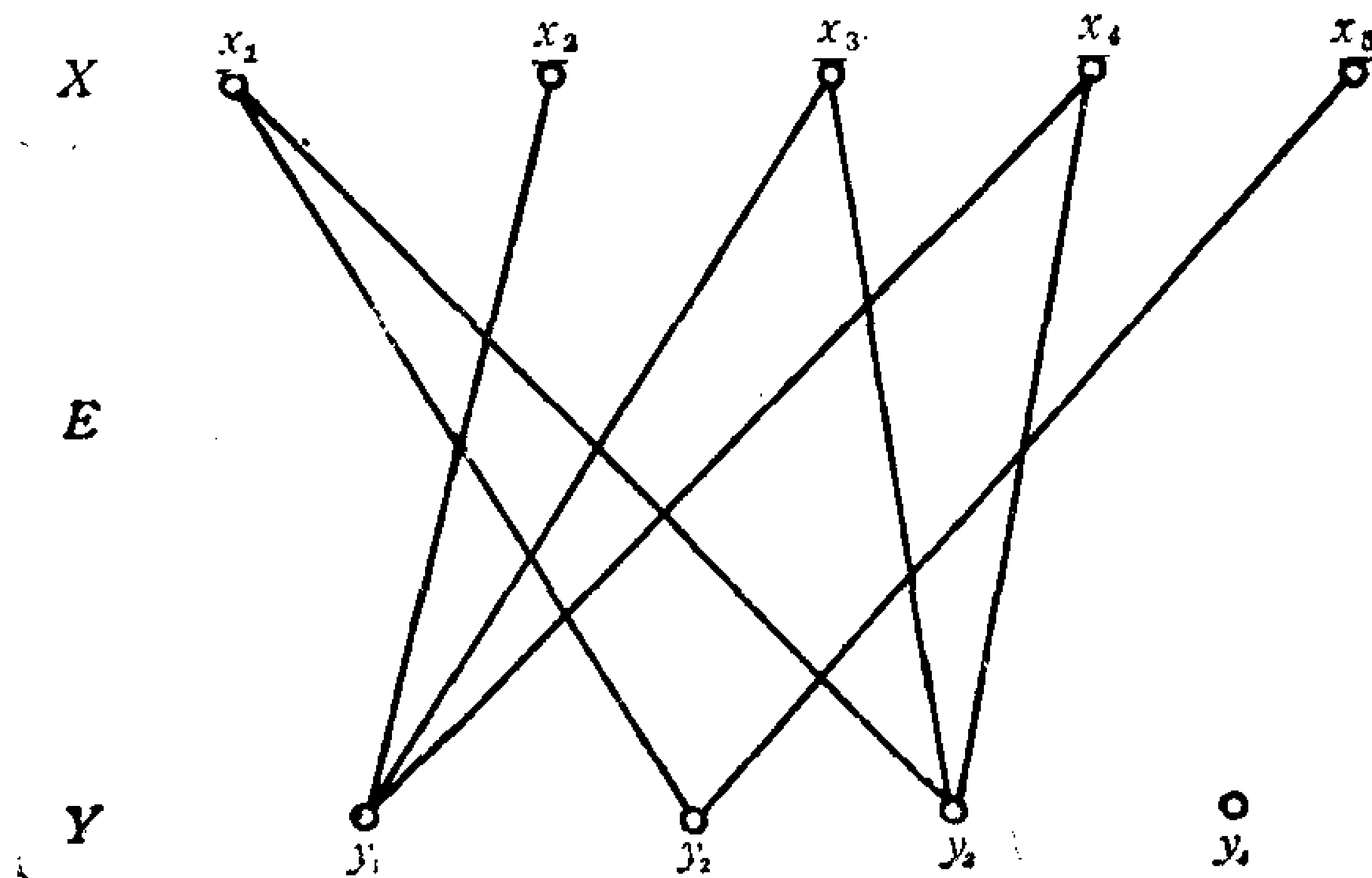


图 9.1

2．二部图与集合族是可以相互表示的。例如图 9.1 的二部图可用集合族

$$X_1=\{x_2, x_3, x_4\},\ X_2=\{x_1, x_5\}$$

$$X_3=\{x_1,\ x_3,x_4\},\ X_4=\varnothing$$

来表示。反之，上述集合族可用形如图 9.1 的二部图来表示。

3. E 的子集 M 称为二部图 $\langle X,\ E,\ Y\rangle$ 的一个**匹配**，如果 M 中没有任何两条边具有公共的端点。我们把边数最多的匹配称为**最大匹配**(它未必唯一)。例如在图 9.1 中，边集合 $\{[x_1,y_2],[x_2,\ y_1]\}$ 为一匹配，而边集合 $\{[x_1,\ y_2],\ [x_2,\ y_1],\ [x_3,\ y_3]\}$ 为一最大匹配。

9-5 匹配与相异代表系

我们已经指出，二部图与集合族是可以互相表示的，一般地，集合族 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 可用图 9.2 所示的二部图来表示，反之亦然。我们取

$$X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,\ Y=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

关于匹配与相异代表系我们有

1. 如果边集合 $\{[i_1,\ x_{i_1}],\ [i_2,\ x_{i_2}],\ \cdots,\ [i_k,\ x_{i_k}]\}$ 为一匹

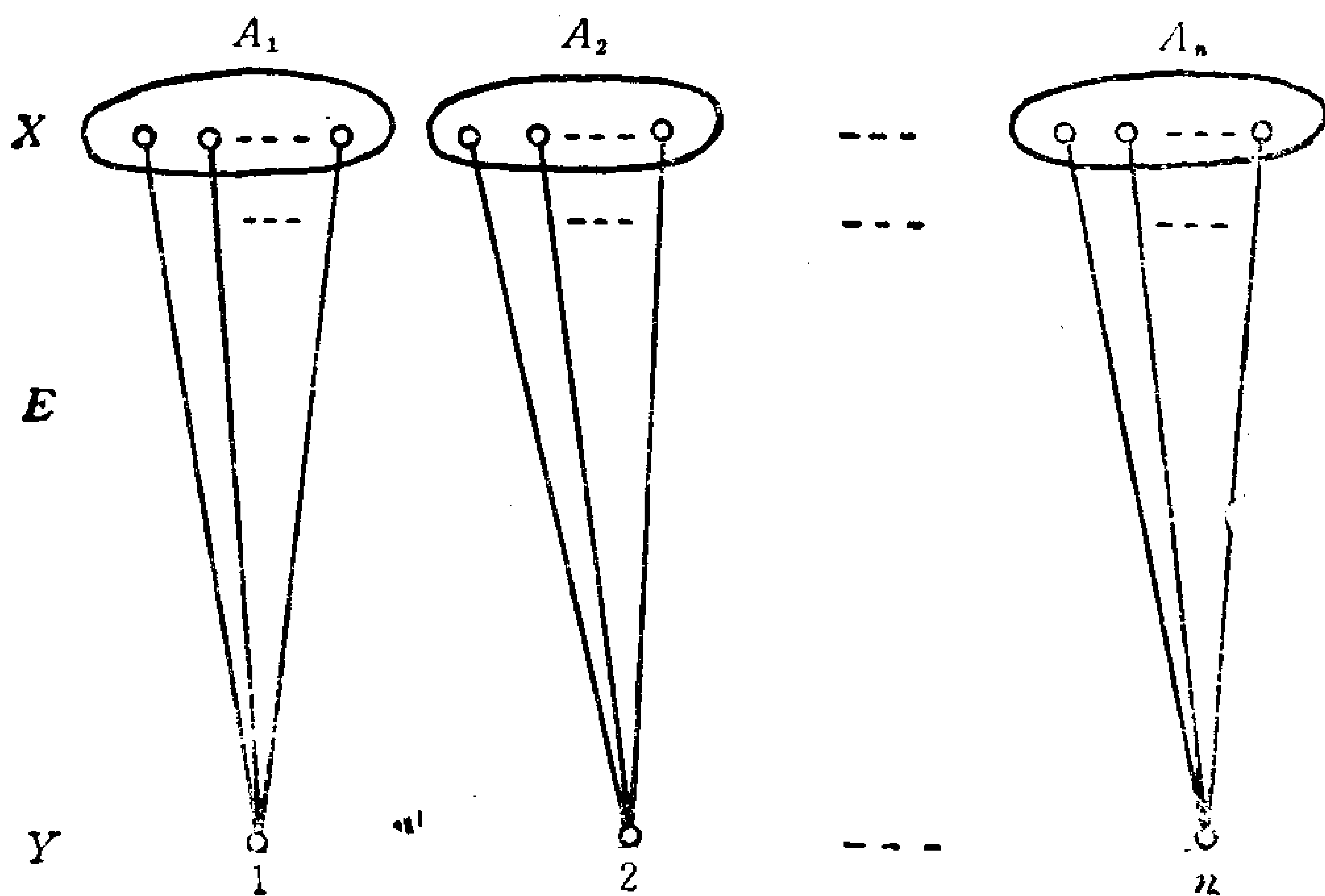


图 9.2

配，那么 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ 便是 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ 的相异代表系。

2．$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有相异代表系当且仅当上述二部图 $\langle X, E, Y\rangle$ 有 n 条边的匹配(**完全匹配**)。

3．在集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中有相异代表系的集合的最大数目，等于上述二部图 $\langle X, E, Y\rangle$ 的最大匹配的边数。

9-6　最大匹配，完全匹配

1．$X\cup Y$ 的子集 C 称为二部图 $\langle X, E, Y\rangle$ 的**覆盖集**，如果 E 中每条边至少有一个端点在 C 中。具有最少数目结点的覆盖集称为**最小覆盖集**。

2．二部图 $\langle X, E, Y\rangle$ 的最大匹配的边数等于其最小覆盖集的结点数。(证明见题 9.22)

3．最大匹配可用以下算法求得：

二部图 $\langle X, E, Y\rangle$ 中 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$。设 M 为其任一匹配。用以下的步骤：

(i) 用 (*) 标记不与 M 中的任何边相交的 X 的所有结点。

(ii) 对 X 中新近标记的结点(用(*)或其它符号标记的)，比如 x_i，用 (x_i) 标记 Y 中的下列结点，它们由不在 M 中的边与 x_i 连接着，并且先前未被标记过。

(iii) 对 Y 中新近标记的结点(用 (x_i) 标记的)，比如 y_i，用 (y_i) 标记 X 中的下列结点，它们由 M 中的边与 y_i 连接着，并且先前未被标记过。

重复步骤(ii)，(iii)，直至

a) 标记到 Y 中一个不与 M 中任何边相交的结点。(情况 a) 也称为临界情况)

b) 不可能进一步标记，但又不是情况 a)。

对情况 a)，我们从 Y 中最后标记的一个不与 M 任何边相

交的结点出发，依标记回归到标记(*)的 X 中的一个结点，得到**一条关于 M 的交替链**(一条路径，它以不在 M 中的边开始并终止，其间 M 的边与非 M 的边交替出现。它可能不含 M 的边，这时它只有一条边)。取关于 M 的任意一交替链，并删除其中 M 的边，剩余边与 M 中留下的匹配边便组成比 M 多一边的新匹配 M'。对 M' 重新开始(i)。

对情况 b)，可断定原匹配 M 为最大匹配。(实例见题 9.19 及题 9.27)

4．二部图 $\langle X, E, Y\rangle$ 有完全匹配(有 $|X|$ 条边的匹配)，当且仅当相应的集合族有相异代表系，当且仅当对任意 $X_0\subseteq X$，有 $|X_0|\leqslant|Y_0|$，这里 Y_0 是以 X_0 为端点的边的另一端点的集合。

9-7 推广的 Hall 定理

1．设 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 为一集合的无限族，诸 A_i 为有穷集，那么 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 有相异代表系，当且仅当 Hall 条件成立(见 9.2)。

本定理用二部图的语言可叙述为：

2．设二部图 $\langle X, E, Y\rangle$ 中，X 的每个结点只与有限条边相交。那么存在匹配 M，使 X 中每一结点恰为 M 中一边的端点，当且仅当对于每个正整数 k，以及 X 的 k 个结点，Y 中至少连接其中一个结点的结点数不小于 k。

题解及评注

9.1 对下列每个集合族，确定一代表系；若不存在代表系，试说明理由。对相异代表系作相同的解答。

(a) $A_1=\{1, 2, 3\}$，$A_2=\{2, 3, 4\}$，$A_3=\varnothing$，$A_4=\{1\}$。

(b) $A_1=\{1, 2, 3\}$，$A_2=\{2, 3\}$，$A_3=\{4\}$，$A_5=\{1, 2\}$。

(c) $A_1=\{1, 2, 3\}$, $A_2=\{1, 2, 3\}$, $A_3=\{1, 2, 3\}$, $A_4=\{1, 2, 3\}$。

(d) $A_1=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_2=\{1, 3\}$, $A_3=\{1, 3\}$, $A_4=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_5=\{1, 3\}$。

解 (a) 不存在代表系，因而也不存在相异代表系，因为 $A_3=\varnothing$。

(b) 有代表系及相异代表系:

$$1, 3, 4, 2$$

(c) 有代表系 1, 2, 3, 3。但没有相异代表系，因为

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=3<4$$

(d) 有代表系 1, 1, 1, 1, 1, 但没有相异代表系，因为

$$|A_2\cup A_3\cup A_5|=2<3$$

9.2 试说出集合族 $A_1=\{1, 2\}$, $A_2=\{2, 3\}$, $A_3=\{3, 4\}$, $A_4=\{4, 5\}$, $A_5=\{5, 1\}$ 的不同相异代表系的个数。并对 n 个这样的集合的一般情况推广你的结论。

解 只有两个不同的相异代表系

$$1, 2, 3, 4, 5$$

$$2, 3, 4, 5, 1$$

当集合族为 $A_1=\{1, 2\}$, $A_2=\{2, 3\}$, $\cdots$, $A_{n-1}=\{n-1, n\}$, $A_n=\{n, 1\}$ 时，仍只有两个不同的相异代表系

$$1, 2, 3, \cdots, n-1, n$$

$$2, 3, 4, \cdots, n, 1$$

这是因为 A_1 中只有两个元素可选择，而对每一种选择，其它集合元素的选择方式便被确定了(只有唯一的可能)。

9.3 证明 Hall 定理——有限集合族 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 有相异代表系，当且仅当它们满足下列条件(Hall 条件):

对于每一个 $k=1, 2, \cdots, n$, 以及对任意选取的 i_1, i_2, $\cdots$,

$i_k(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$ 均有

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k$$

证　必要性是显然的，因若 $|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|<k$，则 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ 就将无相异代表系，因而 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 也不可能有相异代表系。以下证充分性，对 n 进行归纳。

$n=1$ 时，只有集合 A_1，而 $|A_1|\geqslant 1$ 时 A_1 非空，A_1 显然有相异代表系。

假设少于 n 个集合的集合族在满足 Hall 条件时均有相异代表系。现设 n 个集合的集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，它满足 Hall 条件。欲证它有相异代表系。

情况 1。若对 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的每一选取 $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，我们有 $|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k+1$。由于 Hall 条件得到满足，$A_n$ 不空，我们可选取 $l_n\in A_n$，作集合族 $A_1-\{l_n\}, A_2-\{l_n\}, \cdots, A_{n-1}-\{l_n\}$。于是，对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的任一选取 $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-1)$，我们有

$$\begin{aligned}&|(A_{i_1}-\{l_n\})\cup(A_{i_2}-\{l_n\})\cup\cdots\cup(A_{i_k}-\{l_n\})|\\ =&|(A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k})-\{l_n\}|\\ \geqslant&|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|-1\\ \geqslant&k+1-1=k\end{aligned}$$

这就是说，集合族 $A_1-\{l_n\}, A_2-\{l_n\}, \cdots, A_{n-1}-\{l_n\}$ 满足 Hall 条件。由归纳假设，知其有相异代表系，比如说 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$，那么集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 便有相异代表系 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}, l_n$。

情况 2。若情况 1 得不到满足，即对某整数 p, $1\leqslant p\leqslant n-1$ 和 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 的某一选取 $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n)$ 我们有 $|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_p}|=p$。为了简化记号，不妨设就是 $A_1, A_2, \cdots, A_p$ 有 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_p|=p$。$A_1, A_2, \cdots, A_p$ 满足 Hall 条

件，它应有相异代表系，比如说，$l_1, l_2, \cdots, l_p$。但

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p| = p,$$

故可断定 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p = \{l_1, l_2, \cdots, l_p\}$，记为 F。考虑集合族

$$A_{p+1} - F,\ A_{p+2} - F,\ \cdots,\ A_n - F$$

对 $1 \leqslant k \leqslant n-p$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 的任一选取（$p+1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$），我们有

$$\begin{aligned}
&|(A_{j_1} - F) \cup (A_{j_2} - F) \cup \cdots \cup (A_{j_k} - F)| \\
&= |(A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}) - F| \\
&= |(F \cup A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}) - F| \\
&= |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}) - F| \\
&= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_k}| - |F| \\
&\geqslant p + k - p = k (\text{因 } A_1, A_2, \cdots A_n \text{ 满足 Hall 条件})
\end{aligned}$$

因此，$A_{p+1} - F, A_{p+2} - F, \cdots, A_n - F$ 满足 Hall 条件，又 $n - p \leqslant n - 1$，根据归纳假设，它有相异代表系，比如说 $l_{p+1}, l_{p+2}, \cdots, l_p$。于是 $l_1, l_2, \cdots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \cdots, l_n$ 就是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的相异代表系。归纳完成，本题证毕。

9.4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限集合族，$r \leqslant n$ 是正整数。证明：

(a) 由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的 r 个集合组成的集合族有相异代表系，当且仅当满足下述条件：

对每一 $k = 1, 2, \cdots, n$，对 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的任一选取，$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，有

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \geqslant k - (n - r)$$

(b) 由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的 r 个集合组成的集合族有相异代表系统，这种 r 的最大值等于

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| + (n - k)$$

的最小值，这里$k=1, 2, \cdots, n$, $i_1, i_2, \cdots, i_k$为任意一种选取，使$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$。

证 (a) 设$F=\{f_1, f_2, \cdots, f_{n-r}\}$是一集合，与$A_1, A_2, \cdots, A_n$无公共元素，构造集合族

$$A_1\cup F,\ A_2\cup F,\ \cdots,\ A_n\cup F$$

我们首先证明，$A_1, A_2, \cdots, A_n$中的r个集合有相异代表系，当且仅当$A_1\cup F, A_2\cup F, \cdots, A_n\cup F$有相异代表系。

不妨假设$A_1, A_2, \cdots A_n$中的r个集合就是$A_1, A_2, \cdots, A_r$，它们的代表系是$l_1, l_2, \cdots, l_r$。那么$l_1, l_2, \cdots, l_r, f_1, f_2, \cdots, f_{n-r}$就是$A_1\cup F, A_2\cup F, \cdots, A_n\cup F$的相异代表系。反之，$l_1, l_2, \cdots, l_n$是$A_1\cup F, A_2\cup F, \cdots, A_n\cup F$的相异代表系，这$n$个元素中至多有$n-r$个元素取自$F$，于是，至少有$r$个元素取自$A_1, A_2, \cdots, A_n$中的$r$个集合。这说明$A_1, A_2, \cdots, A_n$中有$r$个集合具有相异代表系。

根据上题的结论，$A_1\cup F, A_2\cup F, \cdots, A_n\cup F$有相异代表系当且仅当对每一$k=1, 2, \cdots, n$和任一对$i_1, i_2, \cdots, i_k$的选取$(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$有

$$|(A_{i_1}\cup F)\cup(A_{i_2}\cup F)\cup\cdots\cup(A_{i_k}\cup F)|\geqslant k$$

但是

$$\begin{aligned}&|(A_{i_1}\cup F)\cup(A_{i_2}\cup F)\cup\cdots\cup(A_{i_k}\cup F)|\\&=|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|+|F|\\&=|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|+(n-r)\end{aligned}$$

由此，及本题一开始所证的结论可知，$A_1, A_2, \cdots, A_n$中有r个集合组成的集合族具有相异代表系，当且仅当对每一$k=1, 2, \cdots, n$，对任意$i_1, i_2, \cdots, i_k$的选取$(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$有

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|+(n-r)\geqslant k$$

即
$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k-(n-r)$$

(b) 从 (a) 得 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 r 个集合有相异代表系，当且仅当

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| + (n-k) \geqslant r$$

对 $k=1, 2, \cdots, n$ 的每一个值和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的每一选取 ($1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$) 都成立。因此，使这个不等式成立的最大 r 值就是

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| + (n-k)$$

的最小值。

评注 Hall 定理和本题 (Hall 定理的推广形式) 的证明，都有一个技巧，这就是如何构造出一个集合族，使得问题转化，以便对其运用已知条件和结论，或使归纳假设可以对其运用。这种证明技巧以后还会用到。

9.5 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族，且 $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = \{1, 2, \cdots, k-1\}$, $A_{k+1} = \cdots = A_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，这里 k 为正整数，$1 \leqslant k \leqslant n$。证明 Hall 条件中，所有可能的 $2^n - 1$ 个不等式中恰有一个不能成立。

证 显然不等式

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| \geqslant k$$

不能成立。以下证仅此一不等式不成立。即须证，对任何 $j = 1, 2, \cdots, n$ 及 $i_1, i_2, \cdots, i_j$ 的任何一种选择 ($i_1, i_2, \cdots, i_j$ 不是 $1, 2, \cdots, k$ 的置换) 总有

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_j}| \geqslant j$$

若 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_j}$ 中至少有一个是 A_{k+l} ($0 \leqslant l \leqslant n-k$)，那么 $|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_j}| = n \geqslant j$ 无疑。

若 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_j}$ 全取自 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，那么显然 $j < k$，(否则 $i_1, i_2, \cdots, i_j$ 为 $1, 2, \cdots, k$ 的一个置换)。于是

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_j}| = k-1 \geqslant j$$

命题得证。

9.6 对下列集合族的每一个，确定其中有相异代表系的集合的最大个数。

(a) $A_1=\{1, 2\}$, $A_2=\{3, 4\}$, $A_3=\{1, 2\}$, $A_4=\{1\}$, $A_5=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_6=\{1, 2\}$。

(b) $A_1=\{1, 2\}$, $A_2=\{2, 3\}$, $A_3=\{4, 5\}$, $A_4=\{2,3,4\}$, $A_5=\{1, 2, 3\}$, $A_6=\{1, 3\}$。

(c) $A_1=\{1, 2, 3\}$, $A_2=\{1, 2, 3\}$, $A_3=\{1, 2, 3\}$, $A_4=\{1, 2, 3\}$, $A_5=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_6=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

(d) $A_1=\{1, 2, 3\}$, $A_2=\{2, 3\}$, $A_3=\{2\}$, $A_4=\{4,5,6\}$, $A_5=\{1, 5\}$, $A_6=\{3, 6\}$。

解 (a) 最大个数是4。因为

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|+(n-k)$$

的最小值是 $$|A_1\cup A_3\cup A_4\cup A_6|+(6-4)=4$$

(b) 最大个数是5。因为

$$|A_1\cup A_2\cup A_5\cup A_6|+(6-4)=5$$

是最小值。

(c) 最大个数是5。

(d) 最大个数是6。

评注 求 $|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|+(n-k)$ 的最小值可采用以下观察法：先计算 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$，然后从中尝试去掉若干个（比如 l 个）集合，而使 l 的值小于基数 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$ 下跌的数目，即使 l 值小于 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 中被抽掉的元素数目。例如 (a)，$|A_1\cup\cdots\cup A_6|=5$，去掉 A_2，A_5 后可减少了三个元素：3, 4, 5。由于对留下的 A_1，A_3，A_4，A_6 不可重复上述做法了，因而可确定 $|A_1\cup A_3\cup A_4\cup A_6|+(6-4)=4$ 是最小值。

9.7 设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 为一集合族，并且有相异代表系。

设 x 至少是这些集合之一的元素，证明，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有一含有元素 x 的相异代表系。通过例子说明，一般地规定某个含有 x 的集合必须取 x 作代表则未必办得到。

证　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一个相异代表系是 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，如果其中有 x，那么命题得证。如果其中没有 x，不妨设 $x \in A_i$，那么只要将 l_i 换为 x 便可得到一个含 x 的相异代表系。

当 $A_1 = \{x\}$，$A_2 = \{l, x\}$ 时，A_1, A_2 有含 x 的相异代表系 x, l。但当规定含 x 的 A_2 必须取 x 作为代表时，则不可能找到 A_1, A_2 的相异代表系。

9.8　设集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一有相异代表系的集合族，设 $a_1, a_2, \cdots, a_t (t \leqslant n)$ 是 $A_1, \cdots, A_t$ 的相异代表系。证明：$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有一个包含 $a_1, a_2, \cdots, a_t$ 的相异代表系。

证　对 t 归纳。

$t=1$ 时命题成立，题 9.5 给出了证明。

设 $a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}$ 是 $A_1, \cdots, A_{t-1}$ 的相异代表系时我们有含 $a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}$ 的 $A_1, \cdots, A_n$ 的相异代表系。

现考虑 $a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}, a_t$ 是 $A_1, \cdots, A_{t-1}, A_t$ 的相异代表系，因而 $a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}$ 是 $A_1, \cdots, A_{t-1}$ 的相异代表系。据归纳假设，$A_1, \cdots, A_n$ 有相异代表系 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，其中包括 $a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}$，不妨设它们分别取自于 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_{t-1}}$。若 A_t 不在其中，则可改 l_t 为 a_t。若 A_t 在其中，则有一 $A_k (1 \leqslant k \leqslant t-1)$ 不在其中。设 A_t 为 A_{i_j}，将 a_j 换为 a_t，考虑 a_j 所在的 A_j。如果 $A_j = A_k$，可将 l_k 换为 $a_j (=a_k)$，即得一含 $a_1, a_2, \cdots, a_t$ 的 $A_1, \cdots, A_n$ 的相异代表系；如果 $A_j \neq A_k$，则对 A_j 作上述（对 A_t）的讨论。由于 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_{t-1}}$ 有穷，且上述过程每次涉及的 A_{i_j} 均不相同，故定会有 $A_j = A_k$，从而获得含 $a_1, a_2, \cdots, a_t$ 的 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的相异代表系。

本命题归纳证得。

9.9 设 A_1, A_2, …, A_n 是一集合族，使得对每一 $k=1$, 2, …, n 及任意选择的 i_1, i_2, …, $i_k(1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n)$,

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k+1$$

若 x 是 A_1 的任一元素，试证 A_1, A_2, …, A_n 有一个以 x 代表 A_1 的相异代表系，即含有形如 x, l_2, l_3, …, l_n 的相异代表系。

证 考虑集合族 $A_2-\{x\}$, $A_3-\{x\}$, …, $A_n-\{x\}$, 对任意 $k=1$, 2, …, $n-1$ 及 i_1, i_2, …, $i_k(2\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n)$ 有

$$\begin{aligned}&|A_{i_1}-\{x\}\cup A_{i_2}-\{x\}\cup\cdots\cup A_{i_k}-\{x\}|\\&=|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}-\{x\}|\\&\geqslant|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|-1\\&\geqslant k+1-1=k\end{aligned}$$

故该集合族有相异代表系，记为 l_2, l_3, …, l_n。显然 $l_i\neq x(i=2$, …, $n)$, 因此 x, l_2, l_3, …, l_n 是 A_1, A_2, …, A_n 的相异代表系。

评注 应该注意，这里 $A_i-\{x\}$, $i=2$, …, n, 非空，否则 $|A_i|=1<1+1=2$, 与题设不合。这一点在证明中是不必明说的，因为它蕴涵在不等式

$$|A_{i_1}-\{x\}\cup A_{i_2}-\{x\}\cup\cdots\cup A_{i_k}-\{x\}|\geqslant k$$

的证明当中了。

9.10 令 A_1, A_2, …, A_n 为一集合族，这里对所有 $i=1,2$, …, n, $A_i=\{1, 2, \cdots, m\}$。证明：A_1, A_2, …, A_n 有相异代表系当且仅当 $m\geqslant n$。如果 $m\geqslant n$, 证明不同的相异代表系的个数等于

$$P(m, n)=m(m-1)\cdots(m-n+1)$$

证 设 $m\geqslant n$。分别在 A_i 中取 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 便可构成一个相异代表系。

设 A_1, …, A_n 有相异代表系，那么

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|\geqslant n$$

而 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=|\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}|=m$，故 $m\geqslant n$。

当 $m\geqslant n$ 时，A_1 的代表元素恰有 m 种选法，而对其每一种，A_2 的代表元素恰有 $m-1$ 种选法，…，A_n 的代表元素恰有 $m-n+1$ 种选法。因此，不同相异代表系的总数应是

$$m(m-1)\cdots(m-n+1)=P(m,\ n)$$

9.11 设集合族 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 中，$A_1=\{2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$，$A_2=\{1,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n\}$，$A_3=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n\}$，…，$A_n=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$。证明，$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 有相异代表系，并且不同相异代表系的总数等于第 n 个错置数 D_n。

证　设 $i_1,\ \cdots,\ i_n$ 是 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 的一个错置，从而 $i\neq 1,\ i_2\neq 2,\ \cdots,\ i_n\neq n$，那么 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n$ 是 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 的相异代表系。因此，$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 的相异代表系至少有 D_n 个。

反之，若 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n$ 是 $A_1,\ A_2,\cdots,\ A_n$ 的相异代表系，那么 $i_1\neq 1,\ i_2\neq 2,\ \cdots,\ i_n\neq n$，即 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n$ 是 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 的一个错置。因此，$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 的相异代表系至多是 D_n 个。

综上所述，命题成立。

***9.12** 我们将集合族 $A_1,\ A_2,\cdots,A_n$ 的一部分(子族) $A_{i_1},\ \cdots,\ A_{i_r}$ 叫做一个**块**，记为 $B_{rs}=\{A_{i_1},\cdots,\ A_{i_r}\}$，其中 r 为集合个数，$s=|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_r}|$。当 $s=r$ 时，即 B_{rr}，称之为**边界块**。证明：当 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 有相异代表系时，两个边界块的交和并都是边界块，即对任意 $r,\ t,\ 1\leqslant r,\ t\leqslant n,\ B_{rr}\cup B_{tt},\ B_{rr}\cap B_{tt}$ 都是边界块。

证　设 $B_{rr}\cap B_{tt}=B_{uv}$，$B_{rr}\cup B_{tt}=B_{yz}$。首先，由于 $A_1,\ \cdots,\ A_n$ 有相异代表系，Hall 条件成立，因此

$$v\geqslant u,\quad z\geqslant y$$

另外，由于 $|B_{rr}\cup B_{tt}|=|B_{rr}|+|B_{tt}|-|B_{rr}\cap B_{tt}|$，因而 $r+t$

$u=y$。

设 $B_{rr}=\{A_{i_1}, \cdots, A_{i_r}\}$, $B_{tt}=\{A_{j_1}, \cdots, A_{j_t}\}$,

$B_{rr}\cap B_{tt}=\{A_{k1}, \cdots, A_{k_u}\}$, $B_{rr}\cup B_{tt}=\{A_{l1}, \cdots, A_{l_y}\}$

因而
$$|A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_r}|=r,\ |A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_t}|=t$$
$$|A_{k_1}\cup\cdots\cup A_{k_u}|=v$$
$$z=|A_{l_1}\cup\cdots\cup A_{l_y}|=|(A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_r})\cup(A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_t})|$$
$$=r+t-v'$$

而
$$v'=|(A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_r})\cap(A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_t})|$$
$$\geqslant|A_{k_1}\cup\cdots\cup A_{k_u}|=v$$

故 $z\leqslant r+t-v$。于是我们有
$$r+t-v\geqslant z\geqslant y=r+t-u\geqslant r+t-v\quad(\text{因 } v\geqslant u)$$
这就是说 $z=y$, $u=v$。也就是说 B_{uv} 与 B_{yz} 都是边界块。

***9.13** 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一有相异代表系的集合族，B_{kk} 为其一边界块。试证，从不在 B_{kk} 中的诸 A_i 中删去 B_{kk} 各集合中的元素后，所得子集族仍有相异代表系。

证 设任一块 B_{rs} 在删节后为 $B'_{r's'}$, 欲证本题，须证 $r'\leqslant s'$。因 $r'\leqslant r$, 可只证 $r\leqslant s'$。

令 $B_{rs}\cap B_{kk}=B_{uv}$, $B_{rs}\cup B_{kk}=B_{yz}$, 而
$$B_{rs}=\{C_1, \cdots, C_m, D_{m+1}, \cdots, D_r\}$$
$$B_{kk}=\{C_1, \cdots, C_m, E_{m+1}, \cdots, E_k\}$$
即 B_{rs}, B_{kk} 有公共部分 $C_1, \cdots, C_m$, $B_{uv}=\{C_1, \cdots, C_m\}$, $B_{yz}=\{C_1, \cdots, C_m, D_{m+1}, \cdots, D_r, E_{m+1}, \cdots, E_k\}$。那么 $B'_{r's'}$ 可表为 $\{C_1, C_2, \cdots, C_m, D'_{m+1}\cdots, D'_r\}$, 这里 D'_i 表示 D_i 在删除 B_{kk} 中集合的元素后所得的集合。

由于 $|C_1\cup\cdots\cup C_m|=|B_{rs}\cap B_{kk}|=v$, 且 $D_{m+1}, \cdots, D_r$ 中恰有 $z-k$ 个不在 B_{kk} 中的元素，即 $|D'_{m+1}\cup\cdots\cup D'_r|=z-k$, 故 $s'=v+z-k$(注意, $C_i\cap D'_j=\varnothing$, $1\leqslant i\leqslant m$, $m<j\leqslant r$)。另一方

面 $y=r+k-u$, $z\geqslant y$, $v\geqslant u$（这是因为对 A_1, …, A_n, Hall 条件成立）。因此

$$s'=v+z-k\geqslant u+y-k=r$$

评注 对块 B_{rs} 的讨论有助于对 Hall 定理的理解。有关相异代表系的习题的求解，常常取决于对 Hall 定理中 Hall 条件的正确理解。Hall 条件无疑是说，集合族 A_1, …, A_n 的每一块都有这样的性质，不同元素的总数多于块中集合数。这个条件对于相异代表系来说，必要性是明显的，因为集合族 A_1, …, A_n 要有相异代表系，那么它的任何一块 B_{rs} 也应有相异代表系，它应是 r 个元素，因此，这一块所有集合的不同元素总数 s 显然不能少于 r。

***9.14** 设集合族 A_1, A_2, …, A_n 有相异代表系。证明，该集合族中存在集合，例如 A_1，使其每一元素均在一相异代表系中代表 A_1。

证 若对每一 $k=1, 2, \cdots, n$, 及任意选择的 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ $(1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n)$ 有

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k+1$$

那么据题 9.9，本命题成立。

如果情况不是这样，那么必定存在 A_1, A_2, …, A_n 中的 k 个集合，它们的并集基数恰为 k（不能小于 k，因原集合族有相异代表系，满足 Hall 条件）。不妨设 k 为最小的一个，而这 k 个集合是 A_1, A_2, …, A_k。这就是说 A_1, A_2, …, A_k 是一个边界块，且其任何子族又非边界块（由 k 的最小性）。考虑 A_1 中的任一元素和两个集合族：

$$A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_k \tag{1}$$

$$A_2'=A_2-\{x\},\ A_3'=A_3-\{x\},\ \cdots,\ A_k'=A_k-\{x\} \tag{2}$$

对于集合族 (1)，任给 l 及任意的 $j_1, j_2, \cdots, j_l$ $(2\leqslant j_1<j_2$

$<\cdots<j_l\leqslant k$)，我们有

$$|A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_l}|\geqslant l+1\ \text{((1)式为非边界块)}$$

因此 $$|A_{j_1}-\{x\}\cup A_{j_2}-\{x\}\cup\cdots\cup A_{j_l}-\{x\}|\geqslant l$$

这就是说，对上述 l 及 $j_1, j_2, \cdots, j_l$

$$|A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_l}|\geqslant l$$

即集合族(2)满足 Hall 条件，它有相异代表系。例如$l_2, l_3, \cdots, l_k$。于是 $x, l_3, l_4, \cdots, l_k$ 是集合族(1)的相异代表系。

据题 9.13，从 $A_{k+1}, A_{k+2}, \cdots, A_n$ 中删去 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中全部元素后，所得集合族仍有相异代表系。此时相异代表系中 $A_{k+1}, A_{k+2}, \cdots, A_n$ 的代表元素决非 $x, l_3, l_4\cdots, l_k$，记它们为 $l_{k+1}, l_{k+2}, \cdots, l_n$。很明显，$x, l_2, l_3, \cdots, l_k, l_{k+1}, \cdots, l_n$ 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一个相异代表系。

至此，我们可以说，对 A_1 中任一元素 x，我们总有以 x 代表 A_1 的相异代表系。命题得证。

评注 注意本题与题 9.9 的区别。题 9.9 由于有

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k+1$$

(对任意 k，及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$) 的前提，它的结论更强。事实上，它断定 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任一集合都具有本题所指集合 A_1 的性质：其每一元素均在一相异代表系中代表之。

***9.15** 设集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有相异代表系，且在这些集合中元素最少的集合有 t 个成员。证明，当 $t\geqslant n$ 时，它至少有 $t(t-1)\cdots(t-n+1)$ 个相异代表系；当 $t<n$ 时，它至少有$t!$个相异代表系。

证 据题 9.14，可设对 A_1 中每一元素 x，都有以 x 代表 A_1 的相异代表系：$x, l_2, l_3, \cdots, l_n$。当然，这样的 x 至少有 t 个。考虑集合族

$$A_2-\{x\},\ A_3-\{x\},\ \cdots,\ A_n-\{x\}$$

记为 A_2', A_3', …, A_n', 它有相异代表系 $(l_2, l_3, \cdots, l_n)$。因此，又据题 9.14 可设对 A_2' 中每一元素 x', 都有以 x' 代表 A_2' 的相异代表系：x', l_2', l_3', …, l_n'。当然，这样的 x' 至少有 $t-1$ 个。如此讨论下去，可以看出，当 $t \geqslant n$ 时，A_1, …, A_n 的相异代表系的第一个元素至少有 t 种选择方式，第二个元素至少有 $t-1$ 种选择方式，…，第 n 个元素至少有 $t-n+1$ 种选择方式，即至少共有相异代表系 $t(t-1)\cdots(t-n+1)$ 个。当 $t<n$ 时，第一个元素仍至少有 t 种选择方式，第二个元素仍至少有 $t-1$ 种选择方式，…，而第 t 个元素至少有一种选择方式。据题 9.14，不难明白，第 $t+1$ 个，…，第 n 个元素均至少有一种选择方式(因为可证 $A_t^{(t-1)}$, $A_{t+1}^{(t-1)}$, …, $A_n^{(t-1)}$ 有相异代表系，这里 $(t-1)$ 表示角标 $t-1$ 撇)。因此，这时至少共有 $t!$ 个相异代表系。

评注 本题第二部分可以这样直观地分析，当集合族 A_1, A_2, …, A_n 中每一集合均为 1, 2, 3, … 的一个初段，即 $A_i=\{1, 2, 3, , \cdots l_i\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，而具有 t 个元素的最小集合全为 $\{1, 2, 3, \cdots, t\}$，这样的集合至多 t 个（否则原集合族无相异代表系）。假定这样的集合恰有 t 个，例如 A_1, A_2, …, $_t$, 那么这 t 个集合的集合族恰有 $t!$ 个相异代表系。设 l_1, l_2, …, l_n 是集合族 A_1, A_2, …, A_n 的相异代表系，那么 l_{t+1}, …, l_n 均非 $\{1, 2, \cdots, t\}$ 中成员。因此，A_1, …, A_t 的任一相异代表系 l_1', l_2', …, l_t' 连同 l_{t+1}, …, l_n 均构成 A_1, A_2, …, A_n 的相异代表系，这就是说，A_1, A_2, …, A_n 至少有 $t!$ 个相异代表系。由于上述讨论中对 A_1, A_2, …, A_n 的限定，使得它在具有相异代表系方面是"最坏"的。因此，对一般满足题设的集合族 A_1, A_2, …, A_n 也至少有 $t!$ 个相异代表系。

本题的第一部分其实是较易证明的，读者不妨对方才评注中的特殊情况，自行作出证明。

Hall 定理有许多应用，以下的问题可以说是 Hall 定理应用的例子。

9.16 图 9.3 给出一残缺棋盘（阴影部分表示残缺的部分）。试构造一集合族，使得该集合族有相异代表系统当且仅当棋盘有一多米诺骨牌的完全覆盖。找出一个相异代表系和对应的完全覆盖。

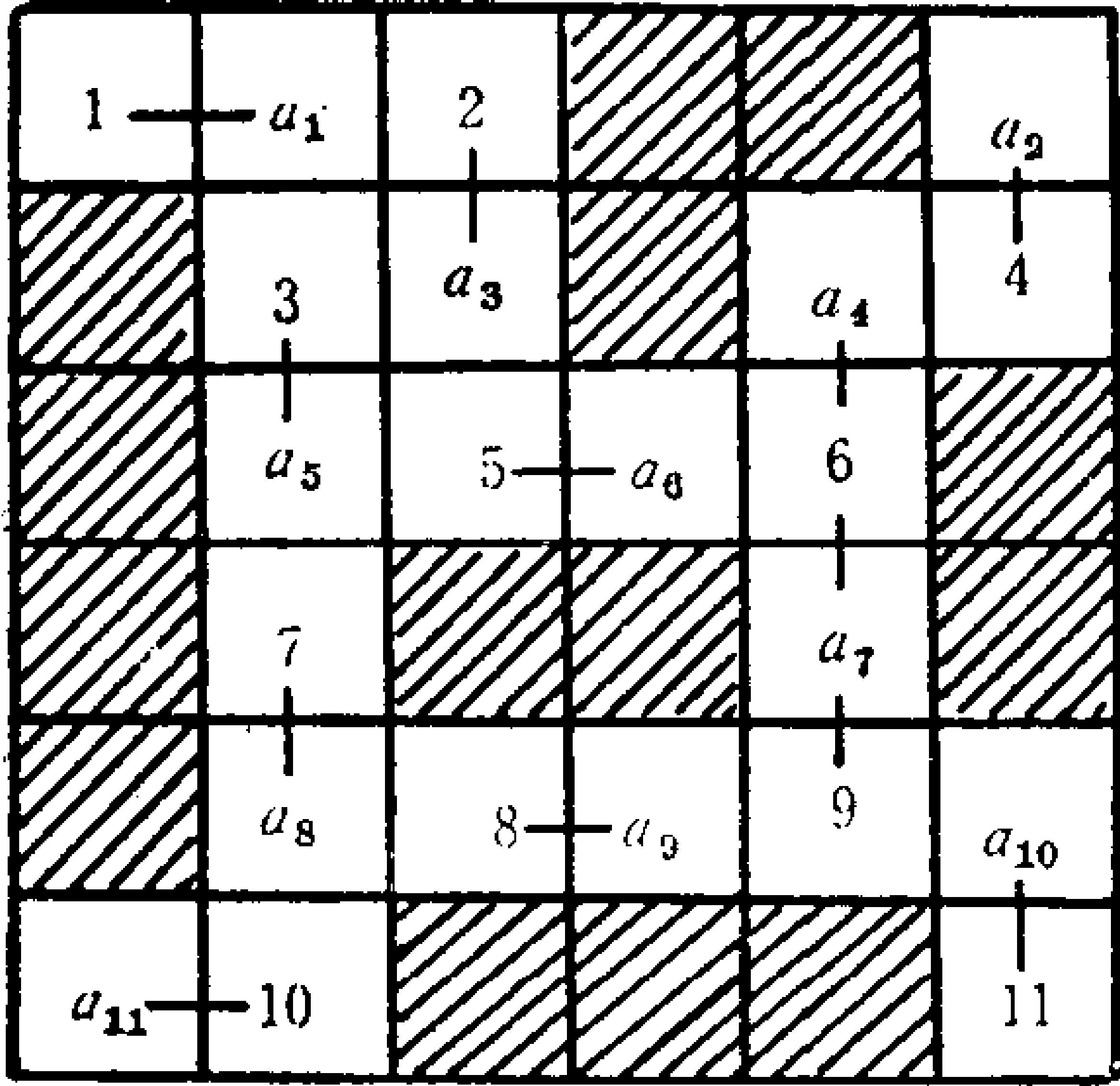


图 9.3

解 如图，给残缺棋盘的黑白方格分别地标记 1，2，…，11 和 a_1，a_2，…，a_{11}。构作一集合族，使得 $A_i=\{a \mid$ 标记 a 的方格与 i 相邻$\}$：

$A_1=\{a_1\}$，　$A_2=\{a_1, a_3\}$，　$A_3=\{a_1, a_3, a_5\}$

$A_4=\{a_2, a_4\}$，　$A_5=\{a_3, a_5, a_6\}$，　$A_6=\{a_4, a_6, a_7\}$

$A_7=\{a_5, a_8\}$，　$A_8=\{a_8, a_9\}$，　$A_9=\{a_7, a_9, a_{10}\}$

$A_{10}=\{a_8, a_{11}\}$，　$A_{11}=\{a_{10}\}$

当残缺棋盘可以用多米诺骨牌完全覆盖，那么十一块骨牌必定依次覆盖

$$\{1, a_{i_1}\}, \{2, a_{i_2}\}, \cdots, \{11, a_{i_{11}}\} \quad (a_{i_j} \in A_j)$$

因而集合族 A_1，…，A_{11} 有相异代表系 a_{i_1}，…，$a_{i_{11}}$。反之，则必可用十一块骨牌依次覆盖 $\{1, a_{i_1}\}$，$\{2, a_{i_2}\}$，…，$\{11, a_{i_{11}}\}$，从而覆盖整个残缺棋盘。

上述集合族 A_1，…，A_{11} 有相异代表系：

$$a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_2,\ a_6,\ a_4,\ a_8,\ a_9,\ a_7,\ a_{11},\ a_{10}$$

相应的覆盖方式如图所示（跨格的横线表示覆盖这两个方格的

一块多米诺骨牌)。

9.17 设 B 和 W 分别表示残缺棋盘黑白方格的集合，对黑方格集合的每一个子集 A, $W(A)$表示至少和 A 中的一个黑方格相邻的白方格集合。试证，一个多米诺骨牌的完全覆盖存在，当且仅当 $|B|=|W|$，并且 $|W(A)|\geqslant|A|$(对每一 $A\subseteq B$)。

证 若有完全覆盖，设 n 块骨牌分别覆盖 $\{b_1, w_1\}$, $\{b_2, w_2\}$, $\cdots$, $\{b_n, w_n\}$(这里 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为黑方格标记，$w_1, w_2, \cdots, w_n$ 为白方格标记)。显然 $|B|=|W|=n$。考虑集合族 $W(\{b_1\})$, $W(\{b_2\})$, $\cdots$, $W(\{b_n\})$，它有相异代表系 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，因此满足 Hall 条件，对任意 k 及 $i_1, i_2, \cdots, i_k$,

$$|W(\{b_{i_1}\})\cup W(\{b_{i_2}\})\cup\cdots\cup W(\{b_{i_k}\})|\geqslant k$$

即对任何 $A\subseteq B$, $|W(A)|\geqslant|A|$。

反之，在 $|B|=|W|$ 且 $|W(A)|\geqslant|A|$ (对任一 $A\subseteq B$) 条件下，易证残缺棋盘有完全覆盖，读者自行完成。读者还可自行验证，题 9.15 中的残缺棋盘满足 $|B|=|W|$ 且 $|W(A)|\geqslant|A|$ (对任一 $A\subseteq B$) 这一条件。

9.18 在 $m\times n$ 棋盘中，m, n 都是奇数。黑白方格象国际象棋棋盘那样相间放置，且白方格比黑方格多一块。证明：如果恰有一个白方格被挖去，则所得图形是用多米诺骨牌可完全覆盖的。

证 对 m 归纳。

首先我们注意，由于白方格多一个，因此在奇数行，白方格全在奇数列上。

$m=1$ 时，由于挖去了第奇数个白方格，因此留下两个(或一个)偶数长的单行矩形残缺棋盘，它们无疑是可以完全覆盖的。

设 $m\leqslant 2k-1$ 时，题设棋盘是可用多米诺骨牌完全覆盖的。当 $m=2k+1$ 时，有两种可能：

(1) 挖掉的白方格处于偶数行，则把棋盘划成如图 9.4(a) 所示的四部分。①④ 两部分据归纳假设可完全覆盖。因为挖掉的一格是白格(偶行的白格必处于偶数列上——读者思考)，挖掉白格的两端必为奇数格，连同上行或下行的一格，②③两部分也可完全覆盖。

(2) 挖掉的白方格处于奇数行，则可把棋盘分成两部分：一部分是不包含挖去的白方格的 $m'\times n$ 棋盘，m' 是偶数，显然可以完全覆盖；另一部分是包含挖去的白方格的 $m''\times n$ 棋盘，m'' 是奇数，(如图 9.4(b) 所示) 据归纳假设它是可以完全覆盖的。

归纳完成，命题得证。

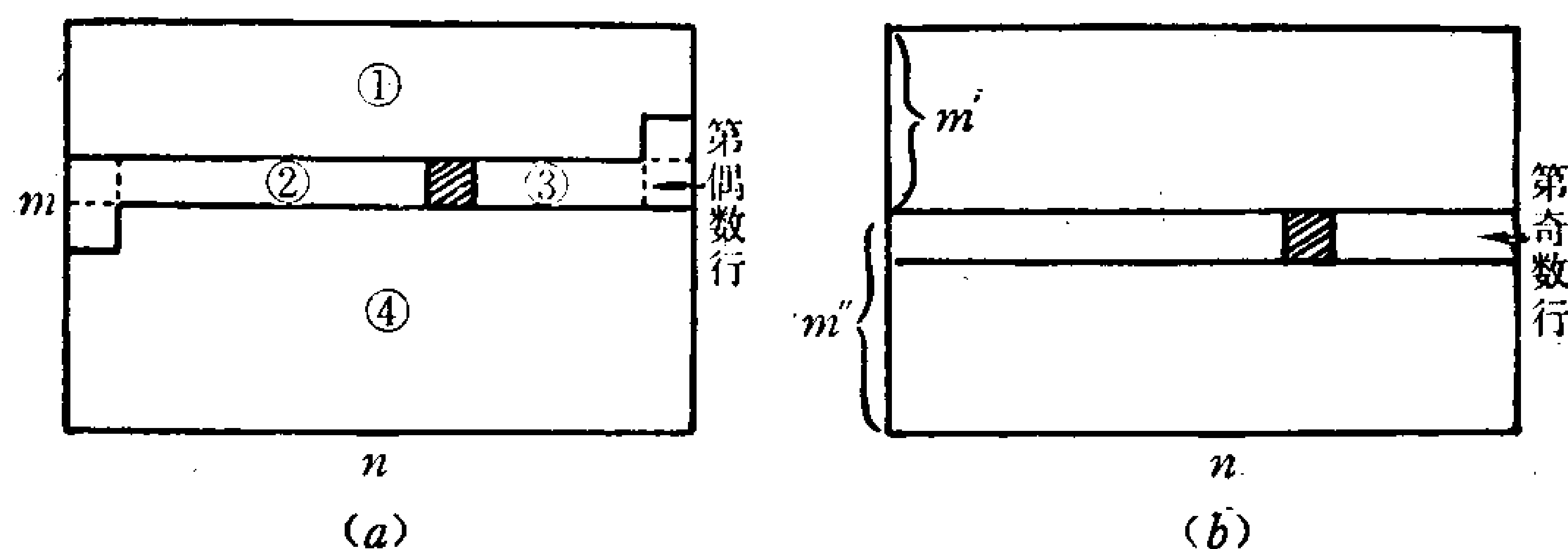


图 9.4 (阴影部分表示挖去的白方格)

评注 本题使用了第二归纳法，比起用穷举法(分各种情况讨论的方法)，它要简捷得多。

9.19 在 $m\times n$ 棋盘中，m 和 n 中至少有一为偶数。黑白方格象棋盘那样相间放置。证明：不管怎样挖去一个白格和一个黑格，所得的残缺棋盘总是用多米诺骨牌可完全覆盖的。

证 参见题1.21。由于 m, n 中至少有一为偶数，我们总可象题1.21之图1.15所示的那样作出一个“迷宫”(以偶数边为底边)，从而证明同题1.21。

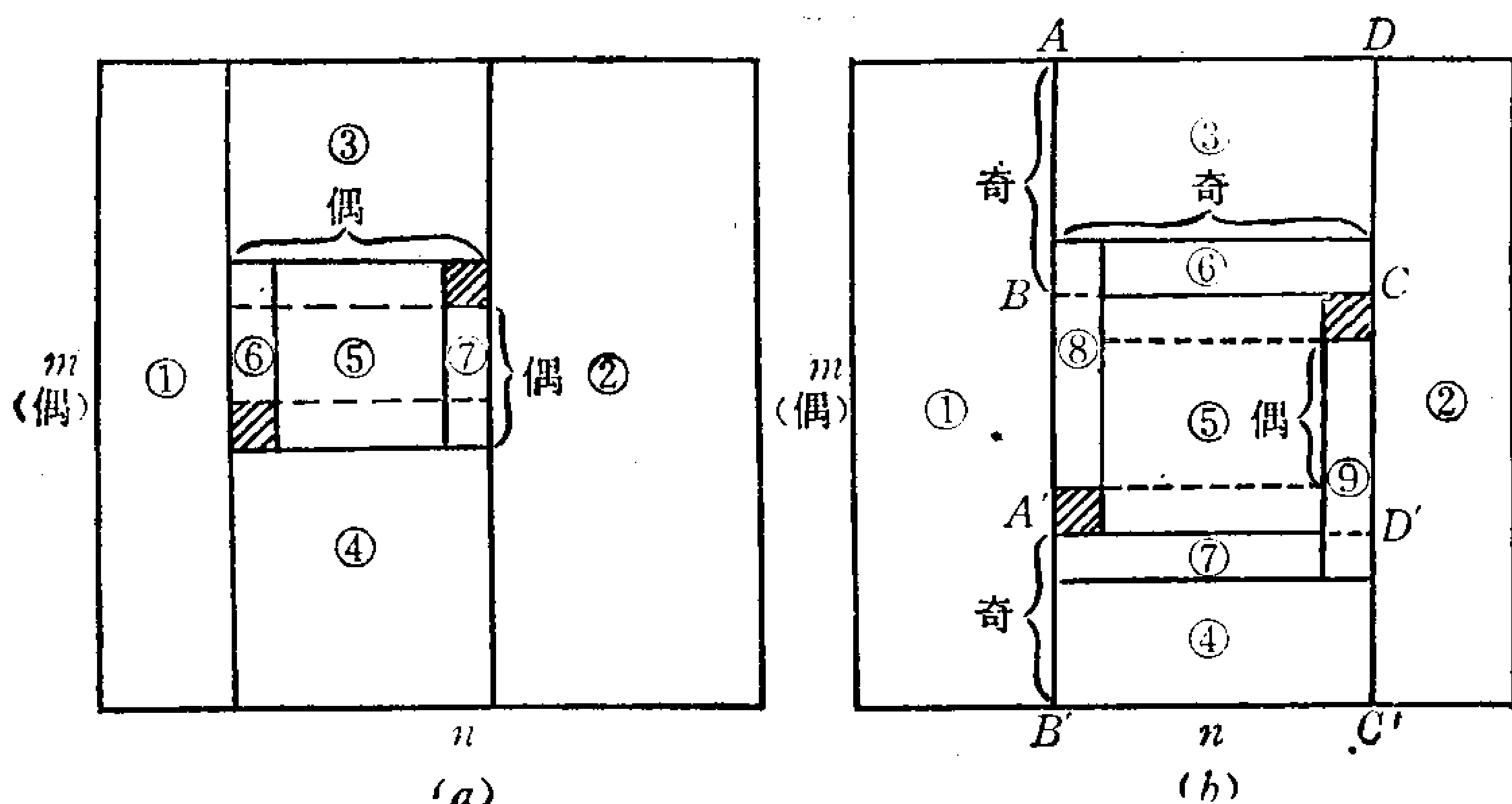


图 9.5

为拓宽思路，另外给出证法如下。

由于挖去的两方格是一黑一白，因此或者它们之间有偶数列奇数行，或者它们之间有偶数行奇数列。分别对两种情况进行讨论（分别在图 9.5(*a*)(*b*) 中表出）。

图 9.5(*a*) 所示情况，挖两方格后的残缺棋盘可分成 7 个一边为偶数的矩形，它们都是可完全覆盖的，因此整个残缺棋盘是可完全覆盖的。

图 9.5(*b*) 所示情况，AB 和 $A'B'$ 的奇偶性是相同的（因它们之和为偶数）。如 AB, $A'B'$ 同偶，侧可类似于 (*a*) 情况作出完全覆盖。如 AB, $A'B'$ 同奇（图 9.5(*b*) 所示）则可用图中所示的矩形来分割残缺棋盘，它们都有一边是偶数，因而都是可完全覆盖的。

评注　应用题 9.16 的结论证明题 9.17, 9.18, 即证明 $|B| = |W|$ 且 $|W(A)| \geqslant |A|$（对每一 $A \subseteq B$），或证明在题 9.18, 9.19 的残缺棋盘中，每一组白方格其数目总不多于它们所相邻的黑方格的数目。反之，每一组黑方格其数目也总不多于它们

所相邻的白方格的数，从而断定它们可用多米诺骨牌完全覆盖，也是可以的。但是笔者觉得证明的过程仍然要比我们的第一证明来得繁琐，甚至不比我们的第二个证明简明。

9.20 构造与题 9.13 中残缺棋盘(图 9.3) 有关的二部图，确定对应于那里求出的完全覆盖的匹配。

解 相应的二部图如图 9.6 所示，图中的粗直线表示对应于完全覆盖的匹配。

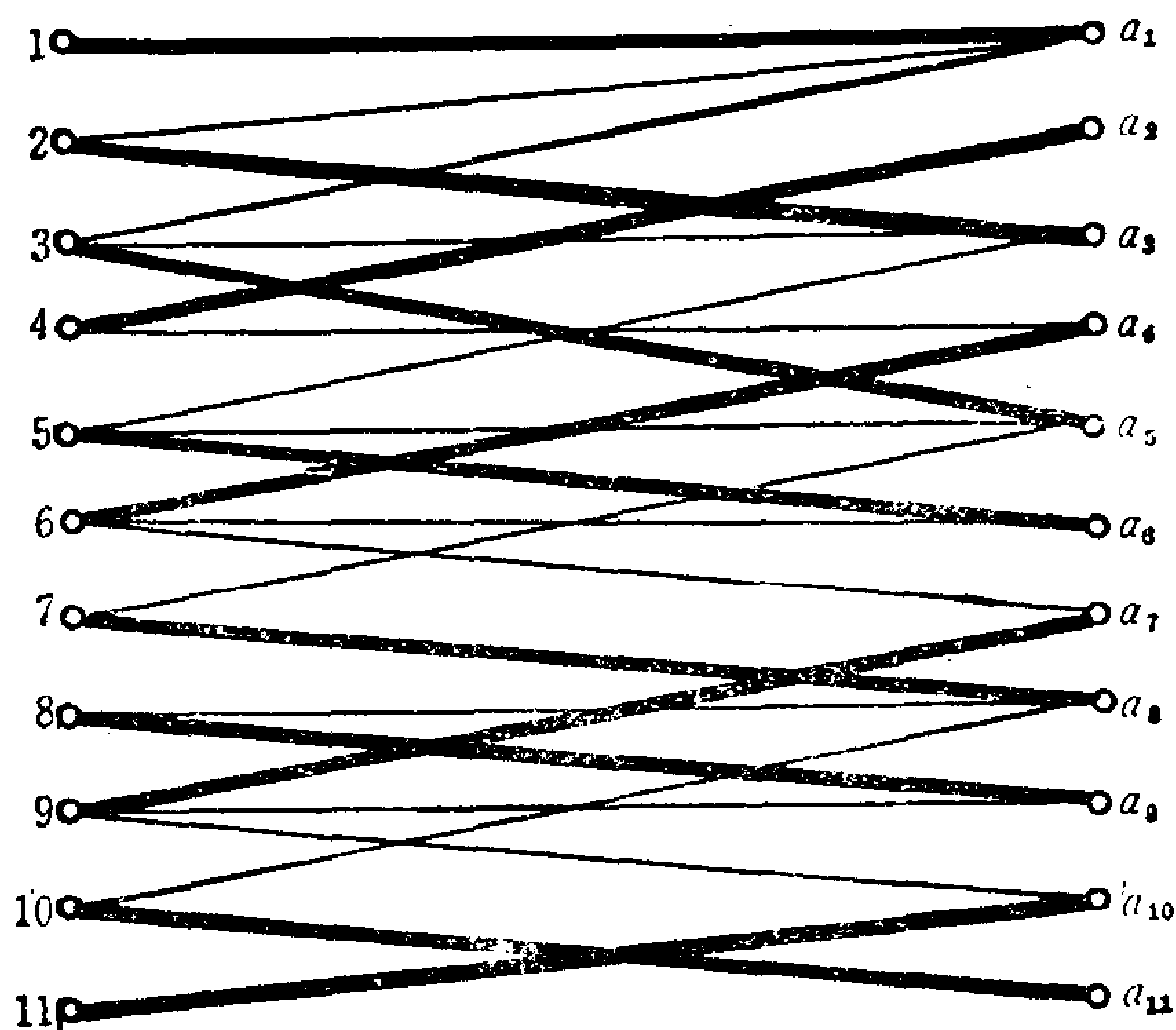


图 9.6

9.21 构造对应于图 9.7 中二部图的集合族，确定含有其中四个集合且有相异代表系的集合族。

解 对应于图 9.7 中偶图的集合族:

$$A_1=\{a,\ b,\ e\},\ A_2=\{b,\ c,\ d\},\ A_3=\{e\}$$

$$A_4=\{e,\ f\},\ A_5=\{e,\ f\}$$

含其中四个集合且有相异代表系的集合族有

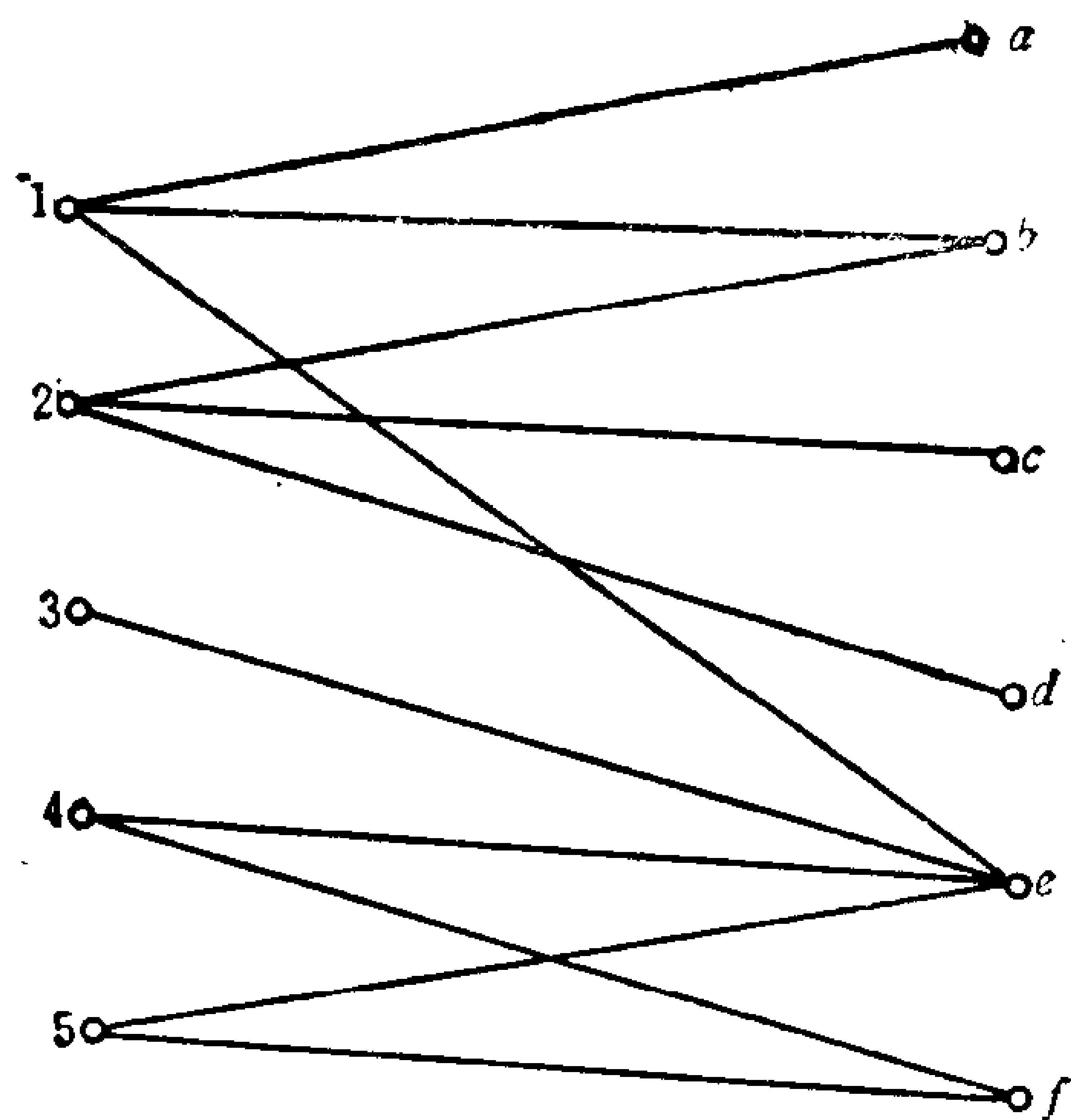


图 9.7

1) A_1, A_2, A_3, A_4

2) A_1, A_2, A_3, A_5

3) A_1, A_2, A_4, A_5

(注意 $|A_3\cup A_4\cup A_5|=2<3$, 集合族中不能同时有 A_3, A_4, A_5)

9.22 考虑图9.8中的偶图。证明最大匹配的边数是3。证明匹配 $M=\{[x_1, y_1], [x_2, y_2]\}$ 不能扩大为由3条边组成

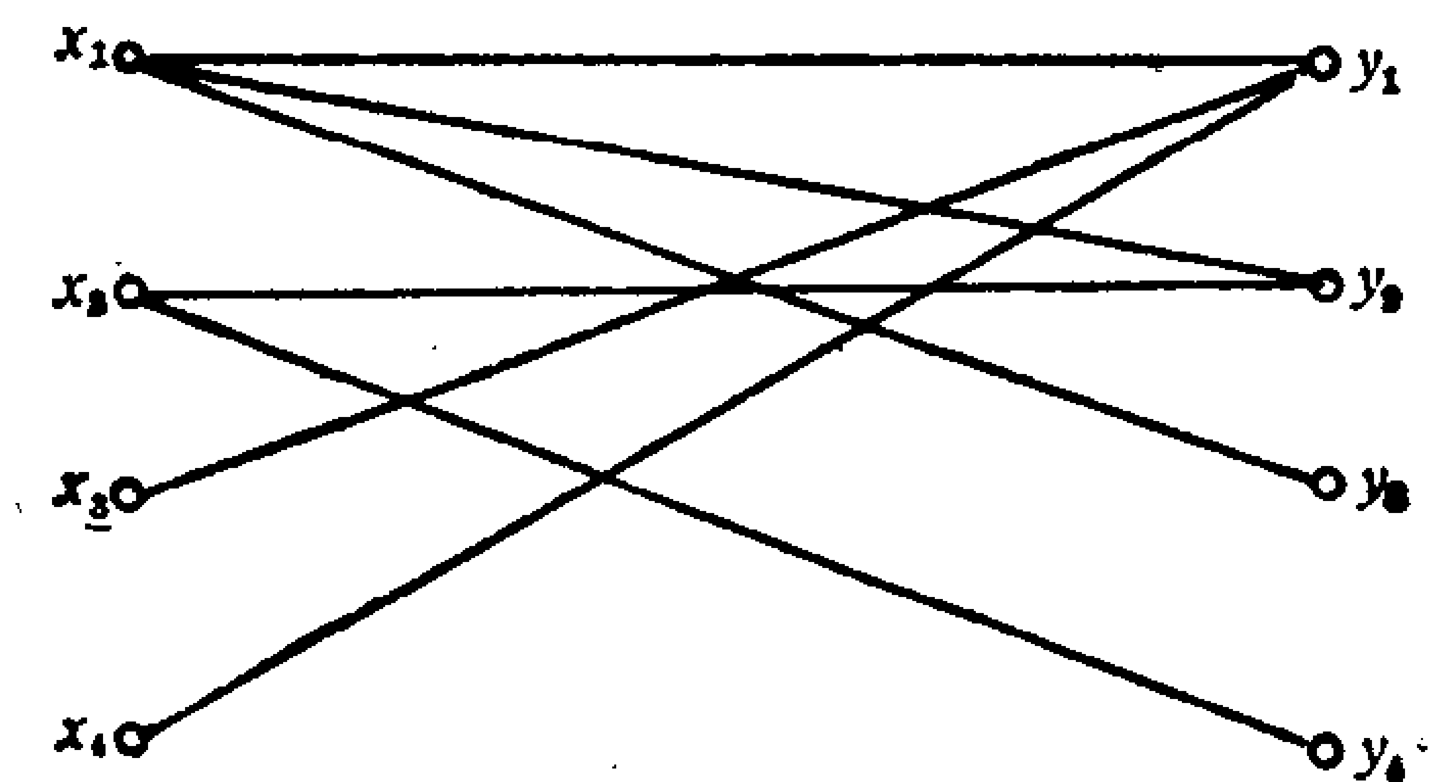


图 9.8

的一个匹配。找出一个关于匹配 M 的交替链，并用它去修改 M 以得出 3 条边的一个匹配。

证 首先，偶图有 3 条边的匹配

$$\{[x_1, y_3], [x_2, y_2], [x_3, y_1]\}$$

其次，由于 x_3, x_4 都只与 y_1 相联结，因此匹配中不可能同时含有 x_3, x_4。故偶图最大匹配的边数是 3。

匹配 M 不能扩大为边数为 3 的匹配是显然的，因为 x_3, x_4 只与 y_1 相联结，而 y_1 已在 M 中出现。

关于 M 的交替链如图 9.9 作出，图中各边隐去，只标出匹配 M；虚线表示交替链，粗直线表示修改 M 得出的 3 条边的匹配 $\{[x_1, y_2], [x_2, y_4], [x_3, y_1]\}$。

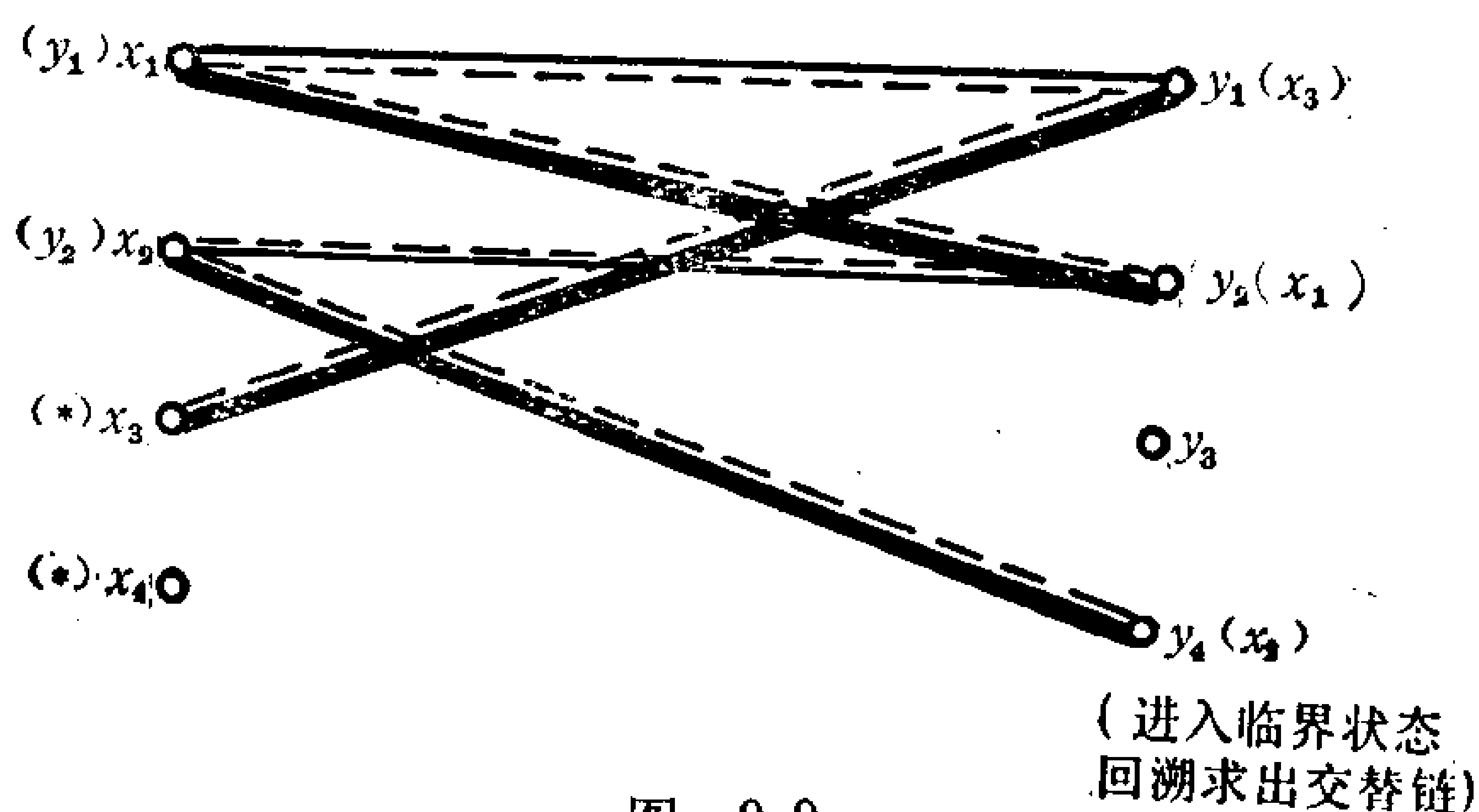


图 9.9

9.23 证明：二部图 $\langle X, E, Y\rangle$ 的最大匹配的边数等于最小覆盖集的结点数。

证 设 α 是最大匹配边数，β 是最小覆盖集结点数，我们需要证明 $\alpha=\beta$。

先证 $\alpha\leqslant\beta$。设 M 是最大匹配，S 是最小覆盖集。由于 M 中的边无相交者，而每条边至少有一个端点属于 S，根据鸽笼原理，$\alpha\leqslant\beta$。

再证 $\alpha \geqslant \beta$。假定 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$，构造集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，使 $A_i=\{y \mid (i, y) \in E\}(i=1, 2, \cdots, n)$。$M$ 中的边数，就是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中有相异代表系的集合的最多个数。因此，根据提要 9-3，有一整数 k 和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的某一选取，$1 \leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k \leqslant n$，使得

$$\alpha=\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right|+n-k$$

考虑集合 $T=A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k} \cup\{i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_n\}$ 这里 $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_n\}=X-\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$，它有 $n-k$ 个元素，所以 $|T|=\alpha$。现证明 T 是覆盖集。设 $(x, y) \in E$，若 (x, y) 的一端在 $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_n\}$ 中，则这条边已被覆盖。若 (x, y) 一端不在 $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_n\}$ 中，则一定在 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 中，于是其另一端在 $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}$ 中，于是 (x, y) 也被 T 覆盖。这就是说 T 是覆盖集。由于 S 是最小覆盖集，故 $\beta=|S| \leqslant|T|=\alpha$。本命题证毕。

评注 回忆题 9.4 的评注，本题的关键又是构造满足 Hall 条件的集合族。本题的另一个困难是覆盖集 T 的构造。构造常可用来证明“存在性”，这里用以证明最小覆盖集基数至多是 α，因为存在基数是 α 的覆盖集。

***9.24** 设 A 为一零么矩阵(即各分量为 0，1 的矩阵，也称 (0, 1) 矩阵)。证明：A 中能包含所有 1 的行和列的数目的最小值，等于抹去一些 1 使得没有两个 1 在同一行、同一列后余下的 1 的数目的最大值。

证 为了弄清题意，我们先看一个例子。

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

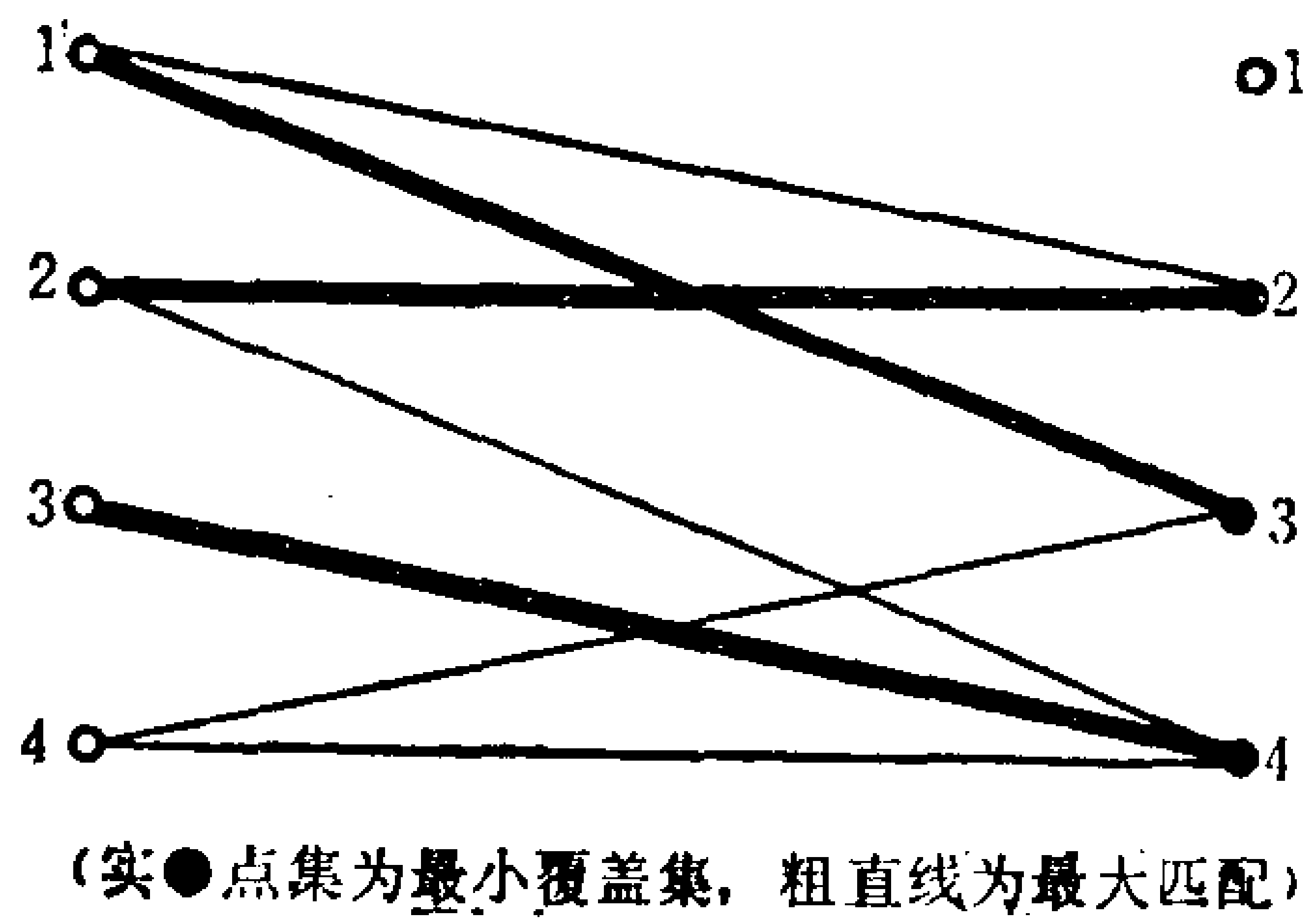
它的能包含所有 1 的行和列数目的最小值是 3（后三列含所有 1）。它在抹去一些 1，而使得没有两个 1 在同一行同一列后，最多余下 3 个 1(见 A')

$$A'=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

现设 A 为一 $m\times n(0,\ 1)$ 矩阵，对 A 构作偶图 $\langle X,\ E,\ Y\rangle$（如图 9.10，仍以上述 A 为例）；

$$X=\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\},\ Y=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

$(i,\ j)\in E$（i 与 j 有边相联结）当且仅当 $a_{ij}=1$。那么，能包含所有 1 的行和列的最小数目就等于二部图的最小覆盖集的结点数；而适当抹去若干 1 后余下的没有两个同行、没有两个同列的 1 的数目的则等于二部图的最大匹配的边数。据内容提要 9-6 之 2，最大匹配的边数等于最小覆盖集的结点数，因此命题得证。



（实●点集为最小覆盖集，粗直线为最大匹配）

图 9.10

评注 相异代表系存在定理（Hall 定理）和二部图有关性质的应用的一个关键点，是如何把问题转化为集合族和二部图的表述形式。本题是 (0, 1) 矩阵，用二部图来描述是相当自然的。这里又一次用到模式化归的解题方法。

9.25 设 M 是二部图的一个匹配，S 是 M 中各边的端点的集合。证明下述命题是等价的。

(i) 没有匹配 M' 包含 M 且 $|M'|>|M|$。

(ii) S 为二部图的覆盖集。

(iii) 没有长为 1 的关于 M 的交替链 (参见内容提要 9-6 之 3)。

证 (i)⇒(ii)

若有边 $l(l\notin M)$ 的两个端点全不在 S 中，则 $M\cup\{l\}$ 为一匹配，且包含 M，满足 $|M\cup\{l\}|>|M|$，与(i)冲突。

(ii)⇒(iii)

若有长为 1 的关于 M 的交替链 $\{l\}$，那么 $\{l\}$ 的两个端点都不是 M 中边的端点，它们不在 S 中，与(ii) S 是覆盖集冲突。

(iii)⇒(i)

若有 $M'\supseteq M$，$|M'|>M$，则必有 $l\in M'$ 但 $l\notin M$。又由于 M' 为匹配，故 l 的两端点全不是 M 中边的端点，因此 l 是一边长为 1 的关于 M 的交替链，与(iii)冲突。

9.26 设 $\langle X_0, E_0, Y_0\rangle$ 为二部图。假定有一正整数 P，使得 X_0 中每一结点至少联接 P 条边，而 Y_0 中每一结点至多联接 P 条边，证明 $|X_0|\leqslant|Y_0|$。

证 二部图边数 $|E|$ 显然满足

$$|X_0|\cdot P\leqslant|E|,\ |E|\leqslant|Y_0|\cdot P$$

故 $|X_0|\cdot P\leqslant|Y_0|\cdot P$，即 $|X_0|\leqslant|Y_0|$。

9.27 设 $\langle X, E, Y\rangle$ 为二部图，使得 X 含有 m 个结点而 Y 含有 n 个结点。假定有一正整数 P 使得 X 的每一结点至少联结 P 条边，而 Y 的每一结点至多联结 P 条边。证明二部图有 m 条边的匹配，它是一个最大匹配。从而证明二部图的覆盖集都不少于 m 个结点。

证 据题 9.26，$m\leqslant n$。

考虑任意 $X_0\subseteq X$，令 $E(X_0)$表示与 X_0 中结点相交的边的

条数，那么 $|E(X_0)|\geqslant|X_0|\cdot P$，$\frac{|E(X_0)|}{P}\geqslant|X_0|$。

另一方面，Y 中每一结点至多联接 P 条边，因此与 $E(X_0)$ 中边相联接的 Y 的顶点集 Y_0 中的顶点数 $|Y_0|$ 满足

$$|Y_0|\geqslant\frac{|E(X_0)|}{P}\geqslant|X_0|$$

据内容提要 9-6 之 4，该二部图有完全匹配，即含 m 条边的匹配，它是最大匹配，因为 $m\leqslant n$。又据内容提要 9-6 之 2，最小覆盖集有 m 个结点，因而该二部图所有覆盖集都至少有 m 个结点。

9.28 在一次聚会中有 n 个男孩和 n 个女孩。假定有一个正整数 P，使得每一男孩恰好与 P 个女孩相识，而每一女孩恰好与 P 个男孩相识。证明：男孩女孩能够配对起舞，使得每一对舞伴是互相认识的。

证　设 X 为 n 个男孩的集合，Y 为 n 个女孩的集合。建立二部图 (X, E, Y)，$(x, y)\in E(x, y$ 有边联结)，当且仅当 x 与 y 互相认识。据题 9.27，该二部图有一完全的匹配。这就是说，男孩和女孩能配对起舞，使每一对舞伴互相认识。

评注　题 1.37 也可用本题的方法，只需几句话便说得一清二楚，但那时我们尚无相异代表系和二部图匹配的概念，只好借助于直觉来论证。

9.29 找出在集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ 中有相异代表系的集合的最大数目。

$A_1=\{1, 8, 10, 13\}$；　$A_2=\{5, 8\}$

$A_3=\{2, 3, 4, 11, 12\}$；　$A_4=\{10, 13\}$

$A_5=\{1, 5, 8\}$；　$A_6=\{1, 4, 5, 7, 11\}$

$A_7=\{8, 13\}$；　$A_8=\{5, 6, 10, 13\}$

$$A_9=\{5, 8, 10, 13\};\quad A_{10}=\{1, 5, 8, 10, 13\}$$

解 本题用内容提要 9-3 之 2 来凑未必方便。还可建立二部图，用内容提要 9-6 之 3 提供的算法求出最大匹配

建立二部图 $\langle X, E, X\rangle$，$X=\{1, 2, 3, \cdots, 13\}$，$iEj$ (i 与 j 有边相连)当且仅当 $j\in A_i$。显然，它的最大匹配恰好给出了 $A_1, A_2, \cdots, A_{13}$ 中若干个（最多个数）集合的相异代表系。因此最大匹配中边数即为所求。

细节留给读者，答案是 8。算法的跟踪可参阅题 9.31。

9.30 某公司有 7 个职位空缺 $p_1, p_2, \cdots, p_7$。现有 10 个申请者 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$。适合于 a_i 的职位分别列于集合 A_i 中 ($i=1, 2, \cdots, 10$)：

$$\begin{aligned}
&A_1=\{p_1, p_5, p_6\}; && A_3=\{p_2, p_5, p_7\}\\
&A_3=\{p_3, p_4\}; && A_4=\{p_1, p_5\}\\
&A_5=\{p_6, p_7\}; && A_6=\{p_3\}\\
&A_7=\{p_2, p_3\}; && A_8=\{p_1, p_3\}\\
&A_9=\{p_1\}; && A_{10}=\{p_5\}
\end{aligned}$$

试确定可由合适申请者填补的职位最多几个。

解 建立二部图 $\langle X, E, Y\rangle$，使 $X=\{a_1, \cdots, a_{10}\}$，$Y=\{p_1, p_2, \cdots, p_7\}$，并且对 $1\leqslant i\leqslant 10$，$1\leqslant j\leqslant 7$。

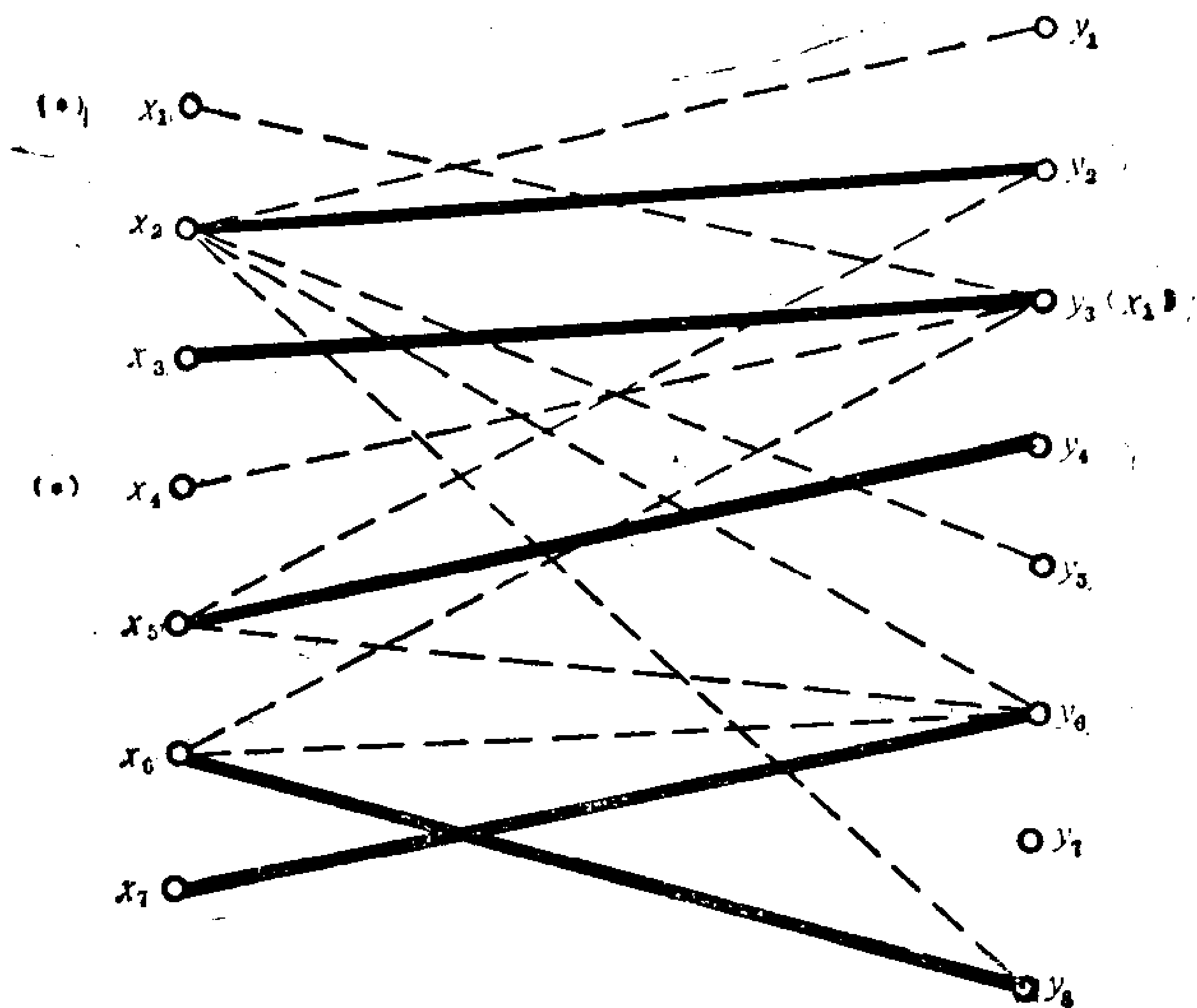
$(a_i, p_j)\in E$ (a_i 与 p_j 有边相连) 当且仅当 $p_j\in A_i$ 此二部图的最大匹配的边数即为所求。

细节仍留给读者。答案是 7。

评注 9.29, 9.30 两题都可用内容提要 9-3 之 2，计算 $|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|+(n-k)$ 最小值的方法来解。它们分别有解

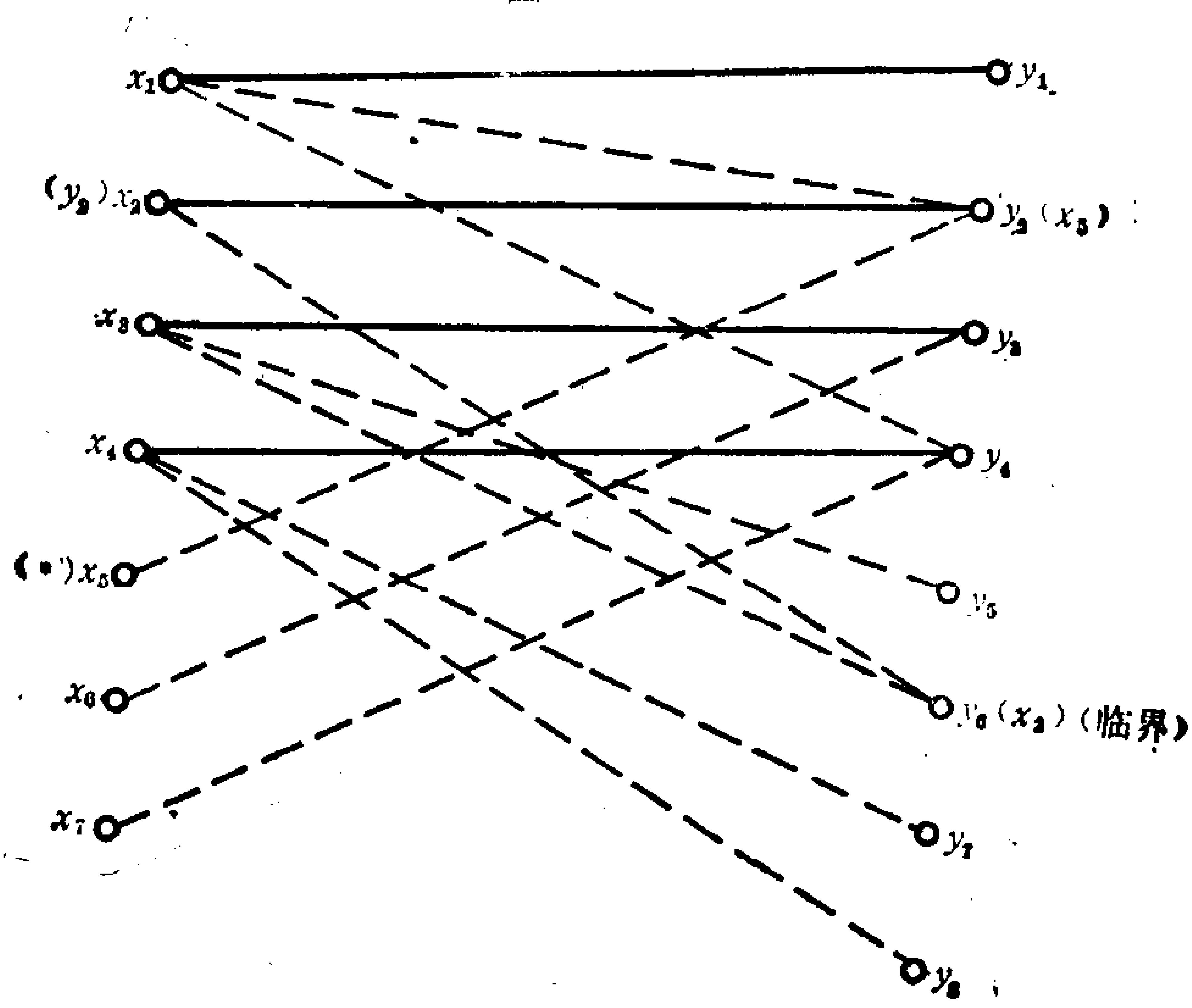
$$|A_1\cup A_2\cup A_4\cup A_5\cup A_7\cup A_9\cup A_{10}|+(10-7)=8$$

$$|A_4\cup A_6\cup A_8\cup A_9\cup A_{10}|+(10-5)=7$$



(*) x_1
x_2
x_3
(*) x_4
x_5
x_6
x_7
y_1
y_2
y_3 (x_1)
y_4
y_5
y_6
y_7
y_8

图 9.11



x_1
(y_2) x_2
x_3
x_4
(*) x_5
x_6
x_7
y_1
y_2 (x_5)
y_3
y_4
y_5
y_6 (x_2) (临界)
y_7
y_8

图 9.12

9.31 运用内容提要9-3之2的算法，求下列二部图的最大匹配。(见图9.11和图9.12)

解 1.(图中虚线表示边,实线表示匹配。)

先确定一匹配 $M=\{[x_2, y_2], [x_3, y_3], [x_5, y_4], [x_6, y_8], [x_7, y_6]\}$。用(*)标记 x_1 与 x_4，再用(x_1)标记 y_8 后即进入非临界状态。因此,可以断定原匹配 M 就是最大匹配。

2.先确定匹配 $M=\{[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3], [x_4, y_4]\}$。用(*)标记 x_5，(x_5) 标记 y_2，…，(x_2) 标记 y_6 后进入临界状态，得到关于 M 的交替链 $\{[x_5, y_2], [x_2, y_2], [x_2, y_6]$，去掉其中边 $[x_2, y_2]$，(它在 M 中)，得到一个新的匹配 $M'=\{[x_1, y_1]$,

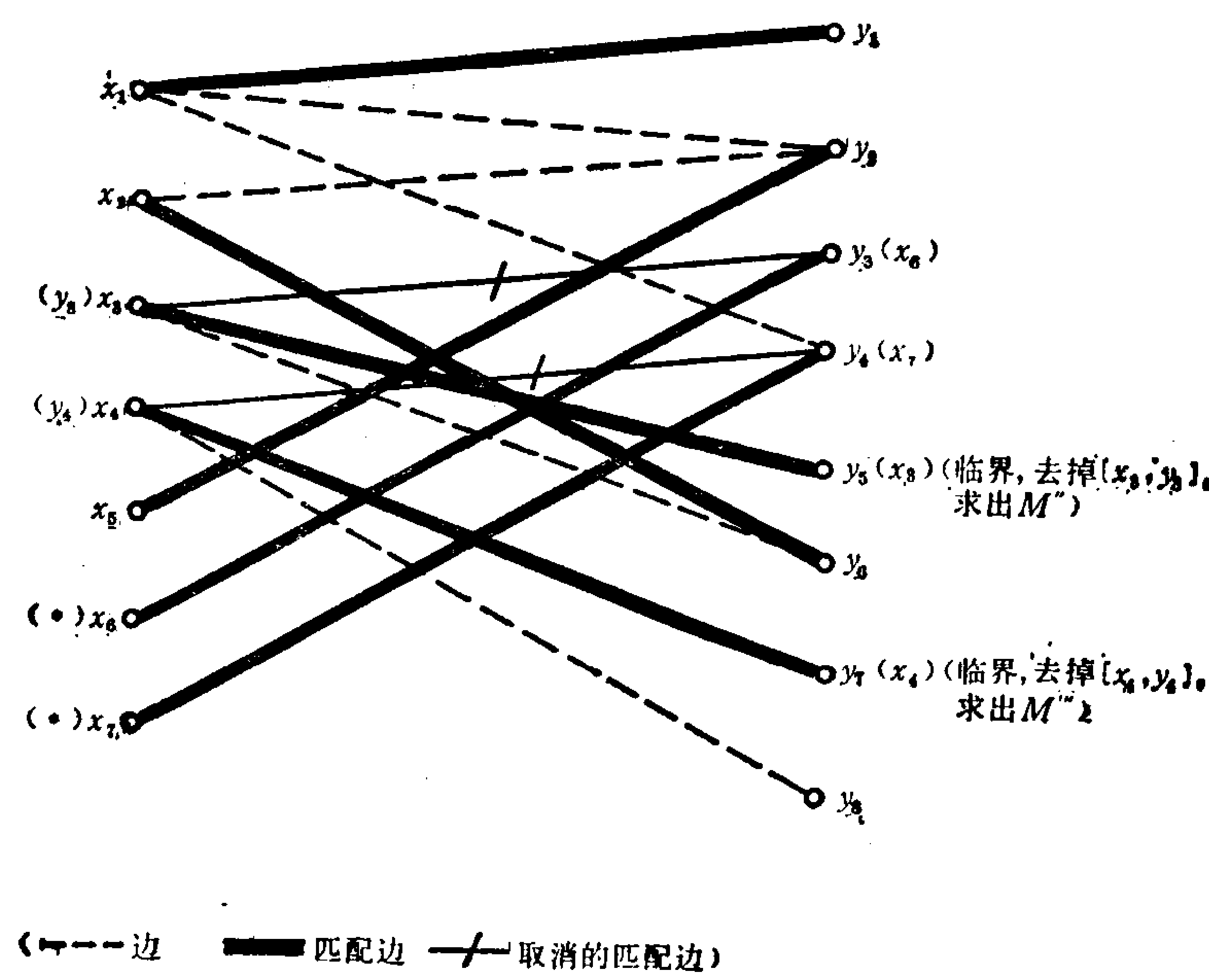


图 9.13

$[x_2, y_6]$, $[x_3, y_3]$, $[x_4, y_4]$, $[x_5, y_2]\}$, 它有五条边。对 M' 重复上述过程，可作出 M'' 及最大匹配 M''' (如图 9.13)：

$$M'''=\{[x_1, y_1], [x_2, y_6], [x_3, y_5], [x_4, y_7], [x_5, y_2], [x_6, y_3], [x_7, y_4]\}$$

***9.32** 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一集合族，$r_1, r_2, \cdots, r_n$ 为正整数。证明：存在集合族 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，对 $i=1, 2, \cdots, n$，$B_i\subseteq A_i$，$|B_i|=r_i$，并且对一切 $i, j(i\neq j)$ $B_i\cap B_j=\varnothing$，当且仅当对每一 $k=1, 2, \cdots, n$，和对 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的任意选取 $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，总有

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_k} \tag{1}$$

说明为什么 Hall 定理是本命题的特殊情况。

证 先证命题：符合题意的集合族 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 存在，当且仅当集合族

$$\underbrace{A_1, A_1, \cdots, A_1}_{r_1\text{个}}, \underbrace{A_2, A_2, \cdots, A_2}_{r_2\text{个}}, \cdots, \underbrace{A_n, A_n, \cdots, A_n}_{r_n\text{个}} \tag{2}$$

有相异代表系。

若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 存在，则可取

$$b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1r_1}, b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2r_2}, \cdots, b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nr_n}$$

为集合族(2)的相异代表系(其 $b_{ij}\in B_i\subseteq A_i$)。

反之，若集合族(2)有相异代表系，记为

$$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1r_1}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2r_2}, \cdots, a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nr_n}$$

那么令 $B_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir_i}\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，显然 $B_i\subseteq A_i$，$|B_i|=r_i$，为 $i\neq j$ 时 $B_i\cap B_j=\varnothing$。

现证：集合族(2)有相异代表系，当且仅当对每一 $k=1, 2, \cdots, n$ 和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的任一选取 $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$ 有(1)式，即

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_k}$$

充分性。欲证集合族(2)有相异代表系，只须证对任意 $l=1, 2, \cdots, (r_1+r_2+\cdots+r_n)$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_l$ 在任一选取 $(1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_l\leqslant(r_1+r_2+\cdots+r_n))$ 有

$$|A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_l}|\geqslant l$$

考虑 $A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_l}$，它们取自集合族(*)，其中若干应同为 $A_k(k=1, 2, \cdots, n)$，不妨设它们是

$$\underbrace{A_{k_1}, A_{k_1}, \cdots, A_{k_1}}_{l_1}, \underbrace{A_{k_2}, A_{k_2}, \cdots, A_{k_2}}_{l_2}, \cdots,$$

$$\underbrace{A_{k_m}, A_{k_m}, \cdots, A_{k_m}}_{l_m}$$

其中 $l_1+l_2+\cdots+l_m=l$, $l_i\leqslant r_{k_i}(i=1, 2, \cdots, n)$。因而

$$\begin{aligned}|A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup\cdots\cup A_{j_l}|&=|A_{k_1}\cup\cdots\cup A_{k_1}\cup A_{k_2}\\&\cup\cdots\cup A_{k_2}\cup\cdots\cup A_{k_m}\cup\cdots\cup A_{k_m}|\\&\geqslant r_{k_1}+r_{k_2}+\cdots+r_{k_m}\quad(\text{据题设})\\&\geqslant l_1+l_2+\cdots+l_m=l\end{aligned}$$

必要性。欲证对每一 $k=1, 2, \cdots, n$ 和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的任一选取 $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$ 有

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_k}$$

设集合族(2)有相异代表系，那么由 Hall 条件

$$\begin{aligned}&|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\\&=|\underbrace{A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_1}}_{r_{i_1}}\cup\underbrace{A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_2}}_{r_{i_2}}\cup\cdots\cup\underbrace{A_{i_k}\cup\cdots\cup A_{i_k}}_{r_{i_k}}|\\&\geqslant r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_k}\end{aligned}$$

至此命题证明完成。

评注 本命题在 $r_1=r_2=\cdots=r_n=1$ 时便是 Hall 定理，从这一点上说 Hall 定理是它的特例。但是本命题又可由 Hall 定

理推出，因此它们是互相等价的命题。

本题证明的技巧是值得玩味的。

*9.33 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 这两个集合族是集合 S 的两个划分。证明有 $1, 2, \cdots, n$ 的一个置换 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 使得

$$A_1 \cap B_{j_1} \neq \varnothing,\ A_2 \cap B_{j_2} \neq \varnothing,\ \cdots,\ A_n \cap B_{j_n} \neq \varnothing$$

当且仅当对于每一 $k=1, 2, \cdots, n$, 集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任何 k 个集合不包含在集合族 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中的 $k-1$ 个集合的并中。

证 构造一偶图 $\langle X, E, Y\rangle$, $X=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, $Y=\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$, A_iEB_j（A_i 与 B_j 有边相连）当且仅当 $A_i \cap B_j \neq \varnothing$。

必要性 反设有 k 个集合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ 包含在 $B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \cdots \cup B_{j_{k-1}}$ 之中。由于 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 S 的划分，因此 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ 与其它诸 B_j 均不交。若用 $E(X_0)$ 表示与 X 的子集 X_0 中结点相联接的 Y 中的结点集合，那么：

$$|E(\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}\})| \leqslant k-1 < |\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}\}|$$

因此该偶图没有完全匹配（据内容提要 9-6 之 4）这与有 $1, 2, \cdots, n$ 的置换 $j, \cdots, j_n$, $A_1 \cap B_{j_1} \neq \varnothing, A_2 \cap B_{j_2} \neq \varnothing, \cdots, A_n \cap B_{j_n} \neq \varnothing$ 矛盾。命题的必要性证讫。

充分性 设集合族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中没有 k 个集合包含在集合族 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中的 $k-1$ 个集合的并中。于是，对任何 $k=1, 2, \cdots, n$ 和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$ 的任一选取，$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ 至少与 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中的 k 个集合有交，即

$$|E(\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}\})| \geqslant k$$

据内容提要 9-6 之 4，偶图有完全匹配

$$\{[A_1, B_{j_1}], [A_2, B_{j_2}], \cdots, [A_n, B_{j_n}]\}$$

故命题的充分性得证。

评注 当题中两集合族不是 S 划分时，命题不能成立，如 $A_1=\cdots=A_n=S=B_1=\cdots=B_n$。

9.34 （续题 9.33）假定有正整数 p，使得对于 $i=1, 2, \cdots, n$ 有 $|A_i|=p$，$|B_i|=p$。证明存在 $1, 2, \cdots, n$ 的置换 $j_1, j_2, \cdots, j_n$，使得

$$A_1\cap B_{j_1}\neq\varnothing, A_2\cap B_{j_2}\neq\varnothing, \cdots, A_n\cap B_{j_n}\neq\varnothing$$

证 由于 $A_1, \cdots, A_n$ 中任意 k 个集合都恰含有 $p\cdot k$ 个元素（因 $A_1, \cdots, A_n$ 是 S 的划分），不可能包含在 $B_1, \cdots, B_n$ 中的 $k-1$ 集合的并中，因为后者只有 $p\cdot(k-1)$ 个元素。据题 9.33 结论，存在 $1, 2, \cdots, n$ 的置换 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 使 $A_1\cap B_{j_1}\neq\varnothing$，$A_2\cap B_{j_2}\neq\varnothing$，$\cdots$，$A_n\cap B_{j_n}\neq\varnothing$。

9.35 设 A 是 $r\times m$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ m+1 & m+2 & m+3 & \cdots & 2m \\ 2m+1 & 2m+2 & 2m+3 & \cdots & 3m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (r-1)m+1 & (r-1)m+2 & (r-1)m+3 & \cdots & rm \end{pmatrix}$$

而 $r\times m$ 矩阵 B 虽仍以 $1, 2, \cdots, rm$ 为其 rm 个分量，但它们不规则地处在各个位置上。证明，存在一个矩阵 B 的列变换，使得 A, B 矩阵的各对应的列至少有一公共元素。

证 矩阵 A 的 m 列 $A_1, \cdots, A_m$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, rm\}$ 的一个划分，诸 A_i 均有 r 个元素。矩阵 B 的 m 列 $B_1, B_2\cdots, B_m$ 也是集合 $\{1, 2, \cdots, rm\}$ 的一个划分，诸 B_i 也均有 r 个元素。据题 9.3，有 $1, 2, \cdots, m$ 的一个置换 $j_1, j_2, \cdots, j_m$，使 $A_1\cap B_{j_1}\neq\varnothing, \cdots, A_m\cap B_{jm}\neq\varnothing$。这就是说，适当地变换 B 中各列的

位置，可使 A, B 矩阵各对应列都至少有一公共元素。

评注 这里又一次使用了模式化归的方法，使问题转化为我们已经讨论过的一般模式。我们已经说过，矩阵问题常与相异代表系问题相关，因为，正如本题所体现的那样，矩阵可以看作一个集合(行或列)的族。

9.35 设 H 是有限群 G 的子群。证明，存在正整数 m 及元素 $z_1, z_2, \cdots, z_m \in G$，使得

$$G = Hz_1 \cup Hz_2 \cup \cdots \cup Hz_m = z_1H \cup z_2H \cup \cdots \cup z_mH$$

证 由于 G 为有限群，而且 H 的全体左、右陪集各构成 G 的划分，划分的每一块均恰有 $|H|$ 个元素，划分的块数均为 $|G|/|H|$ (记为 m)。因此，可设 G 有划分 $\{Hx_1, Hx_2, \cdots, Hx_m\}$ 和 $\{y_1H, y_2H, \cdots, y_mH\}$，有

$$G = Hx_1 \cup Hx_2 \cup \cdots \cup Hx_m = y_1H \cup y_2H \cup \cdots \cup y_mH$$

这里 $|Hx_i| = |y_jH| = |H|$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$。

据题 9.34，适当变换 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的足码，可使 $Hx_i \cap y_iH \neq \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$。设 $z_i \in Hx_i \cap y_iH$，据代数知识可知，$Hz_i = Hx_i$, $z_iH = y_iH$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$。因此

$$G = Hz_1 \cup Hz_2 \cup \cdots \cup Hz_m = z_1H \cup z_2H \cup \cdots \cup z_mH$$

评注 有关的代数知识可从任何一本近世代数教科书和一些离散数学教科书中找到。

***9.37** 设 $A = (a_{ij})$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 为一 $n \times n$ 非负实矩阵，且各行各列的分量之和均为 t，即

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = t \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = t \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

证明：存在非负实数 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 和 $n \times n$ 置换矩阵 $P_1, P_2, \cdots,$

P_s 使得 $A=u_1P_1+u_2P_2+\cdots+u_sP_s$。

证 若 A 中有一行(或一列)全为零，则 A 为零矩阵（因 A 各行各列分量之和均相等），此时命题显然成立（取 $u_1=\cdots=u_s=0$）。因此可设 A 各行各列至少有一个非零元素。对 A 中非零元素的个数 m 归纳。由于 $m\geqslant n$，以 $m=n$ 为归纳基础。

1．$m=n$ 时，A 中各行各列都恰有一个元素，并且都是 t，因此有置换矩阵 P，使

$$A=tP$$

2．当 $m>n$ 时，设对一切非零分量少于 m 个的矩阵命题成立。

令 $s_i=\{j\,|\,a_{ij}\neq 0\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，即 s_i 是第 i 行中非零分量所处的列位置标记的集合。我们断定集合族 s_1，…，s_n 满足 Hall 条件，因为不然的话，必有 k 个 s_i 使 $|s_{i_1}\cup s_{i_2}\cup\cdots\cup s_{i_k}|<k$，即 s_{i_1}，s_{i_2}，…，s_{i_k} 至多只含有 $k-1$ 个标记，因而第 i_1，第 i_2，…，第 i_k 行这 k 行上非零分量至多分布在 $k-1$ 列上。它们按行相加得到和 kt，而按列相加则得不大于 $(k-1)t$ 的和，引起矛盾。既然 s_1，…，s_n 满足 Hall 条件，那么 s_1，s_2，…，s_n 有相异代表系，设为 j_1，j_2，…，j_n，它显然是 1，2，…，n 的一个置换。另外，据 s_i 的定义我们知道 $a_{ij_i}\neq 0$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。作置换矩阵 $P_1=(C_{ij})$，其中 $C_{ij_i}=1$，$C_{ij}=0\ (j\neq j_i)$，令 $u_1=\min(a_{1j_1},\ a_{2j_2},\ \cdots,\ a_{nj_n})$。置 $A_1=A-u_1P_1$，显然 A_1 中少了一个非零分量，对 A_1 可用归纳假设，设 $A_1=u_2P_2+u_3P_3+\cdots+u_sP_s$，从而 $A=u_1P_1+u_2P_2+\cdots+u_sP_s$。

评注 置换矩阵是每行每列恰有一个分量为 1 的(0,1)方阵。

9.38 设 $G=\langle X,\ E,\ Y\rangle$ 是一偶图，X 为可数无穷集，且对每一 $a\in X$，$E(a)$（$=\{y\,|\,y$与a 有边相联结$\}$）是有穷集。证明：G 有完全匹配（X 所有元素为匹配边的端点），当且仅当对

每一 $A\subseteq X$，有

$$|E(A)|\geqslant|A|$$

($E(A)=\{y|$ 有 $x\in A$，y 与 x 有边相联结$\}$)

证 必要性是显然的，以下证充分性。设 $X=\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$，$X_1=\{x_1\}$，$X_2=\{x_1, x_2\}$，$\cdots$，$X_i=\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$，$\cdots$。考虑偶图 G 的子图 $G_i=(X_i, E, Y)(i=1, 2, \cdots)$。由于 $|E(X_1)|\geqslant|X_1|$，$\cdots$，$|E(X_i)|\geqslant|X_i|$，$\cdots$，故诸 G_i 均有完全匹配。在这可数无穷多个匹配中，x_1 无数次与 Y 中元素相联结，但 $E(\{x_1\})$ 有穷，故 x_1 必定无数次与 Y 中某一元素，不妨设为 y_1，相联结。在 x_1 与 y_1 相联结的无穷多个匹配中，考虑 x_2，同理 x_2 必定无数次与 Y 中某一元素，不妨设为 $y_2(y_2\neq y_1)$，相联结。再在 x_2 与 y_2 相联结的无穷多个匹配中，考虑 $x_3\cdots$。如此等等。这样我们更作出了一个完全匹配 $\{[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3], \cdots\}$。

评注 本题使用一个考虑无穷集合问题的常用原理：无穷多个元素分放在有穷多个集合里，至少有一个集合中含有无穷多个元素。这一原理应用广泛，也称无穷集合的鸽笼原理或 Ramsey 定理。

***9.39** 设 $\langle X, E, Y\rangle$ 是无限偶图 (X, Y 为无穷集)，M 是它的一个匹配。**无限链**是指不同结点的无穷序列，使相邻结点间有边相联结。关于 M 的**无限交替链** γ 是指一无限链 γ，使其第一、三、五、$\cdots$条边不在 M 中，而第二、四、六、$\cdots$条边在 M 中，并且 γ 的第一个结点不与 M 的任何边相交。(注意，γ 是无穷序列，它无终点) 证明：如果存在匹配 M_1，使 X 的每个结点与 M_1 的一边相交 ($\langle X, E, Y\rangle$ 的完全匹配)，并且存在匹配 M_2，使 Y 的每个结点与 M_2 的一边相交，那么存在一个匹配 M，使得 M 恰好联结 X 和 Y 的所有结点。

证 图 9.14 中实线表示 M_2 的边，虚线表示 M_1 的边，有向直线表示交替链。

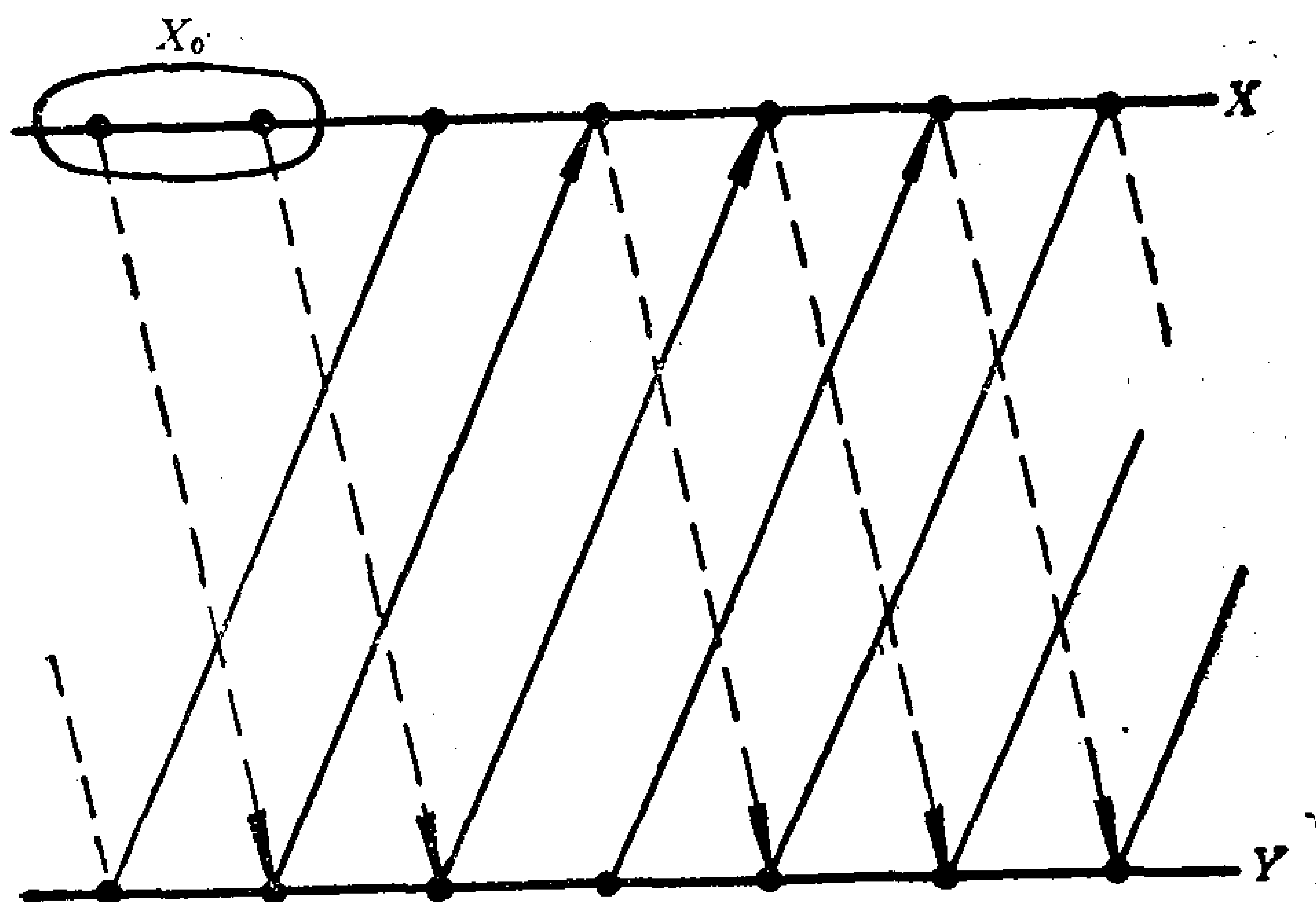


图 9.14

设 $X_0 \subseteq X$ 是不与 M_2 任何一边相交的 X 中结点的集合。若 $X_0 = \varnothing$，则取 $M = M_2$ 命题得证。若 $X_0 \neq \varnothing$，对每一 $x \in X_0$ 作关于 M_2 的交替链。由于 X，Y 中所有结点都与匹配边相交（或与 M_1 的边，或与 M_2 的边），这一交替链为一无穷交替链，无穷条边属于 M_1，无穷条边属于 M_2。此外，对不同的 $x \in X_0$，作出的不同交替链之间没有公共的结点。现在在所有这样的交替链中删去 M_2 的边，各得到一匹配，这些匹配的并连同不在那些交替链中的 M_2 的边仍为一匹配，记为 M。现证 M 中的边联结了所有 X 中和 Y 中的结点。

首先，显然 X_0 中结点都是 M 中边的端点；而 $X - X_0$ 中结点由于全部是 M_2 中边的端点，因此它们或者仍为 M_2 中边的端点，或者成为交替链中 M_1 的边的端点。总之，X 中结点全为 M 之端点。

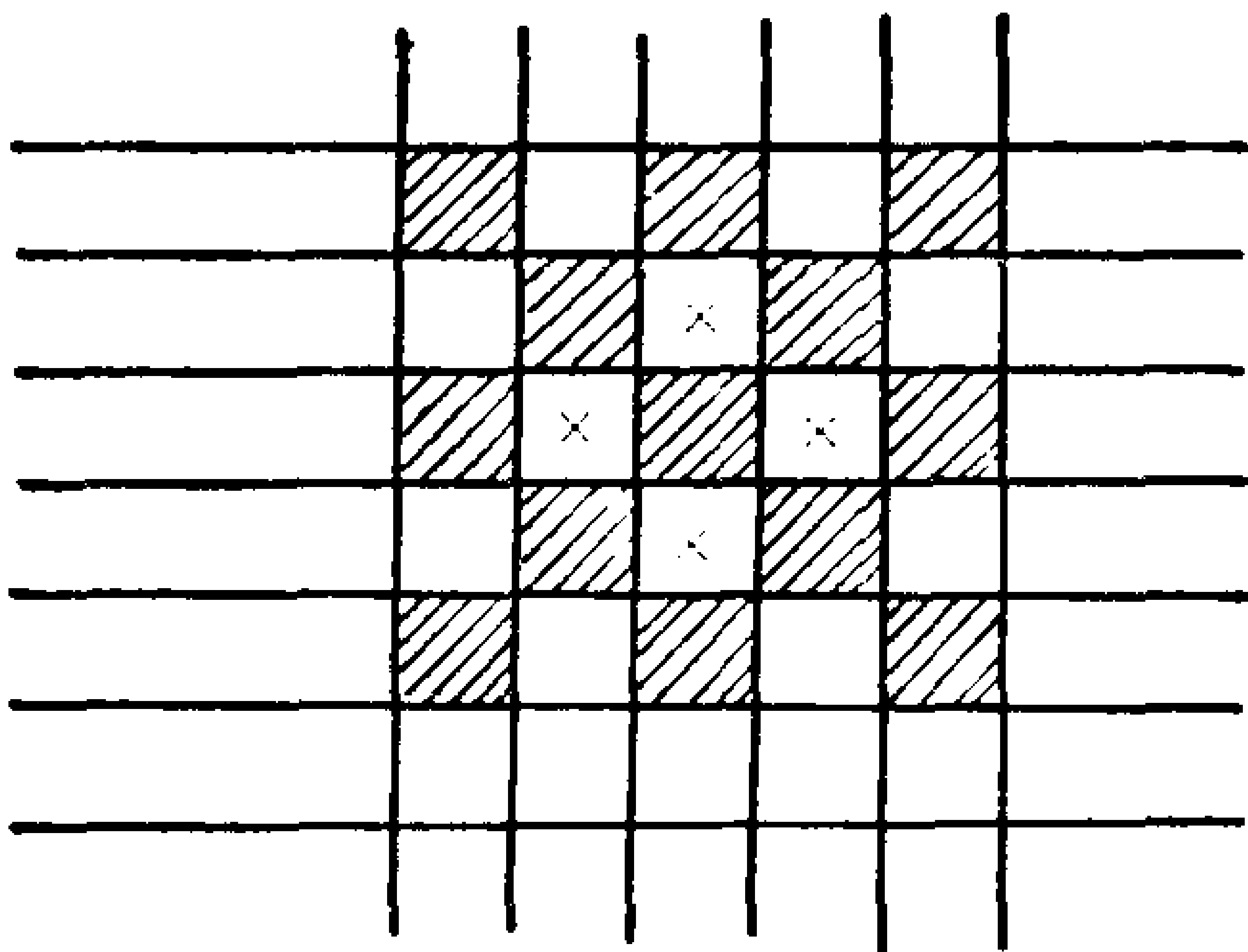
另一方面，由于 Y 中结点全部是 M_2 的端点，现在它们或者仍为 M_2 的端点，或者成了交替链中 M_1 的边的端点（原来与之相交的 M_2 的边被删掉，代之以交替链中 M_1 的边与之相交）。因此，Y 中所有结点是 M 中边的端点。

上述 M 即为一恰好联结 X, Y 的所有结点的匹配。

评注 利用集合论的一个基本事实，本命题可立即证得：

由于 M_1 的存在，可知 $|X|\leqslant|Y|$；由于 M_2 的存在，可知 $|Y|\leqslant|X|$。据集合基数基本性质，可知 $|X|=|Y|$，因而 X 与 Y 之间有一 1-1 对应，这一对应便是所求的匹配。本题的证明思路便是从上述基本性质的著名论证中获取的。集合的这一基本性质可在集合论或离散数学教科书中找到。

9.40 试举一例说明，存在一残缺的无限棋盘（棋盘四边无限伸展，黑白方格相间放置），它可用多米诺骨牌互不交搭地覆盖住全部的白方格，却不可能用多米诺骨牌覆盖住全部的黑方格。



（阴影表示黑方格，× 表示残缺方格）

图 9.15

解 残缺无限棋盘如图 9.15 所示，它显然可用多米诺骨牌互不交搭地覆盖住全部白方格，但至少有一个黑方格，它不可能用多米诺骨牌来覆盖。

评注 纵观整章的问题，大致可以说是两类，第一类是对 Hall 定理、二部图完全匹配存在充要条件的直接应用。这类问题的解法，往往是从问题中提取有关定理中所需要的概念和性

质，去“套”定理，可以说是模式化归的方法。第二类是有关 Hall 定理中 Hall 条件、二部图匹配的进一步讨论。这类问题的求解不仅要求正确理解有关概念和定理，还要对它们的直观背景有一定的认识。至于这类问题的解法，很难一概而论，但有一点是可以肯定的，归纳法在这里大有用武之地。

第十章　组 合 设 计

内容提要

组合设计是组合学中内容非常广泛的一个分支，其中心内容是使用组合论的方法构造 n 个事物的某种排列，使之满足特定的性质。通常解这类问题是非常困难的。但经过人们长期研究，在某些方面，诸如魔方，拉丁方和区组设计等方面，已获得了较完满的结果。并在实验设计、编码技术等方面获得了应用。本章仅就这三方面作一些基本概念和构造法介绍。特别是区组设计，我们只介绍其中两个有名系统——Steiner 系统和 Kirkman 系统，限于篇幅，不作过多的展开。

10-1　魔方

1、魔方和魔和

用 n^2 个整数 1, 2, …, n^2 构造一个 $n\times n$ 数组(即矩阵)，使得数组的每行元素之和、每列元素之和、每条对角线元素之和都等于 s，则称该数组为 **n 阶魔方**，称 s 为**魔和**。

一般说来，n 阶魔方是不唯一的。但是任何 n 阶魔方，其魔和 $s=\dfrac{1}{2}n(n^2+1)$ 总是常数。

2．构造方法

业已证明除二阶魔方不存在外，对任何 $n\geqslant 1$ 都可以构造一个 n 阶魔方。但构造方法大都很复杂，也不唯一。下边介绍的一个较简便方法是十七世纪由 Loubere 发现的，可惜它仅对奇数阶魔方有效。他是依次把整数 1, 2, …, n^2 写在 $n\times n$ 数组的

n^2个位置上。基本方法是：先在顶行(即第一行)中间写上1。在填写一个整数之后，下一个整数就填写到其右上角位置上。当右上角的位置不存在或已填写过数时，按下述规则修改。

(i) 当达到顶行时，认为底行(第 n 行)接在顶行之上。

(ii) 当达到最右列时，认为最左列接在最右列之右。

(iii) 当欲填位置上已被占用或达到顶行最右列时，下一个数填在它前一个数的下边。

10-2 有限域和有限几何

有限域和有限几何不是组合数学的组成部分。但由于构造 n 阶正交拉丁方，要涉及这两个领域的一些符号、定义和结论，所以我们要略作说明。

1. 有限域的常用符号及重要结论

1) Z_n 表示定义在 $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$(n 是质数)上的模 n 加法和模 n 乘法所组成的域。

2) $F[Z]$ 表示系数在域 F 中的以 Z 为变元的多项式集合。

3) $\deg f(Z)$ 表示多项式 $f(Z)$ 的次数。特别地，$f(Z)=c\neq 0$(c 是常数)，$\deg f(Z)=0$；$f(Z)=0$，则定义 $\deg f(Z)=-\infty$。

4) $F[Z;n]$ 是 $F[Z]$ 的子集，它表示 $F[Z]$ 中所有次数小于 n 的多项式集合。

5) **定义 10.1** 若 $f(Z)$ 是 $F[Z]$ 中的一个 n 次多项式，它不能分解成两个非常数多项式，则称它为**既约多项式**。

6) **定理 10.1** 设 $f(Z)$ 是 n 次既约多项式，在 $F[Z;n]$ 中定义模 $f(Z)$ 加法和模 $f(Z)$ 乘法，则 $F[Z;n]$ 构成一个域。它是域 F 的扩域。

7) **定理 10.2** 如果 F 是有限域，那么存在一个质数 p 和一个正整数 n，使得 $|F|=p^n$；反之对每一个质数 p 和正整数 n，存在一个域，具有 p^n 个元素。

2．有限几何

1） **定义 10.2** 设 F 是一个域，称偶对(x, y)，$x, y\in F$，为点。称 $l=\{(x,y)\mid(x,y)$满足 $cx+dy-e=0$, $c,d,e\in F$ 且 c,d 不同时为 $0\}$为**直线**。记所有点构成的集合为 $\mathscr{P}$，所有直线构成的集合为 $\mathscr{L}$。如果 $\mathscr{P}$ 中的点和 $\mathscr{L}$ 中的直线满足以下性质：

A_1：两点确定唯一的一条直线；

A_2：过直线外一点能且仅能作一条平行线；

A_3：存在 4 个点，其中没有任何 3 个点是共线的。

那么，则称 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{L}$ 组成了一个**仿射平面**，记作 $AP(F)$。

2） **定理 10.3** 若 F 是一个具有 n 个元素的有限域，则仿射平面 $AP(F)$满足下列性质：

（i） $\mathscr{P}$ 中有 n^2 个点。

（ii） $\mathscr{L}$ 中有 n^2+n 条直线。

（iii） 每条直线过 n 个点。

（iv） 每个点上有 $n+1$ 条直线。

3） 平行类。设直线的一般形式为

$$cx+dy+e=0$$

则 $\mathscr{L}$ 中 n^2+n 条直线可分成 $n+1$ 类：

（i） 垂直类：若一般形式中 $d=0$，由于 $c\neq 0$，方程可化成 $x=k$ 的形式。其中 k 可取 F 中任一个元素。所以这类直线共 n 条。

（ii） 水平类（斜率为零类）：若一般形式中，$c=0$，方程可化成 $y=k$ 的形式。类似地，这类直线有 n 条。

（iii） 非零斜率类：若 $c\neq 0$，$d\neq 0$，则方程可化成 $y=mx+k$（斜截式）的形式。（其中 $m\neq 0$）显然斜率为 m 的直线有 n 条（因 k 有 n 种选择）。因此共有 $n-1$ 个非零斜率类，每类中有 n 条直线。

10-3 拉丁方

1．定义

定义 10.3 用 $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$构造一个 $n\times n$ 数组，使得 S 的每个元素在数组的每一行和每一列上都出现，则该数组叫做一个 **n 阶拉丁方**。

为叙述方便，通常取 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$。

定义 10.4 两个 n 阶拉丁方 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$称作是正交的，如果并置组数 A 和 B 形成一个新数组$C=(c_{ij})$，$c_{ij}=(a_{ij}, b_{ij})$，对 $i=1,2,\cdots, n$ 和 $j=1, 2, \cdots, n$，且 C 的所有元素(偶对)全不相同。

2．n 阶正交拉丁方的构造和重要结论

以下陈述中的 p 都表示质数，t 表示正整数，不再声明。

1) $n=p^t(n\geqslant 3)$时的构造法。

a) 代数方法。蕴含在以下定理中。

定理 10.4 作 p^t 个元素的域 F，设 F 的元素是 $\alpha_0=0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}=1$。构造数组 $L_1, L_2, \cdots, L_{n-1}$ 如下：

$$L_k=(a_{ij}^{(k)})$$

$$a_{ij}^{(k)}=\alpha_k\cdot\alpha_i+\alpha_j \quad i, j=0, 1, 2, \cdots, n-1$$

$$k=1, 2, \cdots, n-1$$

那末 $L_1, L_2, \cdots, L_{n-1}$ 是两两正交的 $n-1$ 个 n 阶正交拉丁方(证明见题 10.24)。

b) 有限几何法。

作 p^t 个元素的域 F，构造仿射平面 $AP(F)$，取 $n-1$ 个非零斜率类：$y=m_ix+k$($m_i\neq 0$ 是常数，k 是变元，$i=1, 2, \cdots, n-1$)。下面具体说明如何根据这些非零斜率类，作出 $n-1$ 个拉丁方 $L_1, L_2, \cdots, L_{n-1}$，使这 $n-1$ 个拉丁方是两两正交的。(正交性的证明见题 10.20)

设 $F=\{\alpha_0=0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}=1\}$，作平面直角坐标系 XY。两坐标轴的刻度依次为 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$，其中 α_0 在原点。作 n 条垂直类直线和 n 条水平类直线，它们在平面上产生 n^2 个交点。这些交点形成一个方阵，它对应于一个 $n\times n$ 数组，每一交点对应于一个数组元素。

我们把非零斜率类 $y=m_ix+k$ 中的 n 条直线，按照 k 的不同选取依次编号为 1, 2, …, n。第 i 条直线与每条水平线相交于一点，有 n 个交点，分布在 n 行上。第 i 条直线与每条垂直线相交于一点，有 n 个交点，分布在 n 列上。但第 i 条直线只含 n 个点，所以，它与垂直线相交的 n 个点就是与水平线相交的 n 个点。因此这 n 个点分布在每一行和每一列上。我们记这些点对应的数组元素的值为 i。让 i 遍历 1, 2, …, n。因为这 n 条直线属于一个平行类，因此，每条水平线或垂直线与之相交不会有重迭交点，因此所标记的数组元素不会重迭。这样，就正好得出一个拉丁方 L_i。

2) $n=p_1^{t_1}\cdot p_2^{t_2}\cdots p_k^{t_k}(p_i^{t_i}\geqslant 3)$时的构造法。

这个构造法蕴含在以下定理中。

定理 10.5 若已有一对 n_1 阶正交拉丁方和一对 n_2 阶正交拉丁方，则可构造一对 $n=n_1\cdot n_2$ 阶的正交拉丁方。(证明及构造方法见题 10.28)

显然，先应用定理 10.5 到 $p_1^{t_1}\cdot p_2^{t_2}$，再应用它到$(p_1^{t_1}\cdot p_2^{t_2})\cdot p_3^{t_3}$，如此以往 $k-1$ 次，即可构造出一对 n 阶正交拉丁方。

3) 没有 2 阶和 6 阶正交拉丁方(所以，上述要限制 $p_i^{t_i}\geqslant 3$，即不能有一个 $p_i^{t_i}=2$)，除此以外，所有正整数 n，都存在一对正交 n 阶拉丁方。

10-4 Steiner 系统及 Kirkman 系统

1. 问题的提出

1850 年, R. T. P. Kirkman 提出以下数学游戏：一位女教师带她班上的 15 个女学生散步。她把她们排成五行，每行三人，准备以这种队形连续散步七天。但为了大家能普遍交谈，每天都重新编队，使得已在同一行中的任何两人，今后不再排在同一行中。试问这样的计划可能吗？若可能，应怎样编队呢？

此类问题常称之为 Kirkman 女生问题。

2．一般形式的数学抽象

定义 10.5 设有 v 个元素的集合 $X=\{a_1, a_2, \cdots, a_v\}$，取 X 的元素组成 b 个三重组，构成三重组集 S，即

$$S=\{(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}), \cdots\}$$

使得：

(1) X 的任何一对元素 (a_t, a_u) 恰出现在 S 的一个三重组中；

(2) 把 S 的 b 个三重组划分成 $\frac{v-1}{2}$ 个子集，使得 X 的每个元素恰在每个子集的某个三重组中出现一次。

满足条件(1)的三重组集合 S，称之为 v 阶 Steiner 三重组系统，简称 **v 阶 Steiner 系统**。

满足条件(1)和(2)的三重组系统称之为 **v 阶 Kirkman 系统**。

3．重要结论

(a) v 阶 Steiner 系统存在的充要条件是 $v=6n+1$ 或 $v=6n+3$。

(b) v 阶 Kirkman 系统存在的充要条件是 $v=6n+3$。

题解及评注

10.1 用 Loubere 方法分别构造一个 7 阶和 9 阶魔方。它

们的魔和是多少?

解 7 阶魔方的魔和是 $7\times 50/2=175$。9 阶魔方的魔和是 $9\times 82/2=369$。构造的 7 阶魔方和 9 阶魔方如下:

$$
\begin{bmatrix}
30 & 39 & 48 & 1 & 10 & 19 & 28 \\
38 & 47 & 7 & 9 & 18 & 27 & 29 \\
46 & 6 & 8 & 17 & 26 & 35 & 37 \\
5 & 14 & 16 & 25 & 34 & 36 & 45 \\
13 & 15 & 24 & 33 & 42 & 44 & 4 \\
21 & 23 & 32 & 41 & 43 & 3 & 12 \\
22 & 31 & 40 & 49 & 2 & 11 & 20
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
47 & 58 & 69 & 80 & 1 & 12 & 23 & 34 & 45 \\
57 & 68 & 79 & 9 & 11 & 22 & 33 & 44 & 46 \\
67 & 78 & 8 & 10 & 21 & 32 & 43 & 54 & 56 \\
77 & 7 & 18 & 20 & 31 & 42 & 53 & 55 & 66 \\
6 & 17 & 19 & 30 & 41 & 52 & 63 & 65 & 76 \\
16 & 27 & 29 & 40 & 51 & 62 & 64 & 75 & 5 \\
26 & 28 & 39 & 50 & 61 & 72 & 74 & 4 & 15 \\
36 & 38 & 49 & 60 & 71 & 73 & 3 & 14 & 25 \\
37 & 48 & 59 & 70 & 81 & 2 & 13 & 24 & 35
\end{bmatrix}
$$

10.2 验证不存在 2 阶魔方。

解 假定其存在,其形式为

$$
\begin{bmatrix}
a & b \\
c & d
\end{bmatrix}
$$

因此有 $a+b=a+c$, 于是推出 $b=c$, 这是一个矛盾。

10.3 证明任何一个 3 阶魔方,数字 5 必处在中间位置上。由此推出恰有 8 种 3 阶魔方。

解 3 阶魔方的魔和是 15。假定一个 3 阶魔方是

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

那么有

$$a+e+k=15 \tag{1}$$

$$g+e+c=15 \tag{2}$$

$$d+e+f=15 \tag{3}$$

$$a+d+g=15 \tag{4}$$

$$c+f+k=15 \tag{5}$$

(1)＋(2)＋(3)－(4)－(5)得

$$3e=15$$

所以

$$e=5$$

因为 $e=5$，必有 $a+k=b+h=c+g=d+f=10$，即与 e 同行、同列、同对角线上的一对数必为(1, 9)，(2, 8)，(3, 7)，(4, 6)。

若 $a=9$，则应有

$$b+c=d+g=6 \tag{6}$$

但满足(6)式的 b, c, d, g 不存在，所以 $a\neq 9$。

同理，$c\neq 9$, $g\neq 9$, $k\neq 9$。即9不能排在四角上。

若 $b=9$，则 $h=1$，魔方有以下形式：

$$\begin{bmatrix} a & 9 & c \\ d & 5 & f \\ g & 1 & k \end{bmatrix}$$

于是，a, c 必然取2,4或4,2, g, k 必然取6,8或8,6, d, f 必然取7,3或3,7。得出

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

这就是说 $b=9$ 时恰有两种形式的魔方。类似地，$d=9$，$h=9$ 和 $f=9$ 时也都恰有两种形式的魔方。于是恰有 8 种形式的 3 阶魔方。

评注 这 8 个不同的 3 阶魔方，实际上可由上述一种形式，通过若干次交换第一列与第三列，或把方阵旋转 90° 得到。

10.4 能用下面不完全方阵填成一个 4 阶魔方吗？

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & & \\ 4 & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

解 答案是否定的。因为魔和为 34，若可填成 4 阶魔方：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & x & y \\ 4 & r & q & t \\ a & p & * & * \\ b & s & * & * \end{bmatrix}$$

则 $x+y=29$，$a+b=28$。x，y 中的大者应满足 $\geqslant\left\lceil \frac{29}{2} \right\rceil=15$；$a$，$b$ 中的大者应 $\geqslant\left\lceil \frac{28}{2} \right\rceil=14$。而 a，b，x，$y\leqslant 16$。于是 x，y 可选 16，13 或 15，14。

若 x，y 选 16，13，则 a，b 不能选 16，12，也不能选 13，15，当然不能选 14，14。因此 x，y 不能这样选。

现设 x，y 选 15，14，那么 a，b 可选 16，12。但 b 不能选作 16，因为若 $y=14$（或 15），则 $p+q=4$（或 3），而 2，3，4 已填入位置，不可能再选。于是只有下述两种形式：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 15 & 14 \\ 4 & r & q & t \\ 16 & p & * & * \\ 12 & s & * & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 14 & 15 \\ 4 & r & q & t \\ 16 & p & * & * \\ 12 & s & * & * \end{bmatrix}$$

(I) (II)

对于(I)，可知$p+q=34-12-14=8$，则p，q可选1，7。若$p=1$，则$r+s=34-3-1=30$，不可能。若$q=1$，则$r+t=34-1-4=29$，也不可能。

对于(II)，可知$p+q=34-12-15=7$，则p，q可选1，6。类似的论证，也可否定这种情况。

再无其它可能的情况，于是证得前边的结论。

10.5 构造一个4阶魔方。

解 4阶魔方之魔和是34。可以凑成

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$

这个4阶魔方具有非常"好"的性质：

(1) 四角上数之和为34。$(15+6+1+12=34)$

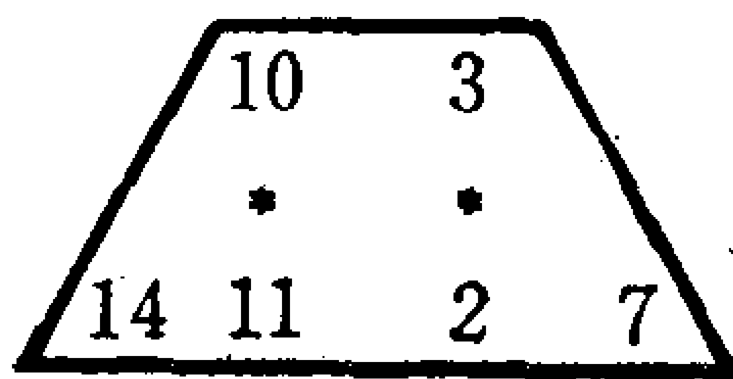
(2) 任何相邻两行两列所组成的2阶子方阵中的4个数之和为34。例如，

$$\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

(3) 任一个三阶子方阵的四角上数之和为34。例如，

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 16 \\ 14 & 11 & 2 \\ 1 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

(4) 任一个等腰梯形子阵列的四角数字之和为34。例如，



(5) 任何主、副对角线上 4 个数之和为 34。(如图 10.1)

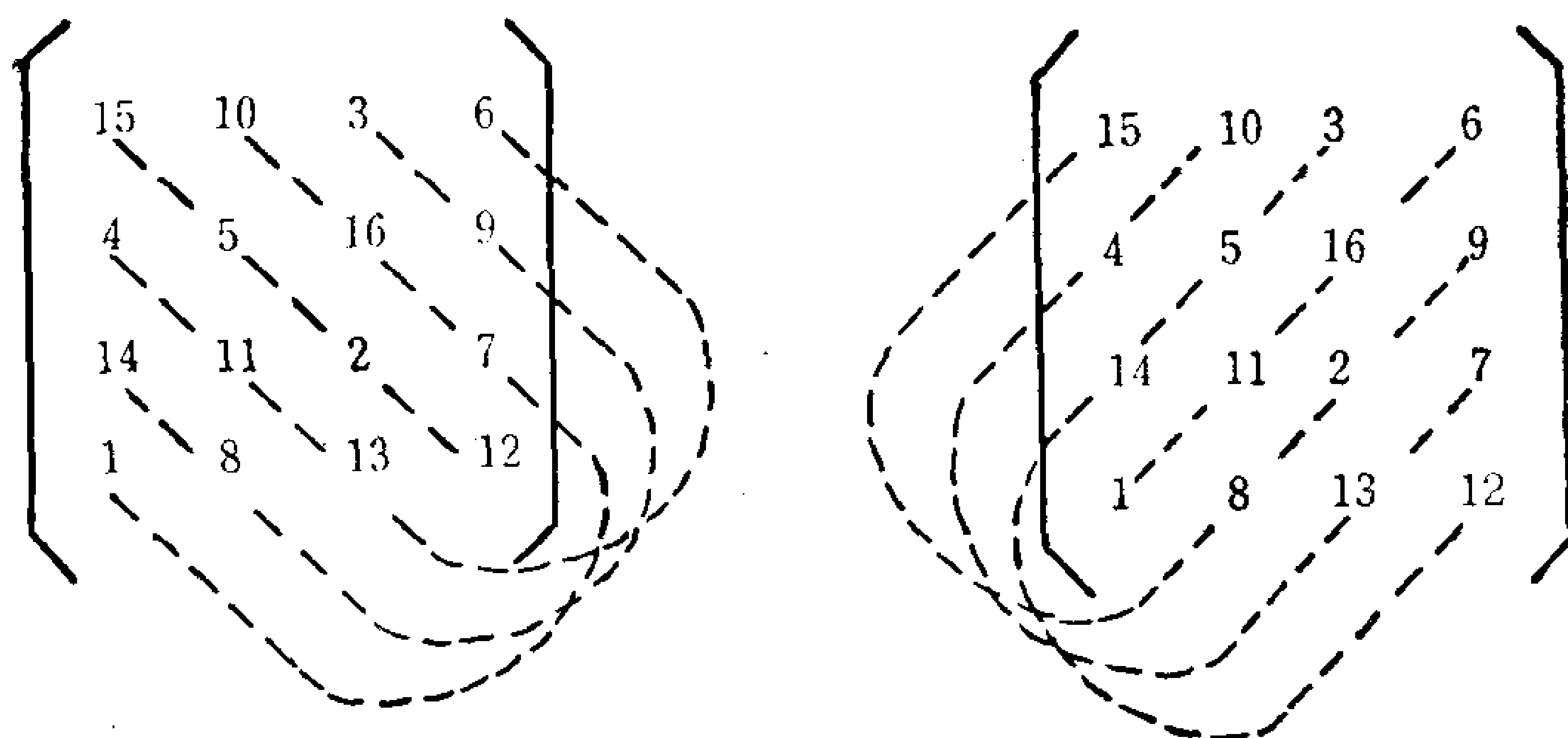


图 10.1

(6) 行列可以任意平移，构成新的魔方。即可反复地把第 1 行移到第 4 行的下边，第 1 列移到第 4 列的右边。因为行、列都有 4 种移法，所以共可得到 16 种不同的魔方(包括原来的一个)。

评注 具有上述 6 种性质的 4 阶魔方还有：

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 16 & 9 \\ 12 & 13 & 2 & 7 \\ 1 & 8 & 11 & 14 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 14 & 11 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 16 & 9 \\ 12 & 13 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

没有上述对称性质的 4 阶魔方个数更多，因而要计算 n 阶魔方的个数非常困难。所以，通常只考虑“构造”，而不考虑“计数”。

除 4 阶魔方具有上述几种对称性质之外，其余的 5 阶、7 阶、8 阶等魔方也都具有自己的特殊性质。

10.6 构造一个 6 阶魔方。

解

$$\begin{bmatrix} 28 & 4 & 3 & 31 & 35 & 10 \\ 36 & 18 & 21 & 24 & 11 & 1 \\ 7 & 23 & 12 & 17 & 22 & 30 \\ 8 & 13 & 26 & 19 & 16 & 29 \\ 5 & 20 & 15 & 14 & 25 & 32 \\ 27 & 33 & 34 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

10.7 **证明** 把一个 n 阶魔方中的每一个整数 a 换作 n^2+1-a，仍可得到一个 n 阶魔方。

证 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是该魔方中的某一行(或列，或对角线)上的 n 个数，则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n(n^2+1)/2$$

于是 $$\sum_{i=1}^{n}(n^2+1-a_i) = n(n^2+1) - \sum_{i=1}^{n} a_i = n(n^2+1)/2$$

这说明仍是一个 n 阶魔方。

10.8 一匹马从 8×8 国际象棋盘上任一格开始连续地跳，使棋盘上每一格都恰走到一次，最后回到原来位置上。马所走的这种路线称之为马步图。若在起点格上填 1，每跳一格，就把下一个自然数填入此格。这样把 1 到 64 填到棋盘的 64 个格子中。试问这样标示的马步图能否形成一个 8 阶魔方?

解 构造一个马步图是较容易的，且不止一种方法，也不止一种结果。而且一旦得到一个马步图，因为它是一条封闭曲线，可任选一格作为起点。但是构造一个马步魔方是极其困难的。经过大量地研究，有人才给出一个近似的马步魔方(如下页)。并叹息“孰能证明此题有解或无解? 恐无其人也!”

这个马步图的每行每列上 8 个数之和都等于魔和 260。但主对角线上 8 个数之和是 256，次对角线上 8 个数之和是 264。都与魔和相差 4。

$$
\begin{bmatrix}
15 & 2 & 31 & 52 & 17 & 54 & 43 & 46 \\
30 & 51 & 16 & 3 & 42 & 45 & 18 & 55 \\
1 & 14 & 49 & 32 & 53 & 20 & 47 & 44 \\
50 & 29 & 4 & 13 & 48 & 41 & 56 & 19 \\
27 & 64 & 33 & 40 & 5 & 12 & 21 & 58 \\
36 & 39 & 28 & 61 & 24 & 57 & 6 & 9 \\
63 & 26 & 37 & 34 & 11 & 8 & 59 & 22 \\
38 & 35 & 62 & 25 & 60 & 23 & 10 & 7
\end{bmatrix}
$$

10.9 存在一个 2 阶(有 2 圈格子)的魔六边形吗？即排列数 1, 2,…, 7 在下边的六边形数组的各格子中，使得所有 9“行”上的数(个数不等)之和都相同，这可能吗？见图 10.2。

解 回答是否定的。因为若存在魔六边形，设其魔和为 s。则在三个水平行上有：

$$\sum_{i=1}^{7} i = 3s$$

$$3s = 28$$

所以

$$s = \frac{28}{3}$$

它不是一个整数。

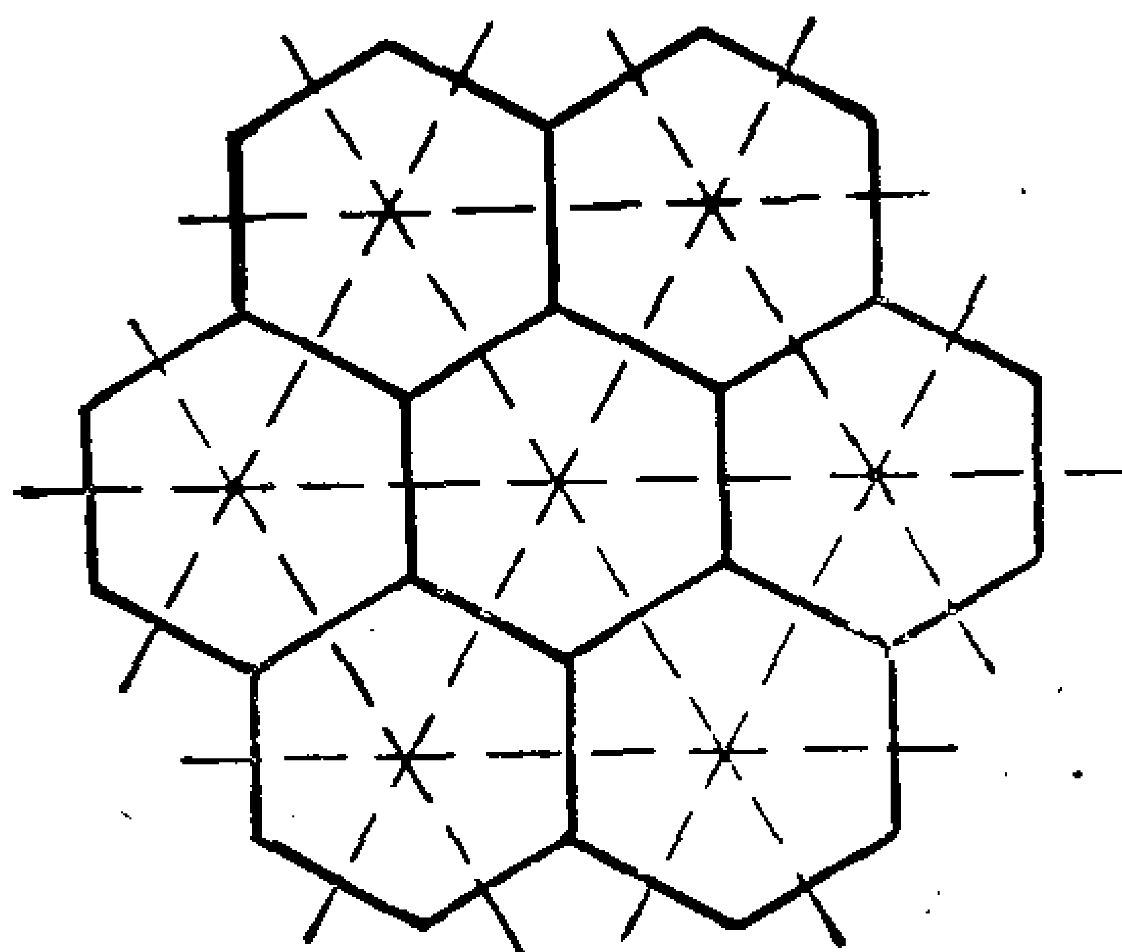


图 10.2

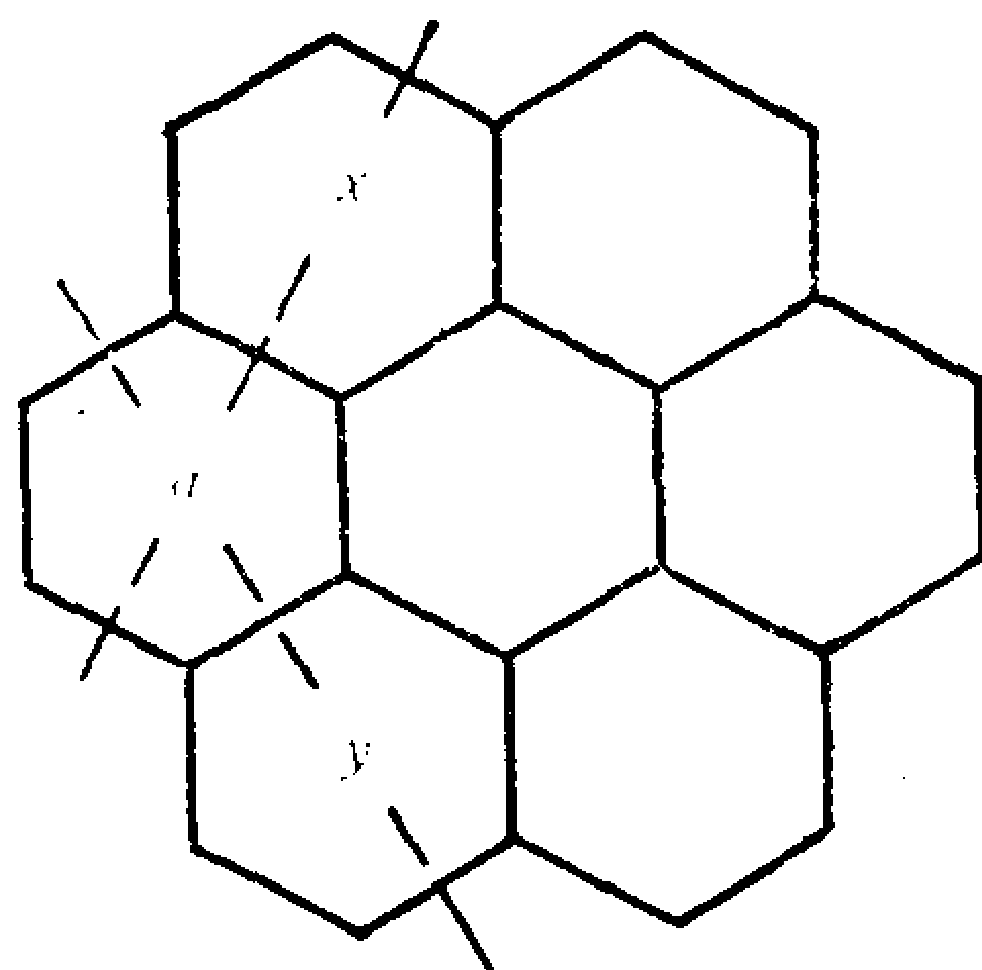


图 10.3

评注 还可以如下证明。若存在，则如图 10.3 所示，有 $a+x=s$ 和 $a+y=s$，立即得到 $x=y$。这是一个矛盾。

10.10 上题的继续。若在上题的魔六边形的外侧再加上一圈，构成一个 3 阶的魔六边形。如图 10.4 所示，问能把数 1, 2, …, 19 填入其中的每一格子，使所有的 15 行上数字之和都相等吗？还存在着其它阶的魔六边形吗？

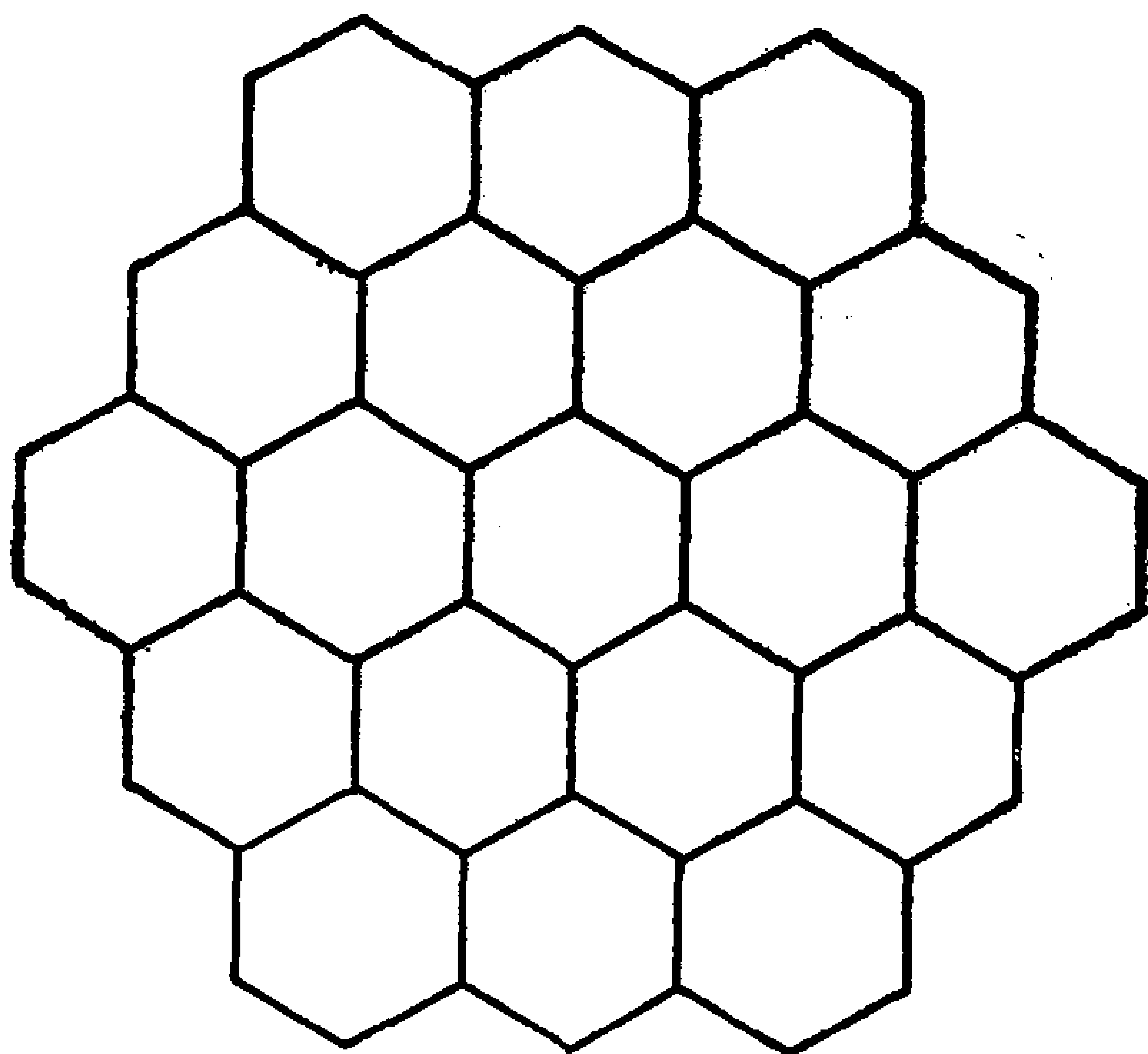


图 10.4

解 答案是肯定的。其结构如图 10.5 所示。设魔和为 s，因 $5s=\sum_{i=1}^{19} i$，所以 $s=38$。

经研究发现，除了只有一个格子的一阶情况外，只能构造 3 阶魔六边形，而且 3 阶魔六边形也只有图 10.5 所示的一种形式（不考虑对称旋转的情况）。

首先说明第一个结论。设 n 表示围绕中心格的圈数，即阶数减 1。于是 $n=0$ 时，只有一个格子。$n=1$ 时，有 7 个格子。

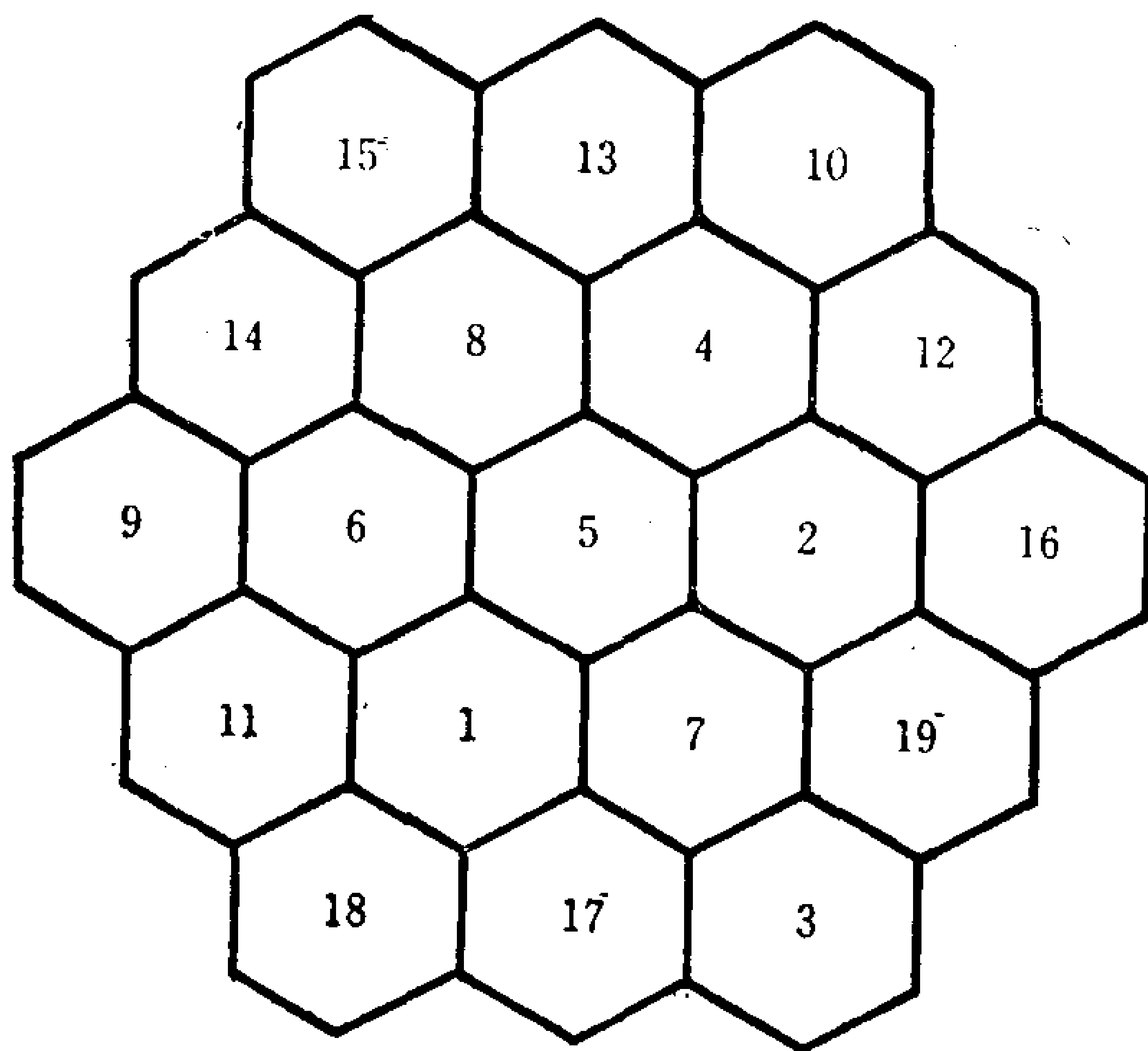


图 10.5

$n=2$ 时，有 19 个格子……由魔六边形的结构不难发现，每向外扩张一圈，新增加的格子数比原来的外圈上的格子数多 6。所以，$n+1$ 阶魔六边形的格子总数 m 是

$$\begin{aligned} m &= 1+6+2\times6+3\times6+\cdots+6n \\ &= 1+6(1+2+3+\cdots+n) \\ &= 3n^2+3n+1 \end{aligned}$$

1, 2, …, m 这 m 个数之和为

$$\sum_{i=1}^{m} i=\frac{1}{2}m(m+1)=\frac{1}{2}(3n^2+3n+1)(3n^2+3n+2)$$

而 $n+1$ 阶魔六边形共有 $2n+1$ 个"水平行"（从每向外扩张一圈增加两个"水平行"的事实得出），因此，魔和 S 应满足

$$(2n+1)S=\frac{1}{2}(3n^2+3n+1)(3n^2+3n+2)$$

S 必定是个整数，所以有

$$(2n+1)\left|\frac{1}{2}(3n^2+3n+1)(3n^2+3n+2)\right.$$

也就有 $$(2n+1)\mid(3n^2+3n+1)(3n^2+3n+2)$$

因为 $$3n^2+3n+1=(2n+1)(n+1)+n^2$$

$$3n^2+3n+2=(2n+1)(n+1)+n^2+1$$

故有 $$(2n+1)\mid n^2(n^2+1)$$

但 n^2 与 $2n+1$ 互质[注]，因而有

$$(2n+1)\mid(n^2+1)$$

于是

$$(2n+1)\mid 4(n^2+1)\quad(\text{若 } a \text{ 可整除 } b\text{，当然 } a \text{ 可整除 } 4b)$$

而 $$4(n^2+1)=(2n+1)(2n-1)+5$$

于是 $$(2n+1)\mid 5$$

这是具有 $n+1$ 阶魔六边形的必要条件。满足这个条件的只有 $n=0$ 和 $n=2$。这就说明了第一个结论。

现说明第 2 个结论。只须把 1 到 19 这 19 个数反复重排，逐一检查。但无须作 19! 次重排。例如，1 和 2 决不能排在外圈的角上，19 也决不能放在中心位置……，经过类似地分析，排除掉大量的禁止排列。有人发现只有 70 种可能的情况。再将这 70 种情况逐一检查，（工作量也很大，可用计算机来完成）发现只有图 10.5 所示的一种结构。

10.11 试分别构造一个 5 阶和 6 阶的拉丁方。并对任何 n，找出构造一个 n 阶拉丁方的一般方法。

解 下边是一个 5 阶拉丁方和一个 6 阶拉丁方。

[注] 证明 $(2n+1)$ 与 n^2 互质，可用反证法。若 $d\mid(2n+1)$，$d\mid n^2$，且 $d>1$，

则 $$d\mid(2n+1)(2n-1),\ d\mid 4n^2,$$

于是 $$d\mid 4n^2-(2n+1)(2n-1)=1\text{。这是一个矛盾。}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

一个 n 阶拉丁方可以是:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{bmatrix}$$

10.12 在 Z_{19} 中计算

(a) -3; (b) -11; (c) $13+17$;

(d) $3-12$; (e) 3^{-1}; (f) 7^{-1};

(g) 3×5; (h) 7×6; (i) 5×12;

(j) $5/7$; (k) $2/9$; (l) $1/8$。

解 (a) -3 即 3 的加法逆元。因为 $3+16=19=0$, 所以 $-3=16$;

(b) 类似(a), $-11=8$; (c) $13+17=29=10$;

(d) $3-12=-9=10$;

(e) 3^{-1} 表示 3 的乘法逆元。因为 $3\times13=1$，所以 $3^{-1}=13$；

(f) 因 $7\times11=1$，所以 $7^{-1}=11$。若心算算不出 11，可用欧几里得算法求出；

(g) $3\times5=15$；

(h) $7\times6=42=4$；　(i) $5\times12=60=3$；

(j) $5/7=5\times7^{-1}=5\times11=55=17$；

(k) $2/9=2\times9^{-1}=2\times17=34=15$；

(l) $1/8=1\times8^{-1}=8^{-1}=12$。

评注　严格地说我们不能写成 $3+16=19$，$7\times6=42$ 等。因为这里的 $+$，$\times$ 运算是指在 $Z_{19}=\{0, 1, 2, \cdots, 18\}$ 中模 19 的加法和乘法。而 19，42 不是 Z_{19} 中的元素。但是为了易懂起见，我们在这里稍微马虎一点，认为是先作一般加法和乘法，然后再把结果值对 19 取模。以下几题，也作类似地处理。

10.13　设 $F=R$(实数域)。并设 Z^2+Z+2 是 $R[Z]$ 中的多项式。证明 Z^2+Z+2 在 $R[Z]$ 中是既约的。并在具有通常的多项式加法和乘法模 Z^2+Z+2 的域 $F[Z;2]$ 中，算出：

(a) $(2Z+3)\times(Z-1)$；　(b) Z^2；

(c) $(2Z+3)^{-1}$；　(d) 5^{-1}；

(e) $(3Z+2)/(2Z+3)$。

解　因为方程 $Z^2+Z+2=0$ 在实数域中无根，所以 Z^2+Z+2 是一个既约多项式。

(a) $$\begin{aligned}(2Z+3)\times(Z-1)&=2Z^2+Z-3\\&=2(Z^2+Z+2)-Z-7\\&=-Z-7\ (\text{模 } Z^2+Z+2)\end{aligned}$$

(b) $Z^2=-Z-2$

(c) 因为

$$Z^2+Z+2=\left(\frac{1}{2}Z-\frac{1}{4}\right)(2Z+3)+\frac{11}{4}$$

故有 $$1=\frac{4}{11}(Z^2+Z+2)-\frac{4}{11}\left(\frac{1}{2}Z-\frac{1}{4}\right)(2Z+3)$$

所以 $$(2Z+3)^{-1}=-\frac{4}{11}\left(\frac{1}{2}Z-\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{11}Z+\frac{1}{11}$$

(d) 因为 $$5\cdot\frac{1}{5}=1$$

所以 $$5^{-1}=\frac{1}{5}$$

(e) $$(3Z+2)/(2Z+3)=(3Z+2)\times(2Z+3)^{-1}$$

$$=(3Z+2)\left(-\frac{}{11}Z+\frac{1}{11}\right)$$

$$=-\frac{6}{11}Z^2-\frac{1}{11}Z+\frac{2}{11}$$

$$=-\frac{6}{11}(Z^2+Z+2)+\frac{5}{11}Z+\frac{14}{11}=\frac{5}{11}Z+\frac{14}{11}$$

评注 可以证明一个 2 次或 3 次多项式是既约的，当且仅当它无根。但对一个高次多项式，结论不成立。例如，$f(Z)=Z^4+2Z^2+1$ 在实数域中无根，但 $f(Z)$ 可分解为 $f(Z)=(Z^2+1)(Z^2+1)$，因而它不是既约的。可见判断一个多项式 $f(Z)$ 是否是既约的，只有 $f(Z)$ 不超过 3 次时，才能用求根法判断。

10.14 设 $F=Z_2$，Z^3+Z+1 是 $Z_2[Z]$ 中的一个多项式。证明该多项式在 $Z_2[Z]$ 中是既约的。并在具有通常多项式加法和乘法模 Z^3+Z+1 的域 $Z_2[Z;3]$ 中计算：

(a) $(Z^2+1)+(Z^2+Z+1)$；

(b) $Z\times(Z^2+Z+1)$；

(c) $(Z^2+1)\times(Z^2+Z)$；

(d) $(Z+1)^{-1}$;

(e) $(Z^2+Z+1)^{-1}$;

(f) $(Z+1)/(Z^2+Z+1)$。

这个域中一共有多少个元素?

解 只要证明 Z^3+Z+1 在 Z_2 中无根。因为 $F=Z_2$,所以 Z 只能取 0 和 1。

当 $Z=0$ 时, $Z^3+Z+1=1$。

当 $Z=1$ 时, $Z^3+Z+1=1+1+1=1 \quad$ (模 2)。

都不为 0,所以 Z^3+Z+1 在 Z_2 中无根,它是一个既约多项式。

(a) $(Z^2+1)+(Z^2+Z+1)=(Z^2+Z^2)+Z+(1+1)=Z$ (系数作模 2 运算)

(b)
$$\begin{aligned} Z\times(Z^2+Z+1) &= Z^3+Z^2+Z \\ &= (Z^3+Z+1)+Z^2+1 \quad (\text{在 } Z_2 \text{ 中 } 1=-1) \\ &= Z^2+1 \quad (\text{模 } Z^3+Z+1) \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} (Z^2+1)\times(Z^2+Z) &= Z^4+Z^2+Z^3+Z \\ &= Z(Z^3+Z+1)+(Z^3+Z+1)+Z+1=Z+1 \end{aligned}$$

(d) 因为
$$Z^3+Z+1=(Z^2+Z)\times(Z+1)+1$$
故有
$$1=(Z^3+Z+1)+(Z^2+Z)\times(Z+1)$$
所以
$$(Z+1)^{-1}=Z^2+Z$$

(e) 用待定系数法求 $(Z^2+Z+1)^{-1}$。设
$$(Z^2+Z+1)\times(aZ^2+bZ+c)=1$$
展开后,并对 Z^3+Z+1 取模,得
$$\begin{aligned} &aZ(Z^3+Z+1)+(a+b)(Z^3+Z+1)+(b+c)Z^2 \\ &\quad +cZ+(a+b+c)=1 \end{aligned}$$
即
$$(b+c)Z^2+cZ+(a+b+c)=1$$
比较系数后得 $a=1,\ b=0,\ c=0$,所以
$$(Z^2+Z+1)^{-1}=Z^2$$

(f) $(Z+1)/(Z^2+Z+1)=(Z+1)\times(Z^2+Z+1)^{-1}$

$=(Z+1)\times Z^2=Z^3+Z^2$

$=(Z^3+Z+1)+(Z^2+Z+1)=Z^2+Z+1$

$Z_2[Z;3]$ 的任一个元素都可写成 $a_0+a_1Z+a_2Z^2$ 的形式，而系数 $a_2,\ a_1,\ a_2\in Z_2=\{0,\ 1\}$。所以域中不同元素共有 $2^3=8$ 个。它们是：

$$0,\ 1,\ Z,\ 1+Z,\ 1+Z^2,\ Z^2,\ Z+Z^2,\ 1+Z+Z^2$$

评注 注意，在 Z_2 中，因为 $1+1=0,\ 1=-1$，所以

$$Z+Z=0,\ Z^2+Z^2=0,\ \cdots$$

10.15 确定一个 $Z_3[Z]$ 中的 2 次既约多项式，因而构造一个有 9 个元素的域。在这个域中找出 Z^{-1}。

解 设 $f(Z)=Z^2+1$，则 $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=2$，$f(Z)$ 在 $Z_3[Z]$ 中无根。因而它是一个既约多项式。

因为 $Z_3[Z;\ 2]$ 中的元素形如 a_0+a_1Z。其中：$a_0,\ a_1\in\{0,\ 1,\ 2\}$，因而 $Z_3[Z;2]$ 中有 9 个元素，它们是：

$$0,\ 1,\ 2,\ Z,\ 2Z,\ 1+Z,\ 1+2Z,\ 2+Z,\ 2+2Z$$

因 $2Z\times Z=2Z^2+Z-2=-2=1$，　故 $Z^{-1}=2Z$。

10.16 设 $f(Z)=Z^2+Z+4$。证明 $f(Z)$ 在 $Z_{11}[Z]$ 中是一个既约多项式。从而构造一个具有 121 个元素的域，并在该域中计算：

(a) $(3+7Z)\times(2+4Z)$；　　(b) $(2+3Z)^{-1}$；

(c) $(4+5Z)/(2+3Z)$。

解 用 $Z=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$ 分别代入 $f(Z)$ 中有：

$f(0)=4$，　$f(1)=6$，　$f(2)=10$，　$f(3)=5$

$f(4)=2$，　$f(5)=1$，　$f(6)=2$，　$f(7)=5$

$f(8)=10$，　$f(9)=6$，　$f(10)=4$

结果都不为零。即 $f(Z)$ 在 Z_{11} 中无根，它是一个既约多项式。

记 $F=Z_{11}$, $F[Z;\ 2]$中的每个元素形如 a_0+a_1Z, a_0, $a_1\in F$, 所以域 $F[Z;2]$(模 Z^2+Z+4)中共有 121 个元素。

(a) $(3+7Z)\times(2+4Z)=6+14Z+12Z+28Z^2$

$=6+4Z+6Z^2$ (模 11 运算)

$=6(Z^2+Z+4)-2Z-18$

$=-2Z-18$ (模 Z^2+Z+4)

$=9Z+4$ (模 11 运算)

(b) 因为 $Z^2+Z+4=(4Z+5)\times(3Z+2)+5$, $5^{-1}=9$

所以 $9(Z^2+Z+4)-9(4Z+5)\times(3Z+2)=1$

$$(3Z+2)^{-1}=-9(4Z+5)=8Z+10$$

(c) $(4+5Z)/(2+3Z)=(4+5Z)\times(3Z+2)^{-1}$

$=(4+5Z)\times(8Z+10)=40Z^2+82Z+40$

$=7Z^2+5Z+7=7(Z^2+Z+4)+(9Z+1)$

$=9Z+1$

10.17 构造一个 4 个元素的域 F, 并确定仿射平面 $AP(F)$ 上的所有直线的平行类。

解 在 $Z_2[Z]$中选定一个既约多项式 $f(Z)=Z^2+Z+1$。于是 $Z_2[Z;\ 2]$对模 $f(Z)$加法和乘法是一个域。因为该域中的元素均有 $a+bZ$ 的形式, 而 a, b 取自 Z_2, 于是域中有 4 个元素, 它们是 0, 1, Z, $1+Z$。故 $Z_2[Z;2]$即是所求的域。

记 $F=\{0, 1, Z, 1+Z\}$。$AP(F)$ 中有 16 个点, 20 条直线。这些直线的分类情况是:

(1) 垂直类: $x=0$, $x=1$, $x=Z$, $x=1+Z$;

(2) 水平类: $y=0$, $y=1$, $y=Z$, $y=1+Z$;

(3) 1 斜率类: $y=x$, $y=x+1$, $y=x+Z$, $y=x+(1+Z)$;

(4) Z 斜率类: $y=Zx$, $y=Zx+1$, $y=Zx+Z$, $y=Zx+(1+Z)$;

(5) $(1+Z)$斜率类：$y=(1+Z)x$，$y=(1+Z)x+1$，$y=(1+Z)x+Z$，$y=(1+Z)x+(1+Z)$。

10.18 试确定仿射平面$AP(Z_k)$的所有直线的平行类。

解 因为Z_k是一个域，k是一个质数，则$Z_k=\{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$。$AP(Z_k)$中的点和直线的一般形式为：

点：(a, b) $\quad a, b\in Z_k$

直线：$x=t$ $\quad t\in Z_k$

或 $y=mx+b$ $\quad m, b\in Z_k$

因此$AP(Z_k)$中的直线共分$k+1$个平行类，每个平行类有k条直线。它们是：

垂直类：$x=t$, $t=0, 1, \cdots, k-1$;

水平类：$y=b$, $b=0, 1, \cdots, k-1$;

1斜率类：$y=x+b$, $b=0, 1, \cdots, k-1$;

2斜率类：$y=2x+b$, $b=0, 1, \cdots, k-1$;

………

$(k-1)$斜率类：$y=(k-1)x+b$, $b=0, 1, \cdots, k-1$。

10.19 (1) 求$AP(Z_7)$中平行于直线$y=3x+4$且过点$(2, 5)$的直线。

(2) 求$AP(Z_{11})$中平行于直线$y=9x+5$且过点$(3, 7)$的直线。

(3) 求$AP(Z_2[Z; 3])$中平行于直线$y=Zx+Z^2$且过点$(Z, Z+1)$的直线。域$Z_2[Z; 3]$中的模多项式是

$$f(Z)=Z^3+Z+1$$

解 (1) 因为所求直线要平行于$y=3x+4$，即它和$y=3x+4$同属一个平行类。设该直线方程为$y=3x+b$，用点$(2, 5)$的坐标代入，求b，则

$$5=3\times2+b$$

所以 $$b=-1=6$$

即直线 $y=3x+6$ 为所求。

(2) 类似于(1)的过程，很容易求出直线为

$$y=9x+2$$

(3) 设所求直线方程为 $y=Zx+b$，用点 $(Z, Z+1)$ 的坐标代入后

$$(Z+1)=Z^2+b$$

所以 $$b=(Z+1)-Z^2=1+Z+Z^2$$

即直线 $y=Zx+(1+Z+Z^2)$ 为所求。

10.20 证明根据仿射平面 $AP(F)$ 上 $n-1$ 个非零斜率类。$y=m_ix+k$，$m_i\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, n-1$。作出 $n-1$ 个拉丁方 $L_1, L_2, \cdots, L_{n-1}$ 是两两正交的。这里 $|F|=n$。

证 在 $\{L_1, L_2, \cdots, L_{n-1}\}$ 中任取两个拉丁方 L_i 和 L_j，$i\neq j$。若 L_i 和 L_j 不正交，则并置 L_i 和 L_j 后，有某个偶对 (r, s) 将至少出现两次。r 是构造拉丁方 L_i 时选用的直线号，s 是构造 L_j 时选用的直线号。这就意味着斜率为 m_i 的类中第 r 条直线 $y=m_ix+k_r$ 和 m_j 类中第 s 条直线 $y=m_jx+k_s$ 相交于两个不同点，这是一个矛盾。所以，L_i 与 L_j 正交。

10.21 设 L_1 和 L_2 是两个 n 阶正交拉丁方，

$$p=\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_n \end{pmatrix}$$

是 n 次置换。若用 p 把 L_1 中的各元素进行置换，即把 1 换威 i_1，把 2 换成 i_2，$\cdots$ 把 n 换成 i_n，得到拉丁方 L_1'。证明 L_1' 仍与 L_2 正交。

证 若 L_1' 与 L_2 不正交，那么我们把 L_1' 和 L_2 并置，会有某偶对 (i, j) 在不同位置上同时出现。因而当我们把 L_1 和 L_2 并置时，会有偶对 (r, j) 在相应的不同位置上同时出现。这里 r 是

使 $i_r=i$ 的整数。但这与 L_1 和 L_2 正交的事实矛盾。

10.22 证明两两正交的 n 阶拉丁方个数不超过 $n-1$ 个。

证 设 $L_1, L_2, \cdots, L_k$ 是两两正交的 n 阶拉丁方。我们要证明 $k\leqslant n-1$。

根据上题的结果，一个拉丁方通过置换 p 的变换不影响它和其它拉丁方的正交关系。因此，我们总可以找到一个置换，使一个拉丁方的第一行(或第一列)成为 $1, 2, \cdots, n$ 的顺序形式。这样的拉丁方称为标准化的。

为了证题方便，我们认为以上 $L, L_2, \cdots, L_k$ 都是标准化的。因为经过标准化后，不影响它们之间的正交关系。

把两个标准化的拉丁方并置后，所得第一行是偶对 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $\cdots$, (n, n)。现在考虑 $L_1, L_2, \cdots, L_k$ 中第2行第一列位置。这些位置上没有一个可以是1，因为1已在它们的第一行第一列中，剩下的只有 $n-1$ 个数可填。如果 $k>n-1$，则根据鸽笼原理，必有两个拉丁方 L_i 与 L_j 填相同的数 t，它们并置后有 (t, t) 偶对，但在第一行中已有 (t, t) 偶对。这与 L_i 和 L_j 是正交的矛盾。因此，$k\leqslant n-1$。

10.23 利用仿射平面，构造3个4阶拉丁方，使其两两正交。

解 利用题10.17中的仿射平面和它的非零斜率类直线及图10.6，并对1斜率类的4条直线编号如下：

1：$y=x$ 2：$y=x+1$

3：$y=x+Z$ 4：$y=x+(1+Z)$

在这些直线经过的点上填写出它们的编号，把这些编号依照它们在 $AP(F)$ 中的位置，相应地填写在 4×4 方阵 L_1 中，L_1 就是一个4阶拉丁方。

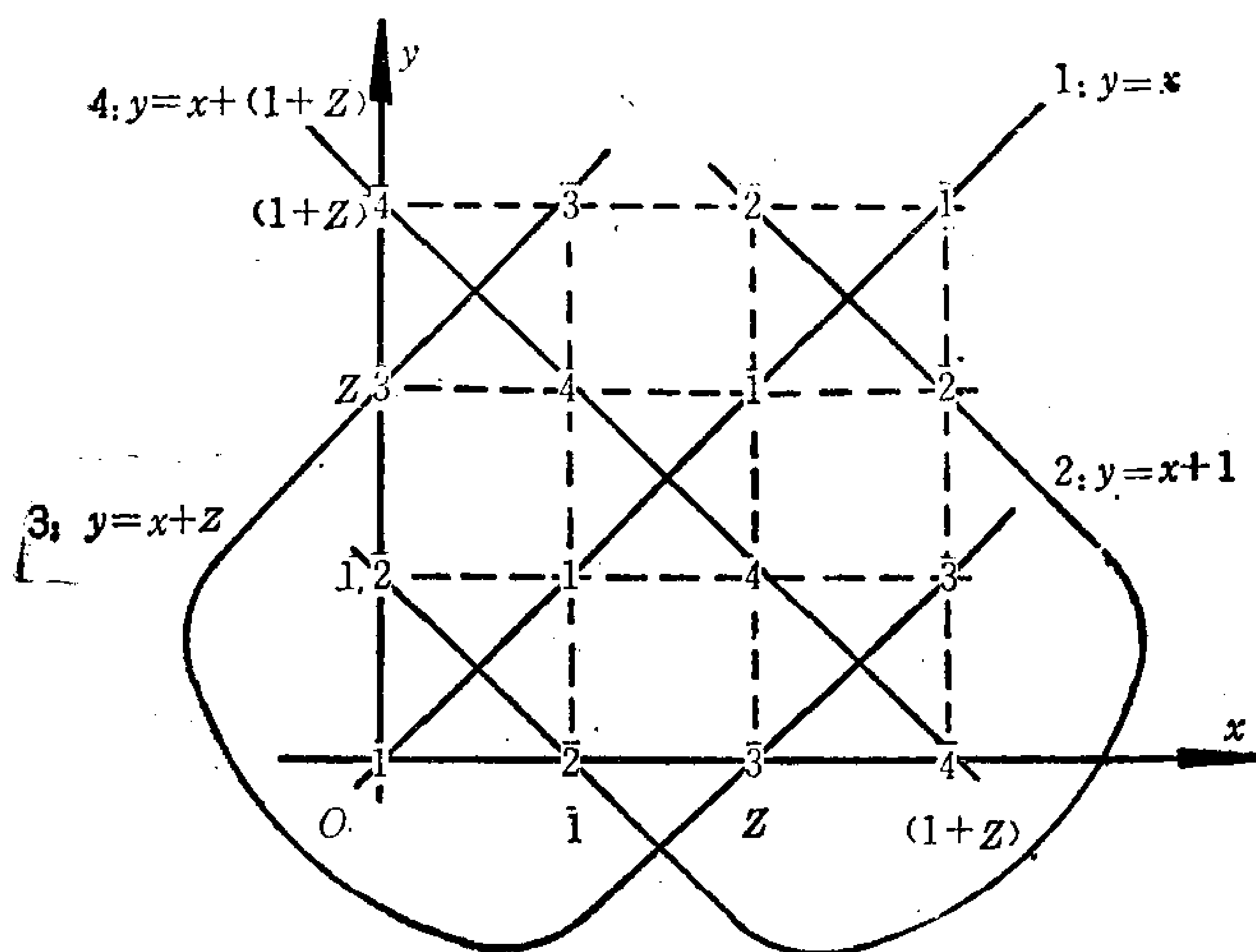


图 10.6

$$L_1=\begin{bmatrix}4&3&2&1\\3&4&1&2\\2&1&4&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}$$

把 Z 斜率类的直线编号为:

1: $y=Zx$　　　　2: $y=Zx+1$

3: $y=Zx+Z$　　　4: $y=Zx+(1+Z)$

再作类似于图 10.6 的一个平面,得到另一个 4 阶拉丁方 L_2。

$$L_2=\begin{bmatrix}4&2&1&3\\3&1&2&4\\2&4&3&1\\1&3&4&2\end{bmatrix}$$

最后,把 $(1+Z)$ 斜率类的直线 $y=(1+Z)x$, $y=(1+Z)x+1$, $y=(1+Z)x+Z$, $y=(1+Z)x+(1+Z)$ 依次编号为 1, 2, 3,

4。用同样的方法，得到一个拉丁方 L_3。

$$L_3=\begin{bmatrix}4&1&3&2\\3&2&4&1\\2&3&1&4\\1&4&2&3\end{bmatrix}$$

由题 10.20 可知，这 3 个 4 阶拉丁方是两两正交的。

10.24 证明定理 10.4——作 $n=p^t$ 个元素的域 F，设 F 的元素是 $\alpha_0=0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}=1$。构造数组 $L_1,L_2,\cdots,L_{n-1}$ 如下：

$$L_k=(a_{ij}^{(k)})$$

其中 $a_{ij}^{(k)}=\alpha_k\cdot\alpha_i+\alpha_j$，$i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$。那么 $L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_{n-1}$ 是两两正交拉丁方。

证 先证 $L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n$ 是拉丁方。若不然，L_k 中第 i 行有两个元素相同，设 $a_{ij}^{(k)}=a_{ih}^{(k)}$，即 $\alpha_k\cdot\alpha_i+\alpha_j=\alpha_k\cdot\alpha_i+\alpha_h$。则 $\alpha_j=\alpha_h$，所以 $j=h$。

若 L_k 中第 j 列有两个元素相同，设 $a_{hj}^{(k)}=a_{ij}^{(k)}$，即 $\alpha_k\cdot\alpha_h+\alpha_j=\alpha_k\cdot\alpha_i+\alpha_j$。则 $\alpha_k(\alpha_h-\alpha_i)=0$。所以 $\alpha_h=\alpha_i$，$h=i$。

再证两两正交。若 L_g 和 L_h $(g\neq h)$ 不正交，则存在

$$(a_{ij}^{(g)},\ a_{ij}^{(h)})=(a_{fk}^{(g)},\ a_{fk}^{(h)})$$

即

$$\alpha_g\cdot\alpha_i+\alpha_j=\alpha_g\cdot\alpha_f+\alpha_k \tag{1}$$

$$\alpha_h\cdot\alpha_i+\alpha_j=\alpha_h\cdot\alpha_f+\alpha_k \tag{2}$$

相减得
$$(\alpha_g-\alpha_h)\cdot\alpha_i=(\alpha_g-\alpha_h)\cdot\alpha_f$$

由于 $\alpha_g\neq\alpha_h$，所以 $\alpha_i=\alpha_f$，$i=f$。代入(1)式得

$$\alpha_j=\alpha_k,\ j=k。$$

10.25 用代数法解题 10.23。

解 已知 4 元素域由以下两表定义：

+	0	1	Z	$1+Z$
0	0	1	Z	$1+Z$
1	1	0	$1+Z$	Z
Z	Z	$1+Z$	0	1
$1+Z$	$1+Z$	Z	1	0

×	0	1	Z	$1+Z$
0	0	0	0	0
1	0	1	Z	$1+Z$
Z	0	Z	$1+Z$	1
$1+Z$	0	$1+Z$	1	Z

为符合拉丁方常见形式，我们用 4 表示 0，用 1 表示 1，用 2 表示 Z，用 3 表示 $1+Z$。按上二表，计算定理 10.4 中的 $a_{ij}^{(k)}$。为了标准化，α_i 按 4, 1, 2, 3 次序，α_j 按 1, 2, 3, 4 次序，α_k 按 1, 2, 3 次序，计算得

$$L_1=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\3&4&1&2\\2&1&4&3\end{bmatrix}\quad L_2=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&1&4&3\\4&3&2&1\end{bmatrix}$$

$$L_3=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\4&3&2&1\\3&4&1&2\end{bmatrix}$$

评注 用几何方法和代数方法所得的结果表面上会不一致。这是几何法中编号和代数法中计算次序不协调所致。但只要

都把它们化成标准型，结果是一致的。所以两种方法是等效的。

10.26 用有限几何法构造出4个两两正交的5阶拉丁方。

解 用 Z_5 作为5元素域。$AP(Z_5)$ 中的4个非零斜率类是：

c1: $y=x+k$

c2: $y=2x+k$

c3: $y=3x+k$

c4: $y=4x+k$

c1类中的直线是 $y=x$, $y=x+1$, $y=x+2$, $y=x+3$, $y=$

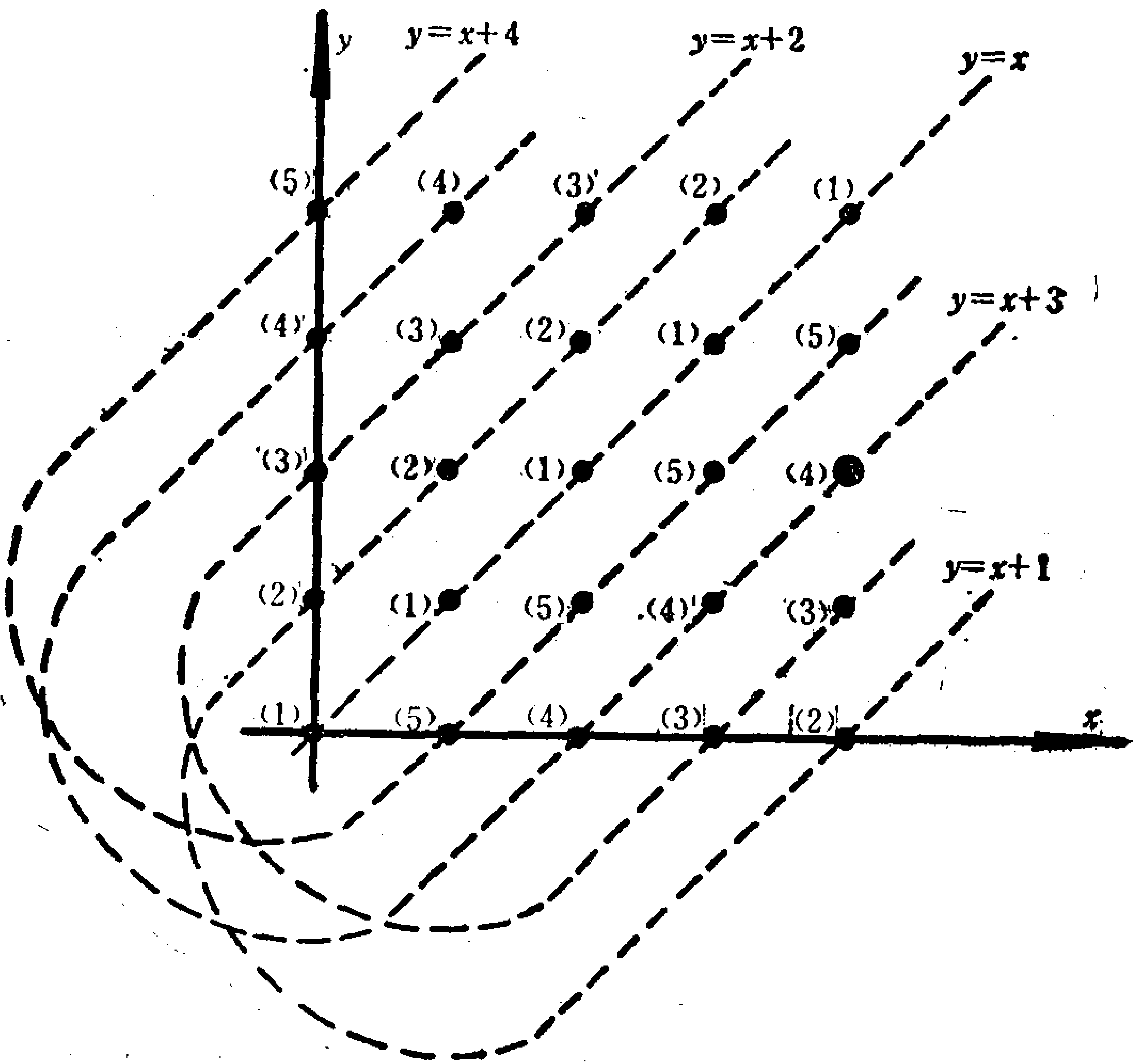


图 10.7

$x+4$, 依次编号为 (1), (2), (3), (4), (5)。于是对应于 $c1$ 类的拉丁方由图 10.7 给出。

即

$$L_1=\begin{bmatrix}5&4&3&2&1\\4&3&2&1&5\\3&2&1&5&4\\2&1&5&4&3\\1&5&4&3&2\end{bmatrix}$$

同理可作出对应于 $c2$, $c3$, $c4$ 的拉丁方:

$$L_2=\begin{bmatrix}5&3&1&4&2\\4&2&5&3&1\\3&1&4&2&5\\2&5&3&1&4\\1&4&2&5&3\end{bmatrix}$$

$$L_3=\begin{bmatrix}5&2&4&1&3\\4&1&3&5&2\\3&5&2&1&4\\2&4&1&3&5\\1&3&5&2&4\end{bmatrix}$$

$$L_4=\begin{bmatrix}5&1&2&3&4\\4&5&1&2&3\\3&4&5&1&2\\2&3&4&5&1\\1&2&3&4&5\end{bmatrix}$$

10.27 用代数法构造 6 个 7 阶拉丁方，使其中任一对都正交。

解　利用定理 10.4 中的公式很容易得到:

$$L_1=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&6&7&1\\3&4&5&6&7&1&2\\4&5&6&7&1&2&3\\5&6&7&1&2&3&4\\6&7&1&2&3&4&5\\7&1&2&3&4&5&6\end{bmatrix}$$

$$L_2=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&5&6&7&1&2\\5&6&7&1&2&3&4\\7&1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7&1\\4&5&6&7&1&2&3\\6&7&1&2&3&4&5\end{bmatrix}$$

$$L_3=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&5&6&7&1&2&3\\7&1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7&1&2\\6&7&1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6&7&1\\5&6&7&1&2&3&4\end{bmatrix}$$

$$L_4=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&6&7&1&2&3&4\\2&3&4&5&6&7&1\\6&7&1&2&3&4&5\\3&4&5&6&7&1&2\\7&1&2&3&4&5&6\\4&5&6&7&1&2&3\end{bmatrix}$$

$$L_5=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&7&1&2&3&4&5\\4&5&6&7&1&2&3\\2&3&4&5&6&7&1\\7&1&2&3&4&5&6\\5&6&7&1&2&3&4\\3&4&5&6&7&1&2\end{bmatrix}$$

$$L_6=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&2&3&4&5&6\\6&7&1&2&3&4&5\\5&6&7&1&2&3&4\\4&5&6&7&1&2&3\\3&4&5&6&7&1&2\\2&3&4&5&6&7&1\end{bmatrix}$$

评注　观察上述 6 个 7 阶拉丁方，它们都有一个规律，就是第 1 行上元素总是向量(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)。其余各行都是把(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)分成两段，其前段在右方，后段在左方。即是$(i+1, i+2, \cdots, 7, 1, 2, \cdots, i)$，对某个$i(i=1, 2, \cdots, 6)$。因而由此似乎可以总结出一个规律：

构造 $n-1$ 个 n 阶两两正交的拉丁方的步骤是：

(1) L_i 的第 1 行总是$(1, 2, \cdots, n)$。

(2) 下一行的第一个元素总是上一行最后一个元素加上 i 再加 1，若结果值大于 n，则把结果值减去 n。

(3) 若(2)中计算出的值是 j，则本行上的 n 个元素就是向量$(j, j+1, \cdots, n, 1, 2, \cdots, j-1)$。

但上述步骤仅对 n 是质数时才有效。

10.28　先分别构造一对 3 阶和 5 阶的正交拉丁方，然后用它们构造一对 15 阶正交拉丁方。

解 因为3和5都是质数，用上题规则很容易构造一对正交拉丁方。

$$A_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\\5&1&2&3&4\\2&3&4&5&1\\4&5&1&2&3\end{bmatrix}$$

用 A_1 和 B_1 构造一个 15×15 方阵 C_1 的方法是，把 C_1 分成9块，每块是一个 5×5 方阵。用 A_1 的元素标记每个对应块，如下所示。

$$C_1=\left[\begin{array}{c|c|c}1&2&3\\\hline 2&3&1\\\hline 3&1&2\end{array}\right]$$

然后，把方阵 B_1 填在 C_1 的每一块中，但是 B_1 的元素在 C_1 中变成了偶对，偶对的第一个分量是块标记，第二个分量是原 B_1 的元素。例如 C_1 的左下角标记为3的块变成：

$$\begin{bmatrix} (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) \\ (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,1) \\ (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,1) & (3,2) \\ (3,4) & (3,5) & (3,1) & (3,2) & (3,3) \\ (3,5) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \end{bmatrix}$$

最后，用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 分别代替序偶(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3, 4), (3, 5), 就得到拉丁方 C_1(见图10.8)。

用类似地方法, 由 A_2 和 B_2 构造出另一个 15 阶拉丁方 C_2 (见图 10.9)。可以证明 C_1 和 C_2 是正交的。

评注 上述方法可以概括为: 若已知一对 n_1 阶正交拉丁方 A_1、A_2 和一对 n_2 阶正交拉丁方 B_1、B_2, 则可构造一对 $n=n_1\cdot n_2$ 阶正交拉丁方 C_1、C_2。(即定理 10.5)构造过程是: 用 A_1 和 B_1

$$C_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 \\ 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 \\ 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 \\ 15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

图 10.8

$$
C_2=\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 \\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 \\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 \\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 \\
15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 \\
14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 \\
6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3
\end{bmatrix}
$$

图 10.9

构造 C_1，用 A_2 和 B_2 构造 C_2。构造 C_1 时，把 C_1 按 A_1 式样分块，并用 A_1 的元素标记 C_1 的每一块，再把 B_1 填入各块。C_1 的元素是偶对，其第一分量是块的标记，第二分量就是 B_1 填入时的相应元素。用同样方法构造 C_2。最后把 C_1、C_2 中的偶对统一编号，代入 C_1、C_2。即得一对 n 阶正交拉丁方。

用上述方法构造的 C_1、C_2 为拉丁方是显而易见的。现证明 C_1、C_2 是正交的。若 C_1、C_2 不正交，并置 C_1 和 C_2 之后，有某个偶对 (a, b) 出现两次，显然这两个相同的偶对不能在同一块中，否则 B_1 和 B_2 不正交。假定一个偶对在甲块中，另一个在乙块中。设甲块和乙块对应于 A_1 的标记分别是 i_1、j_1，对应于 A_2 的标记分别是 i_2、j_2。则在 C_1 中 a 是偶对 (i_1, k_1) 和 (j_1, k_2) 的编号，在 C_2 中 b 是偶对 (i_2, k_3) 和 (j_2, k_4) 的编号。根据编号原则，相同偶对才有相同的编号，因此 $i_1=j_1$，$i_2=j_2$。这样，在 A_1 和 A_2 的并置中有 $(i_1, i_2)=(j_1, j_2)$。但这是不可能的，因为 A_1

与 A_2 正交。这就证明了 C_1 与 C_2 正交。

10.29 我们希望在一定类型的冬小麦田里，测试不同份量的水和各种化肥的效果。假定有 n 种水的份量和 n 种化肥要测试，共有 n^2 种可能的水和化肥的组合。试问如何在一块正方形的地里，设计这种测试实验呢？

解 我们把正方形的地均分成 n^2 个小正方形。让水和化肥的 n^2 种组合分布在这 n^2 块中，每种一块。但小麦高产与否不仅取决于化肥和水的份量，还和土壤的原有肥力有关，而原有肥力不可能在整块地上都很均匀。为了使土壤原肥力的影响最小，最好把 n 种化肥在 n^2 块土地上的分布形成拉丁方 A，把 n 种水的份量在 n^2 块土地上的分布形成拉丁方 B，并使 A、B 正交。例如，若 $n=3$，3 种化肥用 a, b, c 标记，3 种水的份量用 1, 2, 3 标记。合适的实验设计应该是：

a	b	c
b	c	a
c	a	b

2	3	1
1	2	3
3	1	2

并置 $\longrightarrow$

$(a, 2)$	$(b, 3)$	$(c, 1)$
$(b, 1)$	$(c, 2)$	$(a, 3)$
$(c, 3)$	$(a, 1)$	$(b, 2)$

评注 本题说明拉丁方的一种实际应用——实验设计。

10.30 一个 $r\times n$ 数组是一个 $r\times n$ 的拉丁矩形，它的元素取自 $\{1, 2, \cdots, n\}$，而且没有任何元素可在某行或某列中重复出现。显然 $r\leqslant n$。而且当 $r<n$ 时，总可以在这个 $r\times n$ 拉丁矩形上添加 $n-r$ 行，使之构成一个 n 阶拉丁方。试分别把下列 3×6 拉丁矩形 L_1 和 3×7 拉丁矩形 L_2 扩充成 6 阶和 7 阶的拉丁方。并给出由一般形式的 $r\times n(r<n)$ 拉丁矩形，扩充成 n 阶拉丁方的方法。

$$L_1=\begin{bmatrix}1&3&4&6&5&2\\3&4&1&5&2&6\\5&6&3&2&4&1\end{bmatrix}$$

$$L_2=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&1&7&6&5&2\\2&5&7&1&3&4&6\end{bmatrix}$$

解 设 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$，对 $r\times n$ 拉丁矩形的每一列构造一个集合 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$，使得

$$A_i=S-\{k|k\text{在第 }i\text{ 列出现}\}$$

从 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中选出其相异代表系

$$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}\ \text{（有序的）}$$

并把 b_i 从 A_i 中删去。然后把有序集 B 作为 $r\times n$ 矩形的一个扩充行。上述步骤重复 $n-r$ 次，便可得到一个 n 阶拉丁方。

例如，对 L_1，构造的集合是：

$A_1=\{2, 4, 6\}$　　$A_2=\{1, 2, 5\}$

$A_3=\{2, 5, 6\}$　　$A_4=\{1, 3, 4\}$

$A_5=\{1, 3, 6\}$　　$A_6=\{3, 4, 5\}$

选出相异代表系 $B_1=\{2, 1, 5, 3, 6, 4\}$之后，

$A_1=\{4, 6\}$　　$A_2=\{2, 5\}$　　$A_3=\{2, 6\}$

$A_4=\{1, 4\}$　　$A_5=\{1, 3\}$　　$A_6=\{3, 5\}$

再选出相异代表系 $B_2=\{4, 2, 6, 1, 3, 5\}$，之后

$A_1=\{6\}$　　$A_2=\{5\}$　　$A_3=\{2\}$

$A_4=\{4\}$　　$A_5=\{1\}$　　$A_6=\{3\}$

最后选定的相异代表系 $B_3=\{6, 5, 2, 4, 1, 3\}$，于是 L_1扩充为 L_1'：

$$L_1' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

扩充 L_2 所用的步骤由表 10.1 所示。

表 **10.1** 扩充 L_2 的步骤

步　次	A_1	A_2	A_3	A_4
1	{4, 5, 6, 7}	{1, 3, 6, 7}	{2, 4, 5, 6}	{2, 3, 5, 6}
2	{5, 6, 7}	{3, 6, 7}	{2, 4, 5}	{2, 5, 6}
3	{6, 7}	{3, 6}	{4, 5}	{2, 5}
4	{6}	{3}	{5}	{2}

步　次	A_5	A_6	A_7	所选的相异代表系
1	{1, 2, 4, 7}	{1, 2, 3, 7}	{1, 3, 4, 5}	{4, 1, 6, 3, 2, 7, 5}
2	{1, 4, 7}	{1, 2, 3}	{1, 3, 4}	{5, 7, 2, 6, 4, 3, 1}
3	{1, 7}	{1, 2}	{3, 4}	{7, 6, 4, 5, 1, 2, 3}
4	{7}	{1}	{4}	{6, 3, 5, 2, 7, 1, 4}

L_2 扩充为 L_2'，结果为

$$L_2' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

利用 Hall 定理和 $r\times n$ 拉丁矩形的性质很容易证明上述方法对任意的 n 和 $r<n$ 是正确的。这是因为每一 A_i 有 $n-r$ 个元素，而每一 $k=1, 2, \cdots, n$, 和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的任意选取，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k$, 在 $A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}$ 中的每一元素最多重复 $n-r$ 次。所以

$$(n-r)\,|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|$$
$$\geqslant|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+\cdots+|A_{i_k}|=k(n-r)$$

即 Hall 条件 $\qquad |A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\geqslant k$

满足，因而每一步必能选出 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的相异代表系。

10.31 证明

(a) v 阶 Steiner 系统存在的必要条件是 $v=6n+1$ 或 $v=6n+3$。

(b) v 阶 Kirkman 系统存在的必要条件是 $v=6n+3$。

证

(a) (1) 集合 X 的 v 个元素共有$\binom{v}{2}$个偶对。每个三重组中含有三个偶对，欲使每个偶对恰在某个三重组中出现一次，于是三重组个数 b 满足

$$3b=\binom{v}{2}$$

即
$$b=\frac{v(v-1)}{6}$$

(2) X 的任何元素 x 可与 X 的另外 $v-1$ 个元素配成 $(v-1)$ 个含 x 的偶对。每个含 x 的三重组含有两个含 x 的偶对。因此含 x 的三重组个数 r 满足

$$r=\frac{v-1}{2}$$

因此 v 必须是一个奇数。

(3) 由三重组个数 $b=\frac{v(v-1)}{6}$ 是一个整数和 v 是奇数的条件，可知或 $v=3k$ 或 $v-1=3k$，对某个整数 k。

若 $v=3k$，k 必是奇数。设 $k=2n+1$，则

$$v=3k=3(2n+1)=6n+3$$

若 $v-1=3k$，k 必是偶数。设 $k=2n$，则

$$v=3k+1=3(2n)+1=6n+1$$

于是集合 X 存在 Steiner 系统的必要条件是

$$v=\begin{cases}6n+1 & n=1,\ 2,\ \cdots\\ 6n+3 & n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\end{cases}$$

这里 $v=|X|$。

(b) Kirkman 系统是 Steiner 系统的特殊情况，所以 Kirkman 系统的阶数不能越出 $v=6n+1$ 或 $v=6n+3$ 的范围。但 Kirkman 系统中的三重组还须满足"能划分成 $\frac{v-1}{2}$ 个子集，使得 X 的每一元素恰在每个子集的某个三重组中出现一次。"这意味着：

$$\frac{v-1}{2}\quad 是整数 \tag{1}$$

$$\frac{v}{3}\quad 是整数 \tag{2}$$

$v=6n+1$ 时，(2) 显然不满足。$v=6n+3$ 时，

$$b=\frac{v(v-1)}{6}=\frac{v-1}{2}\cdot\frac{v}{3}=(3n+1)(2n+1)$$

即可划分成 $(3n+1)$ 个子集，每个子集含 $(2n+1)$ 个三重组。(1) 和 (2) 都满足，所以 v 阶 Kirkman 系统存在的必要条件是

$$v=6n+3$$

评注 正如提要 10.4 中指出的，它们不仅是必要条件，而

且是充分条件。但后者的证明太深且冗长，我们只好割爱。此外 Steiner 系统和 Kirkman 系统还有其它性质。我国著名已故数学家陆家羲在这方面作出了完整的结果，深受中外学者钦佩。

10.32 试分别构造一个 7 阶和 13 阶的 Steiner 系统。

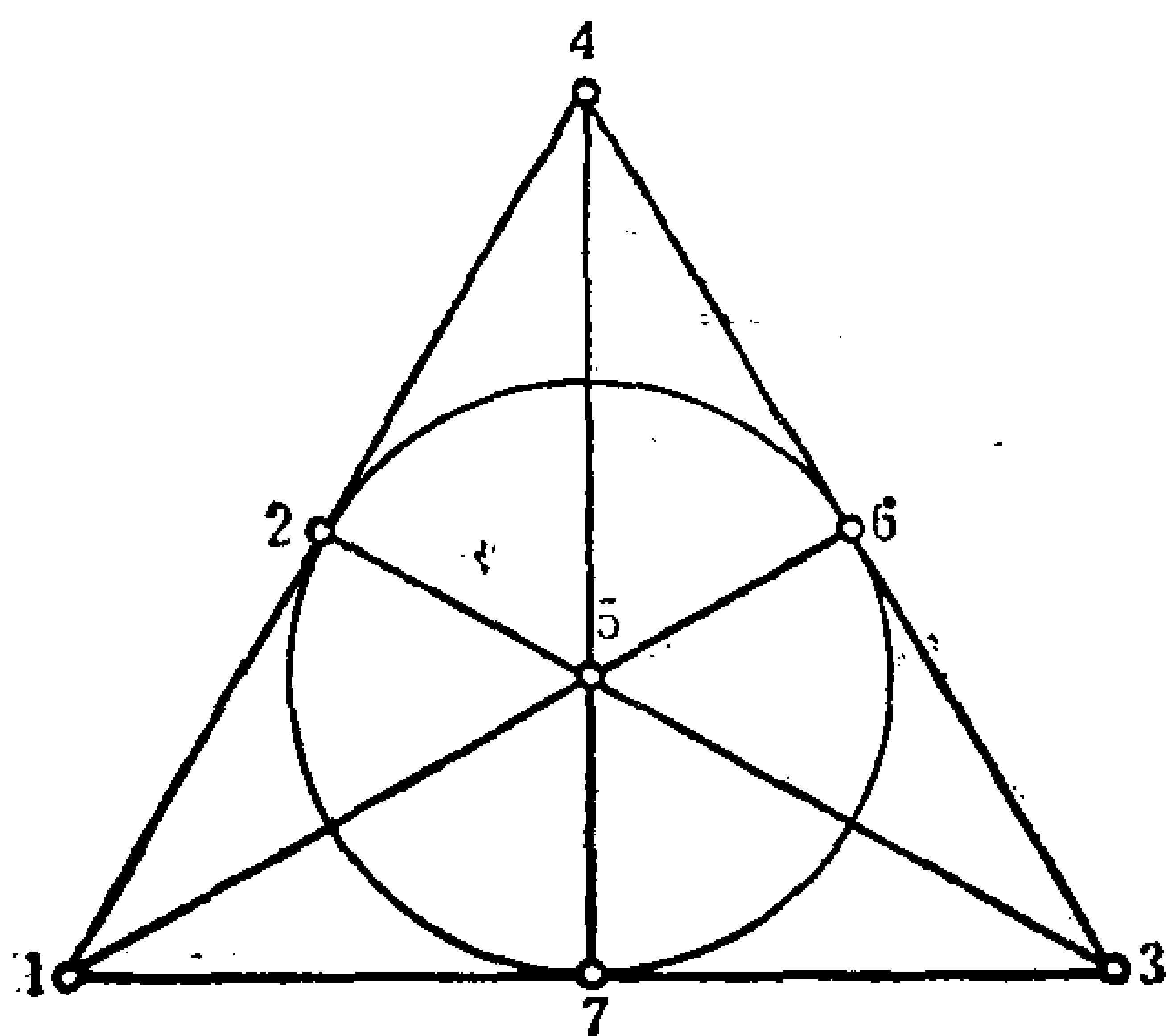


图 10.10

解 对于 7 阶的 Steiner 系统可用一个几何图形表示。图 10.10 中每条直线或圆所穿程的三个点恰组成一个三重组。于是 7 阶的 Steiner 系统由 $b=7(7-1)/6=7$ 个三重组构成，它们是：

(1, 2, 4), (2, 3, 5)
(3, 4, 6), (4, 5, 7)
(2, 6, 7), (1, 3, 7)

若仍使用几何图形去构造 13 阶或更高阶的 Steiner 系统，会遇到不可克服的困难。这里只给出一个结果，因为至今未找出简易的构造方法。

13 阶 Steiner 系统由 $b=13(13-1)/6=26$ 个三重组构成，它们是：

(4, 2, 1), (5, 3, 2), (6, 4, 3), (7, 5, 4)
(8, 6, 5), (9, 7, 6), (10, 8, 7), (10, 3, 1)
(9, 8, 1), (10, 9, 2), (13, 7, 1), (12, 5, 1)
(11, 6, 1), (13, 6, 2), (12, 7, 2), (11, 8, 2)
(13, 8, 3), (12, 9, 3), (11, 7, 3), (13, 10, 4)
(12, 8, 4), (11, 9, 4), (13, 9, 5), (12, 10, 6)

(11, 10, 5), (13, 12, 11)

评注 上述给出的13阶Steiner三重组系统是用填表法而得到的。这种方法是本书主审人方世昌先生首先提出的。用这种方法可以作出任何v阶Steiner系统($v=6n+3$或$v=6n+1$)。遗憾的是这种方法叙述起来很冗长，限于篇幅，这儿不便给出。

如果不用特殊的方法，构造一个高阶的Steiner系统是非常困难的。但是，如果已知一个v阶Steiner系统和一个w阶的Steiner系统，却可以很容易地构造一个$v\cdot w$阶的Steiner系统。

10.33 试利用3阶和7阶的Steiner系统构造一个21阶Steiner系统。并给出如何由一个v阶和一个w阶Steiner系统，构造一个$v\cdot w$阶的Steiner系统的一般方法。

解 设$X=\{a, b, c\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, X的Steiner系统$S_1=\{(a,b,c)\}$, Y的Steiner系统$S_2=\{(1,2,4), (1,3,7), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 6, 7), (3, 4, 6), (4,5,7)\}$。作数组$C$如下：

$$C=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{bmatrix}$$

$$Z=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \end{bmatrix}$$

即C的每一行对应X的一个元素，每一列对应Y的一个元素。然后用1至7, 8至14, 15至21分别表示a_7至a_7, b_1至b_7, c_1至c_7。这样得到一个具有$3\times 7=21$个元素的集合$Z=\{1, 2, \cdots, 21\}$。Z的Steiner系统S的$b=\dfrac{21\times 20}{6}=70$个三重组由以下几部分组成：

(1) Z 的每一列构成一个三重组。即：

(1, 8, 15)，(2, 9, 16)，(3, 10, 17)，(4, 11, 18)

(5, 12, 19)，(6, 13, 20)，(7, 14, 21)

(2) Z 的每一行上对应于 Y 的每个三重组的位置，产生 S 的一个三重组。即：

第 1 行：(1, 2, 4)，(1, 3, 7)，(1, 5, 6)，(2, 3, 5)

(2, 6, 7)，(3, 4, 6)，(4, 5, 7)

第 2 行：(8, 9, 11)，(8, 10, 14)，(8, 12, 13)，(9, 10, 12)

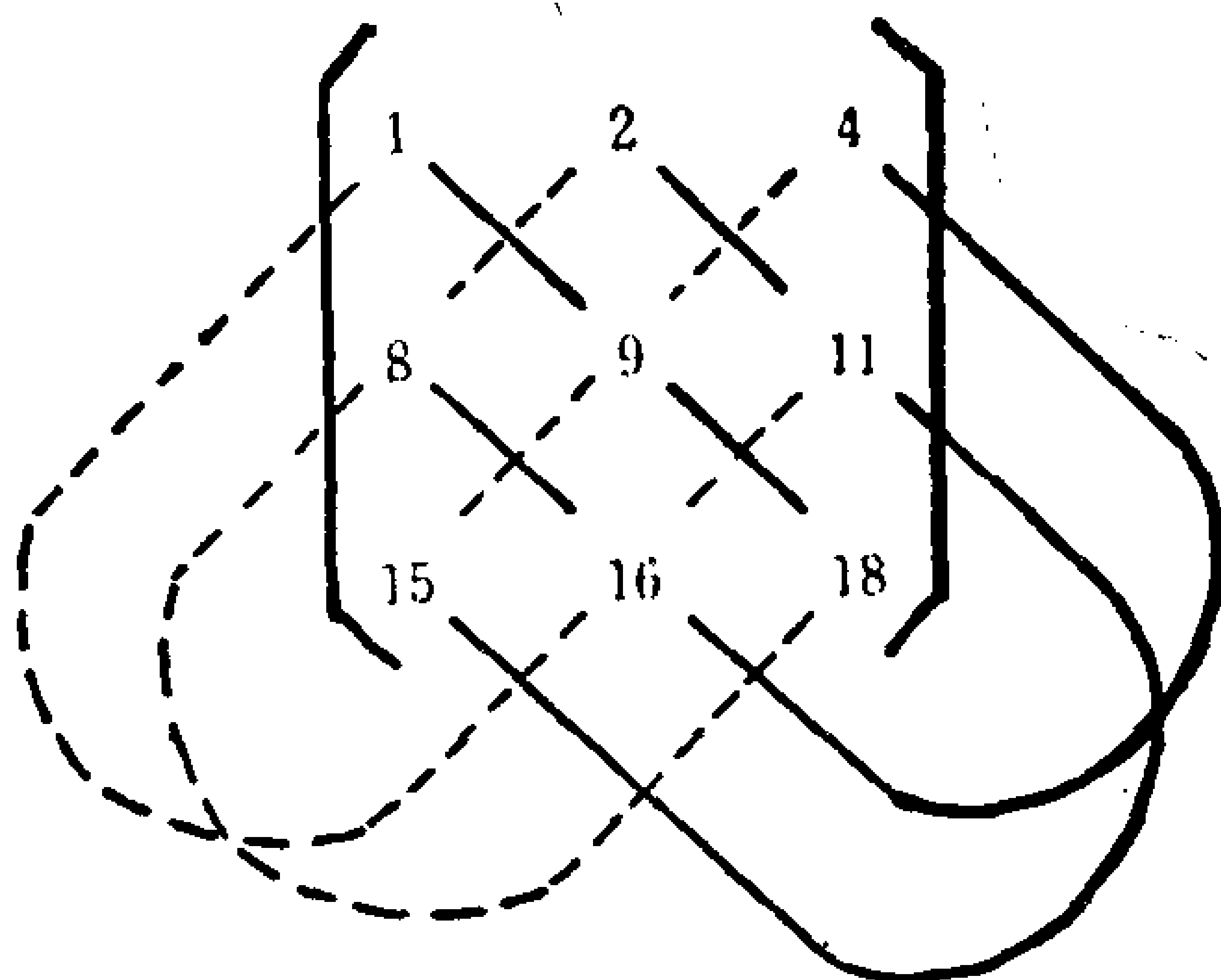
(9, 13, 14)，(10, 11, 13)，(11, 12, 14)

第 3 行：(15, 16, 18)，(15, 17, 21)，(15, 19, 20)

(16, 17, 19)，(16, 20, 21)，(17, 18, 20)

(18, 19, 21)

(3) 对应 S_2 的每一个三重组 (r, s, t)，选定 Z 的三列组成一个 3×3 数组。例如，对应于(1, 2, 4)选定：



这个数组每条对角线上的 3 个数，构成 S 的一个三重组。6 条对角线，共得 6 个三重组，它们是：

(1, 9, 18)，(4, 8, 16)，(2, 11, 15)

(4, 9, 15)，(1, 11, 16)，(2, 8, 18)

因为 S_2 中共有 7 个三重组，所以，它们可以产生 S 的 $7\times6=42$ 个三重组。除上述已写出的 6 个三重组外，另外的 36 个三重组分别是：

对应于
$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\ 8 & 10 & 14\\ 15 & 17 & 21\end{bmatrix}$$
有(1, 10, 21)，(7, 8, 17)，(3, 14, 15)，(7, 10, 15)，(1, 14, 17)，(3, 8, 21)。

对应于
$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 6\\ 8 & 12 & 13\\ 15 & 19 & 20\end{bmatrix}$$
有(1, 12, 20)，(6, 8, 19)，(5, 13, 15)，(6, 12, 15)，(1, 13, 19)，(5, 8, 20)。

对应于
$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 9 & 10 & 12\\ 16 & 17 & 19\end{bmatrix}$$
有(2, 10, 19)，(5, 9, 17)，(3, 12, 16)，(5, 10, 16)，(2, 12, 17)，(3, 9, 19)。

对应于
$$\begin{bmatrix}2 & 6 & 7\\ 9 & 13 & 14\\ 16 & 20 & 21\end{bmatrix}$$
有(2, 13, 21)，(7, 9, 20)，(6, 14, 16)，(7, 13, 16)，(2, 14, 20)，(6, 9, 21)。

对应于
$$\begin{bmatrix}3 & 4 & 6\\ 10 & 11 & 13\\ 17 & 18 & 20\end{bmatrix}$$
有(3, 11, 20)，(6, 10, 18)，(4, 13, 17)，(6, 11, 17)，(3, 13,

18), (4, 10, 20)。

对应于 $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 11 & 12 & 14 \\ 18 & 19 & 21 \end{bmatrix}$

有(4, 12, 21), (7, 11, 19), (5, 14, 18), (7, 12, 18), (4, 14, 19), (5, 11, 21)。

上边列出的所有三重组，就构成了 21 阶 Steiner 系统。

对于一般情况。设 $X=\{1, 2, \cdots, v\}$, $Y=\{1, 2, \cdots, w\}$, $Z=\{1, 2, \cdots, v\cdot w\}$, 把 Z 的元素按以行为主的顺序排成一个 $v\times w$ 的数组。

$$Z=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & w \\ w+1, & w+2 & \cdots & 2w \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (v-1)w+1 & \cdots & \cdots & vw \end{bmatrix}$$

那么 vw 阶 Steiner 系统 S 的三重组由下列三部分构成:

(1) 对于 Z 的每一列，比如第 r 列，如果(i, j, k)是 X 的 Steiner 系统中的一个三重组(以下简称为 X 的一个三重组), 那么(z_{ir}, z_{jr}, z_{kr})是 Z 的一个三重组。Z 的这样的三重组共有

$$w\cdot b_1=\frac{w\cdot v(v-1)}{6} \text{ 个}$$

(2) 对于 Z 的每一行，比如第 i 行，如果(r, s, t)是 Y 的一个三重组，那么(z_{ir}, z_{is}, z_{it})是 Z 的一个三重组。Z 的这样的三重组共有

$$v\cdot b_2=\frac{v\cdot w(w-1)}{6} \text{ 个}$$

(3) 如果(i, j, k)是 X 的一个三重组，(r, s, t)是 Y 的一个三重组，那么由 3×3 矩阵

$$\begin{bmatrix} z_{ir} & z_{is} & z_{it} \\ z_{jr} & z_{js} & z_{jt} \\ z_{kr} & z_{ks} & z_{kt} \end{bmatrix}$$

的每条对角线上的三个数构成 Z 的一个三重组，共 6 个。它们是：

$$(z_{ir},\ z_{js},\ z_{kt}),\ (z_{jr},\ z_{ks},\ z_{it}),\ (z_{is},\ z_{jt},\ z_{kr}),$$
$$(z_{it},\ z_{js},\ z_{kr}),\ (z_{ir},\ z_{ks},\ z_{jt}),\ (z_{is},\ z_{jr},\ z_{kt})$$

Z 的这样的三重组共有 $6\cdot b_1\cdot b_2=\dfrac{vw(v-1)(w-1)}{6}$ 个。

这三部分三重组个数之和恰是

$$\frac{vw(v-1)(w-1)}{6}+\frac{vw(v-1)}{6}+\frac{vw(w-1)}{6}$$
$$=\frac{vw}{6}[(v-1)(w-1)+(v-1)+(w-1)]$$
$$=\frac{vw(vw-1)}{6}=b$$

评注 若已知 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_k$ 阶的一个 Steiner 系统，反复利用上述方法，可以构造一个 $v=v_1v_2\cdots v_k$ 阶的 Steiner 系统。特别地，若已知一个 v 阶的 Steiner 系统，很容易构造一个 v^k 阶的 Steiner 系统，这里 $k\geqslant 1$ 是整数。

10.34 试给出一个 15 阶 Kirkman 系统。(Kirkman 女生问题的原型。)

解 我们把一个 15 阶 Steiner 系统划分成 $(3n+1)=7$ 个 $(n=2)$ 子集。每个子集含 $(2n+1)=5$ 个三重组，且使原集合中每个元素都在每个子集的某个三重组中出现一次，即得 Kirkman 系统，它们是：

$T_1=\{(1,\ 2,\ 3),\ (4,\ 8,\ 12),\ (5,\ 10,\ 15),\ (6,\ 11,\ 12),$
$(7,\ 9,\ 14)\}$

$T_2=\{(1, 4, 5), (2, 8, 10), (3, 13, 14), (6, 9, 15),$
$(7, 11, 12)\}$

$T_3=\{(1, 6, 7), (2, 9, 11), (3, 12, 15), (4, 10, 14),$
$(5, 8, 13)\}$

$T_4=\{(1, 8, 9), (2, 12, 14), (3, 5, 6), (4, 11, 15),$
$(7, 10, 13)\}$

$T_5=\{(1, 10, 11), (2, 13, 15), (3, 4, 7), (5, 9, 12),$
$(6, 8, 14)\}$

$T_6=\{(1, 12, 13), (2, 4, 6), (3, 9, 10), (5, 11, 14),$
$(7, 8, 15)\}$

$T_7=\{(1, 14, 15), (2, 5, 7), (3, 8, 11), (4, 9, 13),$
$(6, 10, 12)\}$

10.35 试给出一个 9 阶 Kirkman 系统。

解 可把一个 9 阶 Steiner 系统分成 $\frac{9-1}{2}=4$ 个子集，得到：

$$S_1=\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$$
$$S_2=\{(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9)\}$$
$$S_3=\{(1, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8)\}$$
$$S_4=\{(1, 6, 8), (2, 4, 9), (3, 5, 7)\}$$

这是小型的 Kirkman 女生问题，即 9 个女生，每天散步排成 3 行，每行 3 人，相继 4 天的散步编队计划。

第十一章　最优化问题

内容提要

本章介绍具有组合论外表的一些最优化问题的理论和算法，但不包括图论和线性规划中的最优化问题，因为它们虽属组合数学，但都已发展壮大，从组合数学中分离出去，独立成为一门学科，已有专书讨论。

11-1　稳定指派

1．稳定指派的意义

稳定指派，亦称**稳定匹配**或**稳定结合**，是偶图匹配问题的简单推广。它的意义可用以下数学模型表述。

设有 n 个男孩 $M=\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$ 和 n 个女孩 $G=\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$。每个男孩对每个女孩按他对她们的喜爱程度分成等级 1, 2, …, n。而没有相持的，即任何男孩不能把两个女孩排成同样等级或不对某个女孩安排等级；每个女孩对每个男孩也同样给出等级而没有相持情况。一种指派就是男孩和女孩的完全匹配(即每个男孩都有一个女孩作为其伙伴)。如果一种指派中存在两个男孩 a 和 b，他们分别被指派与女孩 A 和 B 结合，但是 a 喜欢 B 胜于 A，同时 B 喜欢 a 胜于 b，那末这样的指派就是**不稳定指派**。如果一个指派，它不是一个不稳定指派，则称这个指派是**稳定指派**。

稳定指派问题，一般用选择等级矩阵描述。选择等级矩阵是一个 $n\times n$ 矩阵 A，它的每一个元素 $a_{ij}=(u, v)$ 是一个偶对，其中 u 是 m_i 对 g_j 的评价等级，v 是 g_j 对 m_i 的评价等级。

2. 延期接受算法

算法 11.1 根据选择等级矩阵求稳定指派，步骤如下:

1) 对每一个女孩 $g_i(i=1, 2, \cdots, n)$，建立一个等待接受队列 Q_i。开始时，每个队列都空。

2) 对每一个男孩 $m_i(i=1, 2, \cdots, n)$，按照他的第一选择 g_j，使之处于 g_j 的等待接受队列 Q_j 中。

3) 若各等待队列均不空，则算法结束。此时若 Q_i 队列中有 m_j 等待接受则 (m_j, g_i) 被配对。否则

4) 在同一队列 Q_i 中若有多于一个男孩在等待接受，便按 g_i 对他们的评价等级，保留一个等级最高者而拒绝其他人。

5) 凡是第 4) 步上被拒绝接受的人，按他的下一选择等级继续排队等待接受，并转第 3) 步。

这个算法是正确的，理由是:

a) 算法会终止。因为队列 Q_i 一旦有人就不再变空。而每个男孩最多只能进行 n 次选择，算法每进行一次循环，至少有一个男孩的可选择次数要减 1，所以不可能无限地进行下去，最久也只能持续到有男孩进行了 n 次选择，因为那时该男孩已遍历所有女孩，所有队列 Q_i 就不会是空。故算法总可终止。

b) 算法终止时所得的指派是稳定的。假定在此指派中，a 已指派给 A，b 已指派给 B，但 b 喜欢 A 胜过 B。那末算法的某步上，b 选 A 而被 A 拒绝，因为 A 喜欢另一个人胜过 b，最后 A 得到 a，肯定 a 胜过被 A 拒绝的一切人，包括 b。故这一指派是稳定的。

由此可得出结论:稳定指派总是存在的。

定理 11.1 延期接受算法所得的稳定指派是对男孩最优的(证明见题 11.10)。

所谓**对男孩最优**是指在每一稳定指派中，与每个男孩结伴

的女孩的等级都不会超过延期接受算法所确定的女孩的等级。

如果把延期接受算法中男孩和女孩交换角色，即让女孩执行选择功能，男孩执行拒绝功能，得出的稳定指派，是对女孩最优的。

11-2 核心分配

1. 核心分配的意义

核心分配问题可用商人作商品交换的模式描述。n 个商人每人带一件商品在市场上作交易。每个商人对每件商品给出评价等级且假定没有相持情况。在市场上作了一些物物交换之后，某些商品更换了主人，但仍然每人持有一种商品。这种 n 个商品的重新分配便称之为一个**分配**。如果分配后不存在下述情况：可能有小于 n 个商人集合 S，在 S 的范围内，他们按照对商品的评价等级互易某些商品之后，使得每一个人都得到比原来分配后更为满意的商品。则称这次分配是一个**核心分配**。

核心分配问题与稳定指派问题类似，也用商人对商品的评价等级列成的 $n\times n$ 矩阵 A 描述。所不同的是，这里商品完全是被动的，因而评价等级矩阵的元素是单值而不是偶对。矩阵第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 代表商人 T_i 对商人 T_j 原来持有的商品的评价等级。例如

$$\begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

中，$a_{12}=1$，表示商人 T_1 对商人 T_2 的商品评价等级是 1，余类推。注意这里 T_i 既表示商人，又表示该商人的商品，以下都遵守这一约定。

2. 求核心分配的算法

对给定的评价等级矩阵,核心分配一般说来不是唯一的。但由下述算法可知至少存在着一个核心分配。算法的核心思想是简单的:首先,每个商人都把手伸向他所最喜欢的商品(也可以伸向自己原来的商品)。先让可以轮转获得最佳商品的人获得最佳商品。例如,甲认为乙的商品最好,乙认为丙的商品最好,丙认为甲的商品最好,则甲乙丙就构成一个轮转。若甲认为自己的商品最好,则甲本身也算作一个轮转。这些轮转中的商人获得最佳商品后就不再参加交易。那些未得到最佳商品的商人,则按他们对剩下的商品的喜欢程度,再利用上述方法,使其中一些人得到现有条件下的最佳商品。如此以往,直到所有的人都得到尽可能满意的商品。在算法中这一想法可用图论的术语来描述,一个轮转就相当于一条有向基本回路。

算法 11.2

1) 置 $k\leftarrow 1$, $N_0\leftarrow\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$, 这里 $\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$是商人的集合。

2) 作有向图 D_k, D_k 以 $M=N_0-\bigcup_{i=1}^{k-1}N_i$ 的元素为顶点。D_k 中存在有向边$\langle T_i, T_j\rangle$当且仅当在 M 范围内 T_i 对 T_j 的商品评价最高。

3) 由于 D_k 的每一结点有出度 1, 根据图论知识, D_k 中至少有一条基本回路。设构成此回路的顶点集为 N_k, 记录下 N_k 组成的回路后, 从 D_k 中删去这个基本回路, 因为在基本回路上的所有商人已得到各自的最佳商品。

4) 如果 $M-N_k=\varnothing$, 打印 $N_1, N_2, \cdots, N_k$ 组成的诸回路, 即得一核心分配。否则, 置 $k\leftarrow k+1$, 然后转第 2) 步。

这个算法是正确的。首先它显然能够正常终止。其次, 可以证明终止后所得的分配是核心分配。不妨设算法终止之后所

得的基本回路是 $N_1, N_2, \cdots, N_p$。若有子集 $S\subset N_0$, 则存在最小下标 j, $1<j\leqslant p$, 使 $S\cap N_j\neq\varnothing$。于是

$$S\subseteq N_0-N_1-N_2-\cdots-N_{j-1}$$

设 T_s 是 $S\cap N_j$ 中的任一商人, 根据上述算法, 他在算法的第 j 次循环中得到 $N_0-N_1-N_2-\cdots-N_{j-1}$ 中的最佳商品, 因而也是 S 中的最佳商品。因此, 通过在 S 中进行交易, T_s 不能改进他的所得。根据定义, 上述算法得出的分配是核心分配。

11-3 Hitchcock 运输问题

1. Hitchcock 运输问题的意义

同一种商品分布于 m 个供应站 $s_1, s_2, \cdots, s_m$, 各站的存贮量分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 个单位。今要把这些商品运输到 n 个需求站 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 它们分别需要 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 个单位。假定

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$$

设从第 i 个供应站到第 j 个需求站的单位物资运费是 c_{ij}, 每一供应站到每一需求站的单位物资运费用矩阵 $C=(c_{ij})$ 表示。

从第 i 个供应站运到第 j 个需求站的物资数量是 x_{ij} 个单位, 每一供应站运到每一需求站的物资数量用矩阵 $X=(x_{ij})$ 表示。若 x_{ij} 满足以下条件:

(i) $x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n$;

(ii) $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad i=1, 2, \cdots, m$;

(iii) $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad j=1, 2, \cdots, n$。

则称 X 为一个运输计划。记运输费用为

$$C*X=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

问如何设计运输计划, 使 $C*X$ 最小。

定理 11.2 至少存在一个运输计划。

这一定理容易证明。因为 $d=\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j>0$, 可作

$$x_{ij}=\frac{a_ib_j}{d}\geqslant 0 \quad i=1, 2, \cdots, m; \ j=1, 2, \cdots, n$$

而
$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{d}=\frac{a_i}{d}\sum_{j=1}^{n}b_j=a_i \quad i=1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_ib_j}{d}=\frac{b_j}{d}\sum_{i=1}^{m}a_i=b_j \quad j=1, 2, \cdots, n$$

所以 $X=(x_{ij})$是运输计划。

2. 运输计划的重要性质

任何一个运输计划 X, 都可以用一个二部图(即偶图)表示。方法是作结点 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 代表 m 个供应站, 结点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 代表 n 个需求站, 从结点 s_i 到结点 t_j 有一条边当且仅当 $x_{ij}\neq 0$。所得的图即是运输计划 X 的二部图, 记作 $BG(X)$。

定理 11.3 若运输计划 $X=(x_{ij})$使得 $BG(X)$含有一个基本回路, 那末有一个运输计划 Y, 使得 $BG(Y)$不含回路且满足

$$C*Y\leqslant C*X$$

(证明见题 11.20)

这个定理告诉我们, 求最优运输计划仅需要考虑其二部图没有回路的运输计划。

定理 11.4 当供、求量 $a_1, a_2, \cdots, a_m; b_1, b_2, \cdots, b_n$ 给定时, 若运输计划 X 的二部图 $BG(X)$没有回路, 那末没有其它的运输计划能具有和 $BG(X)$相同的二部图。(证明见题 11.29)

这个定理的意义在于, 结点集 $s_1, s_2, \cdots, s_m; t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的二部图仅有有限个, 因而对于给定的供、求量只有有限个运输计划其二部图没有回路, 这样我们可以在有限个运输计划中寻找最优运输计划。

西北角规则——求其二部图无回路的运输计划的方法。

设供、求量为 $a_1, a_2, \cdots, a_m; b_1, b_2, \cdots, b_n$。构造运输计划 $X=(x_{ij})$ 的步骤如下：

1）如果 $m+n=2$，则取 $x_{11}=a_1=b_1$，结束。

2）如果 $m+n>2$，则先求矩阵的西北角（即左上角）的第一个元素 x_{11}，方法是：

（i）若 $a_1<b_1$，则令 $x_{11}=a_1$，$x_{12}=x_{13}=\cdots=x_{1n}=0$，并把 b_1 变成 b_1-a_1。这样就不再考虑第1行，剩下只需考虑供、求量为 $a_2, a_3, \cdots, a_m; b_1-a_1, b_2, \cdots, b_n$ 对应的 $(m-1)\times n$ 子矩阵。

（ii）若 $a_1>b_1$，则令 $x_{11}=b_1$，$x_{21}=x_{31}=\cdots=x_{m1}=0$，并把 a_1 变成 a_1-b_1。这样就不再考虑第1列，剩下只需考虑供、求量为 $a_1-b_1, a_2, \cdots, a_m; b_2, b_3, \cdots, b_n$ 的对应 $m\times(n-1)$ 子矩阵。

（iii）若 $a_1=b_1$，则令 $x_{11}=a_1$，$x_{12}=x_{13}=\cdots=x_{1n}=0$ 和 $x_{21}=x_{31}=\cdots=x_{m1}=0$。这样就可不再考虑第1行和第1列，剩下只需考虑供求量为 $a_2, a_3, \cdots, a_m; b_2, b_3, \cdots, b_n$ 的对应 $(m-1)\times(n-1)$ 子矩阵。

对所得子矩阵，再用上述方法继续构造，如此以往，直至结束。

例如，供应量为5，3，5，需求量为4，3，6时，用西北角规则求运输计划 $X=(x_{ij})$ 的过程如下：

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right]\begin{array}{l}5\\3\\5\end{array}\\ \begin{array}{ccc}4 & 3 & 6\end{array}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc}4 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{array}\right]\begin{array}{l}\not{5}\ 1\\3\\5\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\not{4} & 3 & 6\\ 0 & & \end{array}\end{array} \longrightarrow$$

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} & \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 0 \\ 3 & & \\ 5 & & \end{array} \\
\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & \end{array} &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} & \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \\ 5 & & \end{array} \\
\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & \\ & 0 & \end{array} &
\end{array}
\longrightarrow
$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} & \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & & \end{array} \\
\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ & 0 & \end{array} &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & \end{array} \\
\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ & 0 & 0 \end{array} &
\end{array}
$$

容易证明应用西北角规则求得的非零 x_{ij} 都是

$$(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{ip})-(b_{j1}+b_{j2}+\cdots+b_{jq}) \tag{11-1}$$

或

$$(b_{j1}+b_{j2}+\cdots+b_{jq})-(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{ip}) \tag{11-2}$$

的形式，这里 $a_{ik}\in\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$b_{jk}\in\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 且 $p\leqslant m$，$0\leqslant q\leqslant n$。

定理 11.5 设 $X=(x_{ij})$ 是一个运输计划，$u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是分别对应于每个供应站和需求站的任意实数。如果对 $i=1, 2, \cdots, m$, $j=1, 2, \cdots, n$，满足

$$u_i+v_j\leqslant c_{ij} \tag{11-3}$$

那末 X 的耗费满足

$$C*X\geqslant\sum_{i=1}^{m} a_i u_i+\sum_{j=1}^{n} b_j v_j \tag{11-4}$$

再者，如果每当 $x_{ij}>0$ 时，还满足

$$u_i+v_j=c_{ij} \tag{11-5}$$

这时则(11-4)式取等号。(证明见题 11.32)

本定理的重要性在于：如果我们能根据 X，找出 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 和 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，满足(11-3)式和(11-5)式，则可推知X就是最优运输计划。这是因为对任意运输计划 $X'=(x'_{ij})$，由(11-4)式有

$$C*X'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x'_{ij}\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j=C*X$$

本定理的逆定理亦真：如果 X 是最优运输计划，那末存在着数 $u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n$ 满足(11-3)式和(11-5)式(证明见题 11.34)。

根据定理 11.3，定理 11.5 及其逆定理，并由下边的算法 11.3，能保证找出 $u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n$，并得出以下定理。

定理 11.6 运输计划最小的耗费等于和式

$$\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$$

的最大值。其中 $u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n$ 满足

$$u_i+v_j\leqslant c_{ij} \quad i=1, 2, \cdots, m, \ j=1, 2, \cdots, n$$

3．求最优运输计划的算法

算法 11.3 已知供、求量 $a_1, a_2, \cdots, a_m$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 和单位运费矩阵 $C=(c_{ij})$，求最优运输计划 X。并暂时假定由以下步骤 1) 和 3) 得出的运输计划的二部图都是连通的。

1) 用西北角规则构造一个其二部图无回路的运输计划 $X=(x_{ij})$。

2) 确定数 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 和 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，使得每当 $x_{ij}\neq 0$ 满足

$$u_i+v_j=c_{ij}$$

因为 $BG(X)$ 是 $m+n$ 个点的连通无回路的二部图，它恰有

$m+n-1$ 条边，对应地有 $m+n-1$ 个 $x_{ij}\neq 0$。于是只能列出 $m+n-1$ 个方程

$$u_i+v_j=c_{ij}$$

但共有 $m+n$ 个未知量，方程组的解不唯一。我们可设 $u_1=0$，然后利用方程逐个求出其余各 u_i, v_j 之值，得到一个解。

3) 验证和修改。即对 $x_{ij}=0$ 的所有 i, j, 计算 $c_{ij}-u_i-v_j$，如果它们都满足 $c_{ij}-u_i-v_j\geqslant 0$，那末根据定理 11.5，$X$ 是一个最优运输计划。

否则，若对某个 $x_{i_0j_0}=0$ 有 $c_{i_0j_0}-u_{i_0}-v_{j_0}<0$，则对二部图作下列修改。

(i) 在 $BG(X)$ 中加一条新边 $e_0=(s_{i_0}, t_{j_0})$，于是产生一条回路 $\gamma_0=(t_{j_0}, s_{i_0}, t_{j_1}, s_{i_1}, \cdots, t_{j_k}, s_{i_k}, t_{j_0})$。

(ii) 取 $\delta=\min\{x_{i_0j_1}, x_{i_1j_2}, \cdots, x_{i_kj_0}\}$。

(iii) 令 $x_{i_0j_0}=\delta$，并对回路 γ_0 上其余各边(从 $x_{i_0j_1}$ 起)交替地减去、加上 δ。这样可删去 γ_0 的某些边产生新的无回路的二部图。可以证明(见题 11.33)新二部图对应的运输计划的耗费比原来的减少了。

因为其二部图无回路的运输计划个数有限，于是反复执行步骤 2) 和 3)，最终可得到一个最优的运输计划。

ε-运输计划。算法 11.3 实际上不能执行，因为步骤 1) 和 3)(iii)得出的运输计划的二部图有可能不连通。我们称这种情况是**退化的**。若要算法 11.3 实际可执行，应在步骤 1)和 3)(iii)之后添上以下语句:

"若所得的 X 是退化的，我们改供、求量为 $a_1+n\varepsilon$, a_2, $\cdots$, a_m; $b_1+\varepsilon$, $b_2+\varepsilon$, $\cdots$, $b_n+\varepsilon$, C 照旧。然后转步骤 1)，否则转步骤 2)。"

这个新的运输问题称为**ε-运输问题**。求得的运输计划为 ε-

运输计划。ε 是可以任意小的正实数。

原运输问题出现退化的原因是求 x_{ij} 的过程中，使某个(11-1)式或(11-2)式等于0。换言之，出现了

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p}=b_{j_1}+b_{j_2}+\cdots+b_{j_q} \quad (p<m,\ q<n)$$

的情况。改成 ε-运输问题后，运输计划中不为零的 x_{ij} 都是

$$\pm[(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p})-(b_{j_1}+b_{j_2}+\cdots+b_{j_q}+q\varepsilon)]$$

或 $\quad \pm[(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p}+n\varepsilon)-(b_{j_1}+b_{j_2}+\cdots+b_{j_q}+q\varepsilon)]$

形式的正数。这里 $p<m,\ q<n$。

容易看出，只要 $\varepsilon>0$ 取得适当小，上式不可能等于0。因此，新的退化不会出现，这样算法11.3就可正确执行了。

另外，不难看出，ε-运输计划，我们记为 X_ε，有以下形式

$$X_\varepsilon=X+\varepsilon A$$

这里 εA 表示 $m\times n$ 整数矩阵 A 的每一元素乘以 ε 所得的矩阵。当 X_ε 无回路时，X 也无回路。当 X_ε 是由步骤3)求出的最优运输计划时，因 ε 可以任意地小，若我们置 $\varepsilon=0$，即得原运输问题的最优运输计划 X。

11-4 最优指派问题

1. 最优指派的意义

设 n 是大于1的正整数，假定有 n 个人指派给 n 个工作。设第 i 个人做第 j 件工作的速度(或效率)是 c_{ij}。每个人对每一工作的速度用 $n\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$ 表示，称为**速度矩阵**。指派用 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的一个排列 $(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n)$ 表示，它表示派第 k 个人做第 i_k 件工作，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。n 个人的总速度定义为

$$c_{1i_1}+c_{2i_2}+\cdots+c_{ni_n} \tag{11-6}$$

问怎样指派，才能获得最大总速度。

2. 最优指派问题的性质及解法

最优指派问题可以看作是 n 个供应量为1，1，…，1和 n

个需求量为1, 1, …, 1的Hitchcock运输问题。因为给定一个指派$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，即可构造一个运输计划X，使X中的$x_{2i_1}=x_{2i_2}=\cdots=x_{ni_n}=1$，其它$x_{ij}=0$，此时$C*X$即为(11-6)式。反之，给定上述运输问题的其二部图无回路的运输计划X，肯定每行每列有且仅有一个1，其余元素为0。设第k行的1在第j_k列，因此$(j_1, j_2, \cdots, j_n)$即是一个指派。

但有一点与上节不同，用运输计划术语来说，上节求的是最小耗费，现在求的是最大耗费。所幸者，上节所讲的性质和算法均可应用，只是定理11.5改为以下形式。

定理11.7 设$X=(x_{ij})$是n个供应量为1, 1, …, 1和n个需求量为1, 1, …, 1的运输问题的运输计划，那末对任意实数$u_1, u_2, \cdots, u_n; v_1, v_2, \cdots, v_n$满足

$$u_i+v_j \geqslant c_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n) \qquad (11\text{-}7)$$

X的耗费满足

$$C*X \leqslant \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_j) \qquad (11\text{-}8)$$

再者，如果每当$x_{ij}>0$，还有

$$u_i+v_j=c_{ij} \qquad (11\text{-}9)$$

那末，X具有最大耗费

$$C*X=\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i) \qquad (11\text{-}10)$$

算法11.3第3)步检验$c_{ij}-u_i-v_j$是否非负，改成检验$u_i+v_j-c_{ij}$是否非负就行了。容易看出，最优指派问题都是ε-运输问题。

11-5 瓶颈问题

1. 瓶颈问题的意义

我们以下述两个问题为例引入。

最大交通流问题

G 是一个简单连通图，E 是 G 的边集，u、v 是 G 的两个指定的点。可把 G 看作是连通 u，v 的交通系统。对每一边 $e\in E$ 有 $C(e)\geqslant 0$ 表示边 e 的**容量**（在道路 e 上任何时刻交通流量的上界）。γ 表示从 u 到 v 的一条基本路径（基本链）。链容量 $C(\gamma)$ 定义为 $C(\gamma)=\min\limits_{e\in\gamma} C(e)$。若 $e'\in\gamma$ 且 $C(e')=C(\gamma)$ 则称 e' 是链 γ 的**瓶颈**。

问题是从联结 u 和 v 的所有基本链中找出容量最大者。即设法确定从 u 到 v 的链 γ_0，使得

$$C(\gamma_0)=\max_{\gamma\text{是}u\text{到}v\text{的链}} C(\gamma)=\max_{\gamma\text{是}u\text{到}v\text{的链}}\ \min_{e\in\gamma} C(e)$$

边集 K 是分离 u 和 v 的一个割（割集），如果从 G 中移走 K 中的每条边，则 u 和 v 处在不同的连通成分中。此外，若 K 又是一个最小割——若从 K 中删去任一条边，则 K 不是一个割——则称 K 是一个**基本割**。

因为 u 到 v 的任一链 γ 都有（至少有）一条边在分离 u 和 v 的一个基本割 K 中。因而有

$$C(\gamma)\leqslant\max_{e\in K} C(e)\leqslant\min_{K\text{是分离}u,v\text{的一个基本割}}\ \max_{e\in K} C(e)$$

进而有（因为对任何链都成立）

$$\max_{\gamma\text{是一条}u\text{到}v\text{的基本链}} C(\gamma)\leqslant\min_{K\text{是分离}u\text{和}v\text{的一个基本割}}\ \max_{e\in K} C(e)$$

即

$$\max_{\gamma\text{是一条}u\text{到}v\text{的基本链}}\ \min_{e\in\gamma} C(e)\leqslant\min_{K\text{是分离}u\text{和}v\text{的一个基本割}}\ \max_{e\in K} C(e)\qquad(11\text{–}11)$$

最小高度问题

这是一个与最大交通流问题对偶的问题。其中 $C(e)$ 表示边 e 的高度，$C(\gamma)$ 表示基本链 γ 上边的高度最大值，即

$$C(\gamma)=\max_{e\in\gamma} C(e)$$

问题是如何确定 u 到 v 的一条基本链 γ, 使 $C(\gamma)$ 最小。经过类似地推理, 有与(11-11)式类似的式子

$$\min_{\gamma\text{是一条}u\text{到}v\text{的基本链}} \max_{e\in\gamma} C(e)$$

$$\geqslant \max_{K\text{是一个分离}u\text{和}v\text{的基本割}} \min_{e\in K} C(e) \qquad (11\text{-}12)$$

瓶颈问题就是上述一类问题的抽象, 它需要求出相当于上述问题中的一条基本链 γ_0 和一个基本割 K_0, 使(11-11)、(11-12)式相等性成立。

2. 区组化系统

设 E 是图 G 的边集, u 和 v 是 G 的两个指定的点。$\mathscr{P}$ 是 E 的子集族。

定义 11.1 P_1 和 P_2 是 $\mathscr{P}$ 的任两个元素, 若 $P_1\subseteq P_2$, 则 $P_1=P_2$, 那末 $\mathscr{P}$ 是 E 上的一个杂乱。

例如, 若 $\mathscr{P}$ 表示联结 u 和 v 的所有基本链的集合, 则 $\mathscr{P}$ 是 E 的一个杂乱。若 $\mathscr{K}$ 表示分离 u 和 v 的所有基本割的集合, 则 $\mathscr{K}$ 也是 E 上的一个杂乱。

定义 11.2 设 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{K}$ 是 E 上的两个杂乱。如果对 E 的任何划分 $\pi=\{E_1, E_2\}$

(i) 存在一个 $P\in\mathscr{P}$ 使得 $P\subseteq E_1$ 或者

(ii) 存在一个 $K\in\mathscr{K}$ 使得 $K\subseteq E_2$,

两者有一成立但不能都成立。则称$(\mathscr{P}, \mathscr{K})$是 E 的一个区组化系统。

通过交换上述定义中的 E_1 和 E_2, 可以看出, 如果$(\mathscr{P}, \mathscr{K})$是 E 的区组化系统, 则$(\mathscr{K}, \mathscr{P})$也是 E 的一个区组化系统。

定理 11.8 设 E 是有限集合, $\mathscr{P}$ 是 E 上的一个杂乱。设 $\mathscr{K}$ 是由 E 的所有具有下述性质的子集组成:

(1) 每个子集与 $\mathscr{P}$ 的每个元素的交不空。

(2) 每个子集是具有性质(1)的最小者。

那末，$\mathscr{K}$ 是 E 上唯一的杂乱，使得$(\mathscr{P}, \mathscr{K})$是 E 的一个区组化系统。(证明见题 11.43)

例如，若 $\mathscr{P}$ 是联结 u 和 v 的基本链集合，则 $\mathscr{K}$ 是分离 u 和 v 的基本割集合，$(\mathscr{P}, \mathscr{K})$是边集 E 的一个区组化系统。

定理 11.9 设$(\mathscr{P}, \mathscr{K})$是有限集 E 的一个区组化系统，f 是 E 上的实值函数，那末

$$\max_{P\in\mathscr{P}}\min_{e\in P} f(e)=\min_{K\in\mathscr{K}}\max_{e\in K} f(e) \tag{11-13}$$

(证明见题 11.44)

算法 11.4 求使(11-13)式成立，即 $\min\limits_{e\in P'} f(e)=\max\limits_{e\in K'} f(e)$ 的$P'\in\mathscr{P}$ 和 $K'\in\mathscr{K}$ 及其值的方法。

步骤如下：

1) 把函数值 $f(e)$ $(e\in E)$按由大到小的顺序排列成

$$a_1>a_2>\cdots>a_m$$

(假定共有 m 个不同的函数值。)

2) 把 E 划分为$\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$，这里 $F_i=\{e|e\in E$ 且 $f(e)=a_i\}$，$i=1, 2, \cdots, m$。并设 $F_0=\varnothing$。

3) 找出足标 t，使 $F_0\cup F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_{t-1}$ 不含有 $\mathscr{P}$ 中的元素，而 $F_0\cup F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_{t-1}\cup F_t$ 含有 $\mathscr{P}$ 中的某个元素 P'，显然有

$$\min_{e\in P'} f(e)=a_t$$

且

$$\max_{P\in\mathscr{P}}\min_{e\in P} f(e)\geqslant a_t \tag{11-14}$$

4) 因 $F_0\cup F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_{t-1}$ 不含有 $\mathscr{P}$ 中的元素，所以，在 $F_t\cup F_{t+1}\cup\cdots\cup F_m$ 中必可找出 $\mathscr{K}$ 的一个元素 K'。又因为

$P'\subseteq F_0\cup F_1\cup\cdots\cup F_t$，肯定 $K'\not\subseteq F_{t+1}\cup F_{t+2}\cup\cdots\cup F_m$（否则与 $(\mathscr{P},\mathscr{K})$ 是 E 的一个区组化系统矛盾），这得出

$$\max_{e\in K'} f(e)=a_t$$

且

$$\min_{K\in\mathscr{K}}\max_{e\in K} f(e)\leqslant a_t \tag{11-15}$$

3．瓶颈指派问题

把 n 个人安排到一个流水生产线的 n 个工作岗位上。设第 i 个人对第 j 个工作的处理速度是 c_{ij}。每个人对每一工作的处理速度用速度矩阵 $C=(c_{ij})$ 表示。整条生产线的进度等于该生产线上速度最慢的人（瓶颈）的处理速度。问题是如何确定人对工作的指派，使生产线速度最快。设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是一个指派，生产线能够进行的速度是 $c_{1i_1}, c_{2i_2}, \cdots, c_{ni_n}$ 中的最小者。我们的目的是求

$$\max_{i_1,i_2,\cdots,i_n\text{是一个指派}}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n} c_{ji_j}$$

之值并求出达到这个最大速度的指派 $k_1, k_2, \cdots, k_n$。

这个问题可以看作瓶颈问题，用算法 11.4 求解。这里代表瓶颈指派问题的图 G 是一个 $K_{n,n}$ 完全二部图。结点是 $s_1, s_2, \cdots, s_n$（代表 n 个人）和 $t_1, t_2, \cdots, t_n$（代表 n 个工作岗位）。每个 s_i 到每个 t_{j1} 有一条边，其容量为 c_{ij}。设 $\mathscr{P}$ 是指派的集合，每个指派是具有 n 条边的 G 的一个完全匹配。容易看出 $\mathscr{P}$ 是 E 上的一个杂乱，根据定理 11.8，只要找出符合定理中两个条件的 E 的子集族 $\mathscr{K}$，$(\mathscr{P},\mathscr{K})$ 便是 E 的一个区组化系统。我们这样地构造 $\mathscr{K}$ 的元素 K：

任选两个集合 $A_1\subseteq\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 和 $A_2\subseteq\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ 使 $|A_1|+|A_2|=n+1$，置

$$K=\{e\mid e\text{ 是一个端点在 }A_1\text{，另一端点在 }A_2\text{ 的边}\}$$

让 A_1, A_2 遍历所有不同选法，就得出 $\mathscr{K}$ 的所有元素。

容易核实这样构造的 $\mathscr{K}$ 是符合定理 11.8 中两个条件的。因此定理 11.9 中的等式

$$\max_{\substack{i_1, i_2, \cdots, i_n \\ \text{是一个指派}}} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} c_{j i_j} = \min_{\substack{A_1, A_2, \subseteq \{1, 2, \cdots, n\} \\ |A_1| + |A_2| = n+1}} \max_{\substack{i \in A_1 \\ j \in A_2}} c_{ij}$$

成立。这样便可应用算法 11.4 求解。

题解及评注

11.1 给出一个 2×2 选择等级矩阵,使得它仅有的两种不同的指派都是稳定的。

解

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & \quad B \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{bmatrix} (1,\ 2) & (2,\ 1) \\ (2,\ 1) & (1,\ 2) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

第一种指派: a 对 A, b 对 B。

第二种指派: a 对 B, b 对 A。

如果 a, b 代表男孩, A, B 代表女孩。第一种指派中每个男孩都得到第一选择。第二种指派中每个女孩都得到第一选择。因而两种指派都是稳定的。

评注 稳定指派问题也常常表述为人对工作的指派,即每个人(共 n 个)对每件工作(共 n 件)都根据其爱好程度给出选择等级。每件工作(实际上是管理员)对每个人都按其胜任该工作的程度给出选择等级。一个指派是每个人都分配给一件工作。下边有关稳定指派的例题,大多以人对工作的指派为模型的。

11.2 假定在人对工作的择优指派问题中,某人 a 把某工作 A 排在第一级,而 A 把 a 也排在第一级。证明在任何稳定指派中,必将 a 指派给 A。

证 反证法。假定在一个稳定指派中, a 指派给工作 B,而

某个人 c 指派给工作 A。显然 a 认为工作 B 的级别低于 A。同样 A 对 c 的评价低于 a。则 a 喜欢 A 胜过 B, A 喜欢 a 胜过 c, 因而这个指派是不稳定的。

11.3 对于给定的选择等级矩阵和一个指派，试描述如何判定该指派是不是稳定的。

解 设 $M=\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$, $W=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$。依次考察 m_i, $i=1, 2, \cdots n$。若在指派中，m_i 指派的是 w_j, 则在矩阵第 i 行从左至右逐个考查是否有 w_k, m_i 把 w_k 排的等级比 w_j 高。若有，则考察 w_k。如果在指派中 m_x 指派给 w_k 且 w_k 排 m_i 于 m_x 之前，则说明该指派是不稳定的。否则继续考察。若最终找不到不稳定点，则该指派是稳定的。

例如，给定的选择等级矩阵是

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1,\ 2) & (2,\ 4) & (3,\ 1) & (4,\ 4) & (5,\ 3) \\ (3,\ 3) & (4,\ 1) & (2,\ 5) & (5,\ 3) & (1,\ 5) \\ (1,\ 4) & (3,\ 5) & (2,\ 2) & (4,\ 2) & (5,\ 1) \\ (2,\ 5) & (4,\ 2) & (5,\ 4) & (1,\ 5) & (3,\ 2) \\ (2,\ 1) & (1,\ 3) & (3,\ 3) & (5,\ 1) & (4,\ 4) \end{bmatrix} \end{array}$$

指派是 (m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3), (m_4, w_4), (m_5, w_5)。则在考察到 m_5 时发现 w_1 喜欢 m_5 胜过 m_1, 而 m_5 喜欢 w_1 胜过 w_5, 所以指派中 (m_5, w_5) 是不稳定点，整个指派不稳定。

11.4 对于下边的选择等级矩阵，试找出所有的稳定指派。

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1,\ 3) & (2,\ 2) & (3,\ 1) \\ (3,\ 1) & (1,\ 3) & (2,\ 2) \\ (2,\ 2) & (3,\ 1) & (1,\ 3) \end{bmatrix} \end{array}$$

解 共有 3 个稳定指派，它们是：

1) $(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3)$

2) $(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_1)$

3) $(m_1, w_3), (m_2, w_1), (m_3, w_2)$

容易验证它们都是稳定的，并且也容易验证别无其它指派是稳定的。

11.5 设人对工作的择优指派问题中，选择等级矩阵具有如下形式。试证明至少存在 n 个稳定指派。

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} (1,\ n) & (2,\ n-1) & (3,\ n-2) & \cdots & (n,\ 1) \\ (n,\ 1) & (1,\ n) & (2,\ n-1) & \cdots & (n-1,\ 2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (3,\ n-2) & (4,\ n-3) & (5,\ n-4) & \cdots & (2,\ n-1) \\ (2,\ n-1) & (3,\ n-2) & (4,\ n-3) & \cdots & (1,\ n) \end{array}\right] \end{array}$$

证 以下 n 个指派都是稳定的：

1) $(m_1, w_1), (m_2, w_2), \cdots, (m_n, w_n)$

2) $(m_1, w_2), (m_2, w_3), \cdots, (m_n, w_1)$

3) $(m_1, w_3), (m_2, w_4), \cdots, (m_n, w_2)$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

n) $(m_1, w_n), (m_2, w_1), \cdots, (m_n, w_{n-1})$

这是因为第 $i(i=1, 2, \cdots, n)$ 个指派中，每个人都获得他的第 i 级选择，每件工作都获得它第 $n-i+1$ 级选择，而等级矩阵中各偶对的两个分量之和是 $n+1$。若指派中有偶对 (a, A)，(b, B)，则或者 a 把 A 排得比 B 高，或者 B 把 b 排得比 a 高，二者必居其一。所以指派是稳定的。

11.6 用延期接受算法，对下列选择等级矩阵，求出一个稳定指派。

$$
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}
\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \left[\begin{array}{cccc} (1,\ 3) & (2,\ 3) & (3,\ 2) & (4,\ 3) \\ (1,\ 4) & (4,\ 1) & (3,\ 3) & (2,\ 2) \\ (2,\ 2) & (1,\ 4) & (3,\ 4) & (4,\ 1) \\ (4,\ 1) & (2,\ 2) & (3,\ 1) & (1,\ 4) \end{array}\right] \end{array}
$$

解 算法的执行过程可用表 11.1 表示。

表 11.1

队列	第一步*	第二步	第三步	第四步	第五步	第六步
Q_A	$\{a,\ b\}$ 拒绝 b	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,\ c\}$ 拒绝 a	$\{c\}$	$\{c\}$
Q_B	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c,\ d\}$ 拒绝 c	$\{d\}$	$\{d,\ a\}$ 拒绝 a	$\{d\}$
Q_C	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$
Q_D	$\{d\}$	$\{d,\ b\}$ 拒绝 d	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$

* 这里的一步指算法执行一次循环。下同。

结果$(a,\ C)$, $(b,\ D)$, $(c,\ A)$, $(d,\ B)$是一个稳定指派。

11.7 证明上题中的选择等级矩阵，恰有一个稳定指派。

证 假定上题的指派是人对工作的指派。因为构造稳定指

表 11.2

队 列	第 一 步	第 二 步	第 三 步	第 四 步	第 五 步
Q_a	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{C\}$
Q_b	$\{B\}$	$\{B\}$	$\{B,\ D\}$ 拒绝 B	$\{D\}$	$\{D\}$
Q_c	$\{D\}$	$\{D,\ A\}$ 拒绝 D	$\{A\}$	$\{A\}$	$\{A\}$
Q_d	$\{A,\ C\}$ 拒绝 A	$\{C\}$	$\{C\}$	$\{C,\ B\}$ 拒绝 C	$\{B\}$

派的算法是让人先挑选工作的，正如内容提要指出的，这样所得的指派是对人最优的。如果反过来，让工作先挑选人，用同样的方法将得到一个对工作最优的稳定指派。其执行步骤如表11.2。

得到的稳定指派和上题的结果相同。

这就意味着同一个稳定指派既对人最优，又对工作最优。因而只有这唯一的一个稳定指派。若不然，则存在另一个稳定指派，不妨设其中 a 不是对 C，而是

$$(a,\ X) \quad 和 \quad (e,\ C)$$

因为原指派对人最优，所以 a 应把 C 排在 X 之前。又原指派对工作最优，所以 C 应当把 a 排在 e 之前。这样含有 $(a,\ X)$ 和 $(e,\ C)$ 的指派是不稳定的。得出矛盾。

11.8 用延期接受算法对下列选择等级矩阵，求一个稳定指派。

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & \quad B & \quad C & \quad D \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1,\ 3) & (2,\ 2) & (3,\ 1) & (4,\ 3) \\ (1,\ 4) & (2,\ 3) & (3,\ 2) & (4,\ 4) \\ (3,\ 1) & (1,\ 4) & (2,\ 3) & (4,\ 2) \\ (2,\ 2) & (3,\ 1) & (1,\ 4) & (4,\ 1) \end{bmatrix} \end{array}$$

表 11.3

队列 \ 步骤	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q_A	$a,\ \bar{b}$	a	a	$\bar{a},\ d$	d	d	$\bar{d},\ c$	c	c	c
Q_B	c	$\bar{c},\ b$	b	b	$\bar{b},\ a$	a	a	$\bar{a},\ d$	d	d
Q_C	d	d	$\bar{d},\ c$	c	c	$\bar{c},\ b$	b	b	$\bar{b},\ a$	a
Q_D										b

解 为了简化书写形式，如果 $\bar{a}$ 出现在某队列中，则表示 a

被拒绝。算法的执行步骤如表 11.3 所示。

得到的稳定指派是(a, C), (b, D), (c, A), (d, B)。

11.9 证明用延期接受算法对一个 $n\times n$ 的选择等级矩阵求其稳定指派最多用 n^2-2n+2 步。并验证题 11.8 恰达到这个上界。

证 算法至少执行一步。在执行的某一步上，若有人被拒绝，则算法将要增加一步。所以算法执行的步数不超过拒绝总次数加 1。内容提要已指出，延期接受算法总可以构造出一个稳定指派，因而同一个人最多被拒绝 $n-1$ 次。但我们可证明最多只有一个人被拒绝 $n-1$ 次，而其余人最多被拒绝 $n-2$ 次。若不然，有 a, b 两人都被拒绝了 $n-1$ 次，而最终得到稳定指派

$$(a, A),\ (b, B),\cdots \tag{1}$$

则我们交换(1)中的 A、B，所得的指派

$$(a, B),\ (b, A),\cdots$$

仍是稳定的，因为在(1)中 a 对 A, b 对 B 的评价等级都是 n——最坏的选择。交换不会破坏稳定性。但这和应用延期接受算法所得的指派对人是最优的矛盾。

这样，算法所用步数最多是

$$1+(n-1)+(n-1)(n-2)=n^2-2n+2$$

本题得证。

题 11.8 中，$n=4$，最多执行 $4^2-2\times4+2=10$ 步。而该题恰用了 10 步。因而它恰达到这个上界。

11.10 证明定理 11.1——延期接受算法所得的稳定指派是对男孩最优的。

证 如果存在一个稳定指派，它指派一个女孩 A 给一个男孩 a，我们说 A 对 a 是**合适的**。现证明“根据延期接受算法，即算法 11.1，得出的指派中，没有男孩被合适于他的女孩所拒绝。”

对算法执行步数作归纳证明。

$n=1$ 时，假定 a, b 都选 A, A 喜欢 a 而拒绝 b，我们断言 A 对 b 是不合适的。若不然，有一稳定指派，它指派 b 给 A, 而把 a 指派给另一女孩。但 A 是 a 的第一选择；而 A 喜欢 a 胜过 b。因此，指派是不稳定的，得出矛盾。故 $n=1$ 时，命题成立。

设 $n=k$ 时命题成立，须证 $n=k+1$ 时命题也成立。和基础步的证法类似。假定在 $k+1$ 步，A 喜欢 a 而拒绝 b，我们证明 A 对 b 是不合适的。若不然，有一稳定指派，它指派 b 给 A, 而指派 a 给另一女孩。但根据算法，a 最喜欢 A, 除了那些不合适的即已拒绝过他的外；而 A 喜欢 a 胜过 b。因此，指派是不稳定的，得出矛盾。根据归纳原则，上述命题成立。

又男孩选择女孩是按等级次序的，根据上述命题，立即得出指派给男孩的女孩是他所能得到的女孩中最好的，证毕。

11.11 能否把延期接受算法推广到 m 个人和 n 个工作的情况，这里 $m\leqslant n$。

解 推广是很简单的。算法的步骤亦基本不变，只不过终止条件改成：如果没有人被拒绝，则得到一个稳定指派。但这里的稳定指派是指每个人都分配到合适的工作，而不理会 $n-m$ 件工作没人去做。并用与内容提要中相似的方法可证明对任一个 $m\times n$ $(m\leqslant n)$ 的选择等级矩阵总存在一个稳定指派。

11.12 把稳定指派的理论推广到下述入学问题：n 个考生和 m 个招生院校，第 i 个学校准备招收 q_i 个学生。每个考生可申请到这 m 个院校中的一些或全部院校去，且按其志愿，对其所申请的院校给出优先顺序；同样每个院校把申请到该校的考生亦给出录取优先顺序，当然，对某些认为不够录取基本条件的学生，即使学院招生名额未满也允许不接收。另外还假定考生对欲进入的院校，院校对可考虑录取的考生所给出的优先顺序是

没有相持的。

解 首先我们定义稳定指派，一个稳定指派是指没有下述情况的一个指派：学生 a 分配给学校 A，但是 a 更喜欢 B，同时 B 认为 a 合格而或者 B 的招生名额未满，或者已满但认为 a 优于分配给 B 的某个 b。

算法的总构想和延期接受算法大体一致，不过选择等级要增加 ∞ 一级。考生对他未申请的学校的优先数是 ∞，学校对不够录取基本条件的考生的录取优先数也是 ∞。另外在算法中增加一个淘汰队列，不妨设想它也是一所学校，它的招生定额是 n，且不拒绝任何人，它对学生的评级是任意的。而学生对淘汰队列的评级都是 $m+1$。算法如下：

1） 每个考生都处于他第一选择的学校队列中等待接受。

2） 每个学校，首先拒绝那些认为不符合基本条件的等待接受考生（如果存在的话）。若等待队列中余下的人数 n_i 多于该校的招生名额 q_i 的话，那么该校就按录取优先顺序拒绝其中的 n_i-q_i 个人而让其中 q_i 个继续等待接受。

3） 如果在第 2）步中没有任何考生被拒绝，则把各校等待接受的考生指派给该校，算法结束。否则

4） 对第 2）步上被拒绝的每个人，按他下一个最高选择等级继续排队等待接收，并转第 2）步。

这个算法是正确的，原因是：

1） 算法会终止。因为学生人数有限，每个学生可转校的次数有限，故可转校的总次数有限。而算法每执行一次，可转校总次数至少减 1，故算法会终止。

2） 算法终止时所得的指派是稳定的。假定在此指派中 a 等 q 个人已指派给学校 A，b 已指派给学校 B，但 b 喜欢 A 胜过 B，那末在算法的某步上，b 选 A 而被 A 拒绝，肯定 b 的等级

比不上 a 等 q 个人。故这一指派是稳定的。

由此得出，稳定指派总是存在的。

此外，还可断言"本算法所得稳定指派对学生是最优的。"证明如下：

首先要指出，如果拒绝的原因是学校评某考生为 ∞，那么该校不合适于该生是明显的。所以以下证明中不再论述这种情况，仅讨论优先数是有限的情况。我们对算法步数作归纳证明。

$n=1$ 时，假定 a 被 A 所拒绝，我们断言 A 不合适于 a。若不然，有一稳定指派，把 a 指派给 A，而现在等待 A 接受的学生中至少有一名 b 不在 A 的接收名单上，不妨设 b 为 B 所接收。但 A 是 b 的第一选择，而 A 喜欢 b 胜过 a，因此指派是不稳定的。得出矛盾。故 $n=1$ 时命题得证。

设 $n=k$ 时命题成立。必须证 $n=k+1$ 时命题也成立。假设在 $k+1$ 步，A 拒绝了 a，我们证明 A 不合适于 a。若不然，有一稳定指派把 a 指派给 A，而现在等待 A 接受的学生中至少有一名 b 不在 A 的接收名单上，不妨设 b 为 B 所接收。但 A 是 b 的最高选择，除了已拒绝他的学校外。而 A 喜欢 b 胜过 a，因此指派是不稳定的。得出矛盾。根据归纳原理，命题得证。

又学生的选择是按等级次序的。根据以上命题，立即可得出指派给各学生的学校是他能够得到的学校中最好的。证毕。

11.13 证明如果一个商人评价自己的商品高于其他所有人的商品，那么在任何一个核心分配中，他都获得他自己的商品。

证 设商人总数是 n。当 $n=1$ 时显然为真。现设 $n>1$ 并设商人 T 评价自己商品高于其他人的商品。若有核心分配 A，使 T 没有获得自己的商品，则可作集合 $S=\{T\}$，$|S|<n$，而 T

把自己的商品分配给自己，比分配 A 要好。这和 A 是核心分配矛盾。故本题得证。

评注 这里的证明不能用算法 11.2 所构造的核心分配来验证。这是因为核心分配不唯一，而算法仅给出其中的一个。

11.14 构造一个交易问题的例子，使得其中每一个核心分配恰好有一个商人获得他的第一选择。

解 以下 3 阶选择等级矩阵

$$\begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

是符合题意的例子。这个例子中，只有一个分配是核心分配，那就是每人都获得他自己的商品。当然，对于任意的 n 也可构造类似的例子。

评注 为了确信上例中只有一个分配是核心分配，可反复利用题 11.13 中的结论。

11.15 证明对于下列选择等级矩阵恰有两个核心分配。并指明哪一个分配是用算法 11.2 得到的。

$$\begin{array}{c} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

证 图 11.1 给出了几个分配的形式。图中 $\overset{u}{\circ}\longrightarrow\overset{v}{\circ}$ 表示商人 u 获得商人 v 的商品。

其中 (a)，(b) 表示两个核心分配，而 (a) 是由算法 11.2 所得到的。其它任何分配都具有 (c) 的形式，容易验证都不是核心分

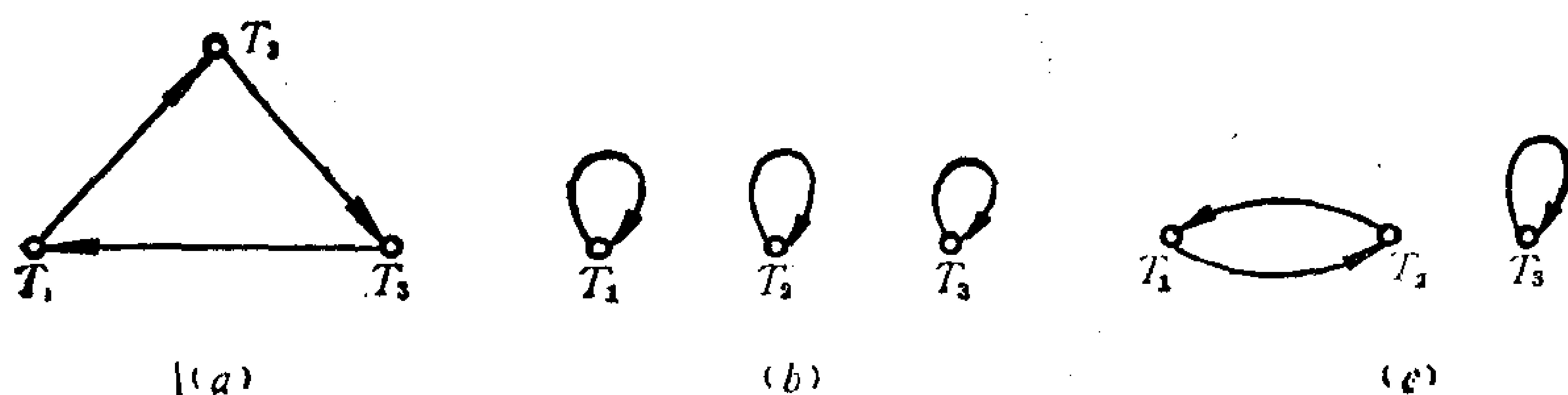


图 11.1

配。例如(c)中，若令 $S=\{T_2\}$，T_2 保留自己的商品要比得到 T_1 的商品好，所以(c)表示的分配不是核心分配。

11.16 假定一个商人把自己的商品排在第 k 级，证明在任何核心分配中，该商人得到的商品不低于 k 级。

证 此题是题 11.13 的一般形式，用类似的方法可证得。

11.17 证明用算法 11.2 所得到的核心分配中，至少有一个商人获得他的第一选择。且证明可能存在一个核心分配，其中没有任何人获得其第一选择。

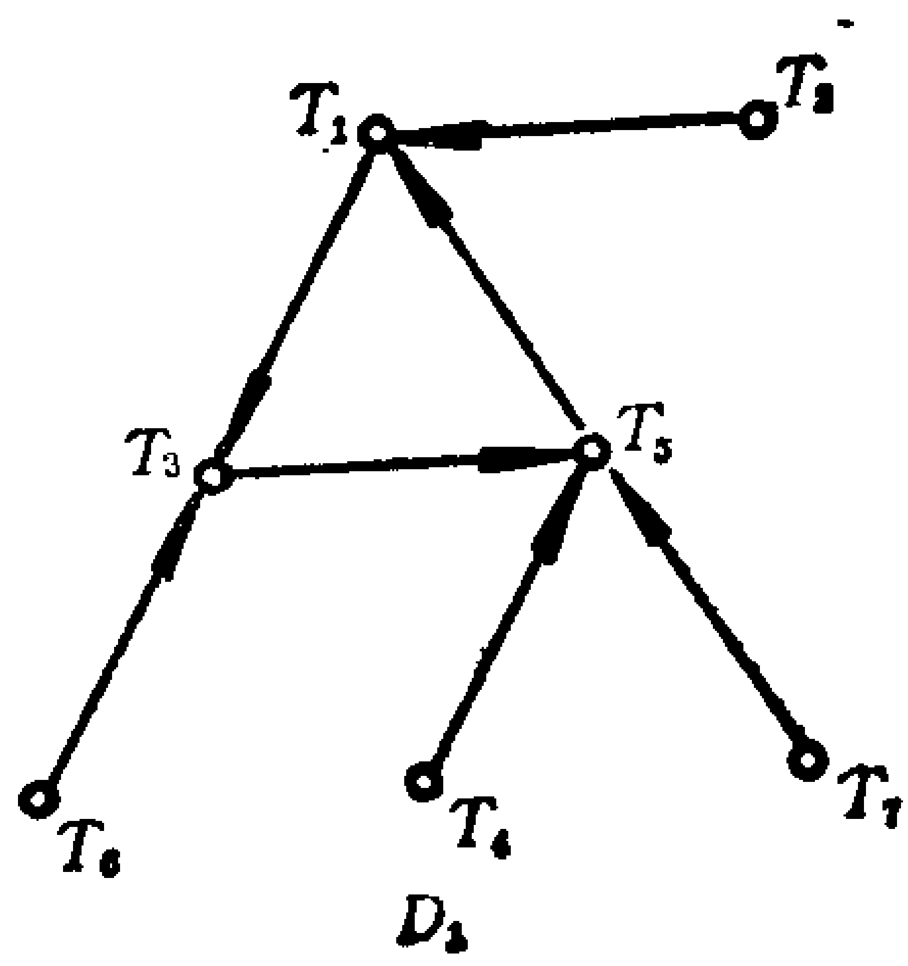
证 用算法 11.2 构造核心分配时，作有向图 D_1，而 D_1 中至少有一个回路 N_1，回路 N_1 上的所有点所代表的商人将获得其第一选择。

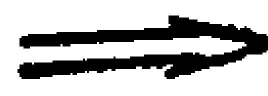
题 11.15 中图 11.1(b) 所示的核心分配是证明第二个断言的一个例子。

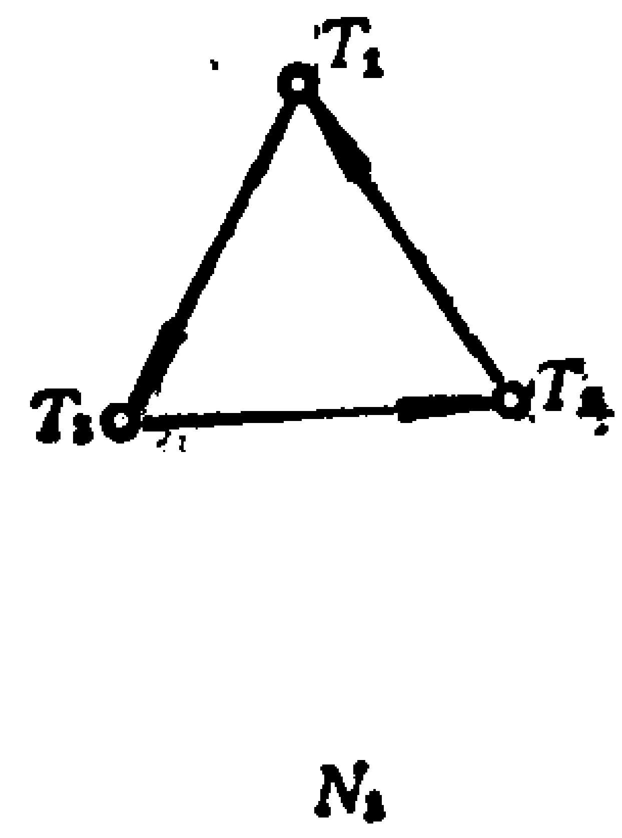
11.18 证明在交易问题中，存在一个核心分配，其中每个人都获得他的第一选择当且仅当用算法 11.2 所构造的有向图 D_1 是由两两不相交的基本回路组成。

证 “当”部分很容易证明。因为 D_1 由两两不相交的基本回路所构成。这样，每个点所代表的商人都在某个基本回路上，且获得其第一选择。显然这是一个核心分配。

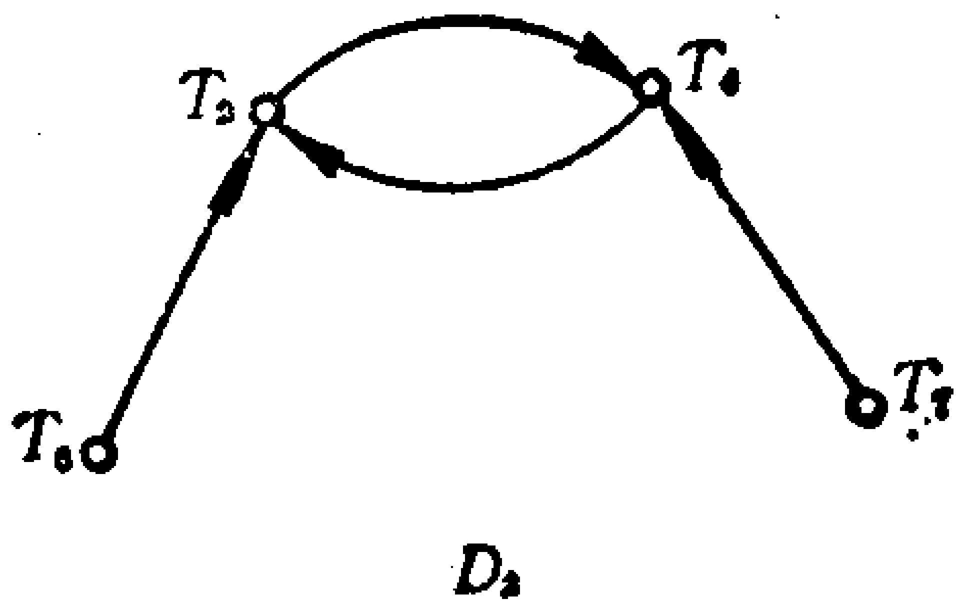
“仅当”部分。因为每个商人都获得了其第一选择，所以每

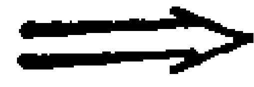


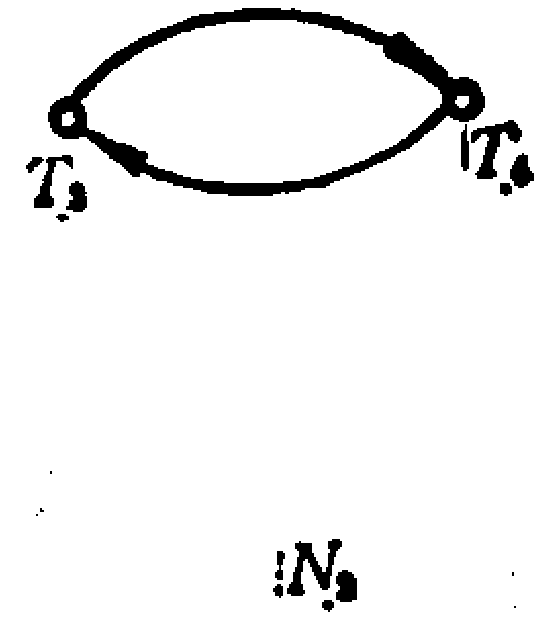




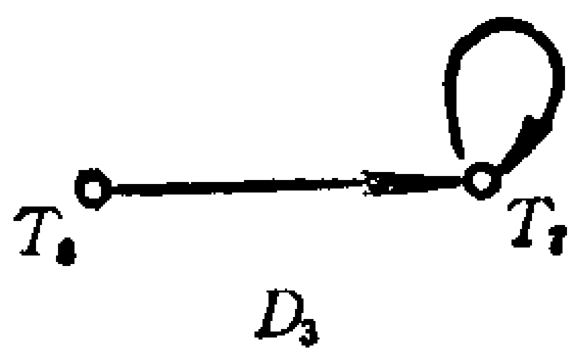
(a)

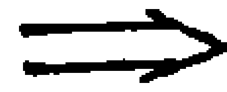






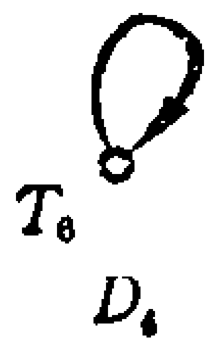
(b)

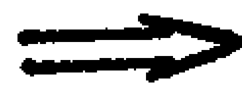


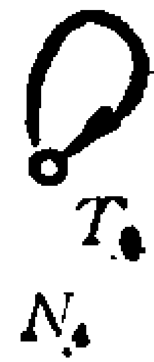




(c)







(d)

图 11.2

件商品恰有一个商人把它排在第一等级。因而用算法 11.2 构造 D_1 时，每个点都恰有一个出度和一个入度。设 T 是 D_1 中任一个点，则 T 必处于 D_1 的一个连通分图中，记该连通分图为 G_1，且它有 $1\leqslant l\leqslant n$ 个点。由于这 l 个点相互连通且每个点恰有一个入度和一个出度，因而 G_1 是一个基本回路，且不与 D_1-G_1 中的点有边相连。但 T 是任意的，这就证明了命题。

11.19 对于下列选择等级矩阵，用算法 11.2 构造一个交易问题的核心分配。

$$\begin{array}{c} \\ T_1\\ T_2\\ T_3\\ T_4\\ T_5\\ T_6\\ T_7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6\\ 1 & 6 & 4 & 3 & 2 & 7 & 5\\ 2 & 7 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6\\ 3 & 4 & 2 & 7 & 1 & 6 & 5\\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 6\\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6\\ 7 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

解 构造过程用图 11.2$(a)\sim(d)$所示。

第一步获得 N_1，如图 11.2(a)所示。

第二步获得 N_2，如图 11.2(b)所示。

第三步获得 N_3，如图 11.2(c)所示。

第四步获得 N_4，如图 11.2(d)所示。

最后得到核心分配：T_1 获得 T_3 的商品，T_3 获得 T_5 的商品，T_5 获得 T_1 的商品，T_2 获得 T_4 的商品，T_4 获得 T_2 的商品，T_6 获得 T_6 的商品，T_7 获得 T_7 的商品。

11.20 证明定理 11.3——若运输计划 $X=(x_{ij})$ 使得 $BG(X)$ 含有一个基本回路，那么有一个运输计划 Y，使得 $BG(Y)$ 不含回路且耗费满足 $C*Y\leqslant C*X$。

证 假定 $BG(X)$ 含有一条基本回路 γ，由图论知识可知 γ

有偶数条边。设对应于回路的边的运输数是

$$x_{i_1j_1},\ x_{i_1j_2},\ x_{i_2j_2},\ x_{i_2j_3},\ \cdots,\ x_{i_kj_k},\ x_{i_kj_1}$$

这里 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 都是不相同的。对应于这些运输数的单位运费是

$$c_{i_1j_1},\ c_{i_1j_2},\ c_{i_2j_2},\ c_{i_2j_3},\ \cdots,\ c_{i_kj_k},\ c_{i_kj_1}$$

设 $p=c_{i_1j_1}+c_{i_2j_2}+\cdots+c_{i_kj_k}$, $q=c_{i_1j_2}+c_{i_2j_3}+\cdots+c_{i_kj_1}$ 比较 p 和 q 谁大，在大者所对应的运输数中取最小者为 α, 比如说 $p\leqslant q$, 则取

$$\alpha=\min\{x_{i_1j_2},\ x_{i_2j_3},\ \cdots,\ x_{i_kj_1}\}$$

加 α 于 X 中的 $x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \cdots, x_{i_kj_k}$; 从 X 中的 $x_{i_1j_2}, x_{i_2j_3}, \cdots, x_{i_kj_1}$ 中减去 α, 得出一个新的 $m\times n$ 矩阵，记为 Z。例如，$k=3$ 时，Z 的部分情况如下：

$$Z=\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & & & \\ \cdots & x_{i_1j_1}+\alpha & x_{i_1j_2}-\alpha & & \cdots \\ \cdots & & x_{i_2j_2}+\alpha & x_{i_2j_3}-\alpha & \cdots \\ \cdots & x_{i_3j_1}-\alpha & & x_{i_3j_3}+\alpha & \cdots \\ \cdots & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

因为 α 是 $x_{i_1j_2}, x_{i_2j_3}, \cdots, x_{i_kj_1}$ 诸数中的最小者，这得出数 $x_{i_1j_2}-\alpha$, $x_{i_2j_3}-\alpha, \cdots, x_{i_kj_1}-\alpha$ 都非负且至少有一个等于 0。再者，因为 Z 的每一行或者与 X 的对应行相同，或者从 X 的对应行通过加 α 到一个运输数和从另一个运输数中减去 α 得到。这得出对每一 $i=1, 2, \cdots, m$, 第 i 行运输数之和是 a_i。类似地，对每一 $j=1, 2, \cdots, n$, Z 的第 j 列运输数之和是 b_j。因此，Z 是运输计划。另外，$BG(Z)$ 比 $BG(X)$ 至少少一条边，因为至少有 γ 的一条边不是 Z 的二部图的一条边。运输计划 Z 的耗费是

$$\begin{aligned} C*Z &= C*X+\alpha(c_{i_1j_1}+c_{i_2j_2}+\cdots+c_{i_kj_k}) \\ &\quad -\alpha(c_{i_1j_2}+c_{i_2j_3}+\cdots+c_{i_kj_1}) \\ &= C*X+\alpha(p-q) \end{aligned}$$

因 $p\leqslant q$，所以 $C*Z\leqslant C*X$。

如果 $BG(Z)$ 没有回路，我们取 Z 作为 Y。如果 $BG(Z)$ 还有回路，我们用 Z 代 X，并重复以上论证。经有限次迭代后，我们得到运输计划 Y，它的二部图 $BG(Y)$ 没有回路，且

$$C*Y\leqslant C*X$$

11.21 设供应量为 2, 4, 5, 需求量是 3, 4, 4，单位运费矩阵为 C 运输计划 X。试确定一个运输计划 Y，其二部图没有回路，且使得耗费 $C*Y\leqslant C*X$。

$$C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\quad X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

解 由于 X 的二部图 $BG(X)$ 中有回路(参见图 11.3)，其中一个回路是$(s_1, t_1, s_2, t_2, s_1)$，它对应于 X 中的 $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{21}$ 所组成的矩形。由于回路上对应的单位运费

$$c_{11}+c_{22}=4<c_{12}+c_{21}=6$$

令 $\alpha=\min(x_{12}, x_{21})=1$，对应于单位运费大的一侧减去 α，另一侧加 α，即 $x_{11}+\alpha$, $x_{12}-\alpha$, $x_{22}+\alpha$, $x_{21}-\alpha$，得一个运输计划 X'。

$$X'=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

其二部图 $BG(X')$ 仍有回路(参见图 11.4)，回路是 $(s_2, t_2, s_3, t_3, s_2)$，对应于 X' 中的 $x'_{22}, x'_{23}, x'_{33}, x'_{32}$。计算

$$c_{22}+c_{33}=5=c_{23}+c_{32}$$

令 $\alpha=\min(x_{23}, x_{32})=1$(因两侧相等，此时也可取 $\alpha=\min(x_{22}, x_{33})=3$)，在回路上交替地 $+\alpha$，$-\alpha$ 得到一个运输计划 Y。Y 的二部图 $BG(Y)$ 中没有回路(参见图 11.5)。

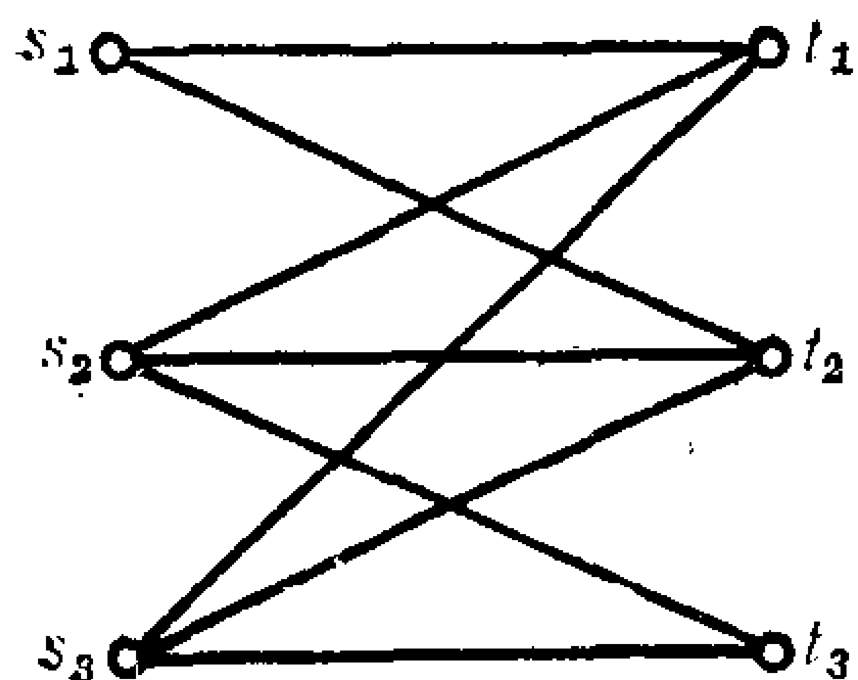


图 11.3　$BG(X)$

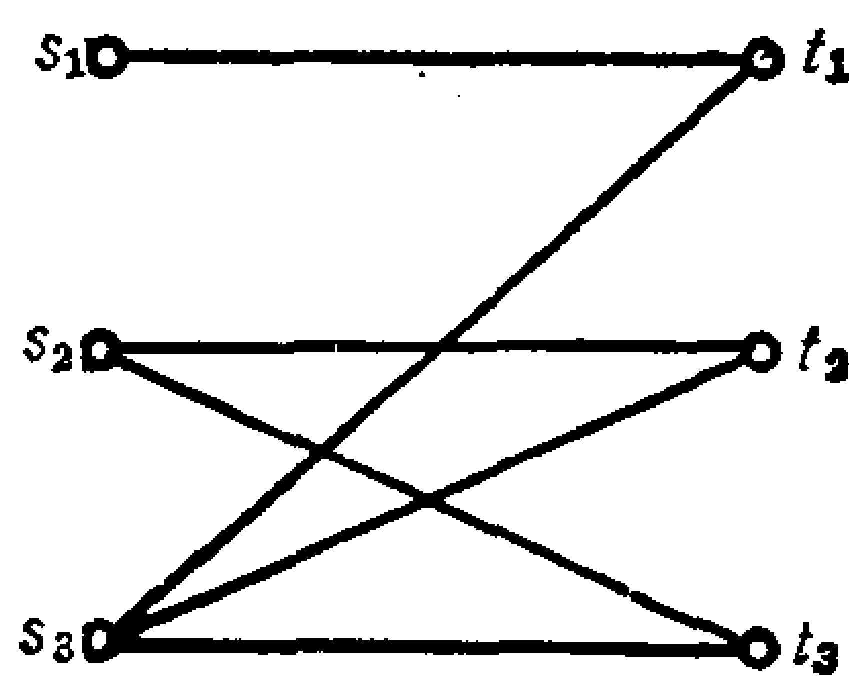


图 11.4　$BG(X')$

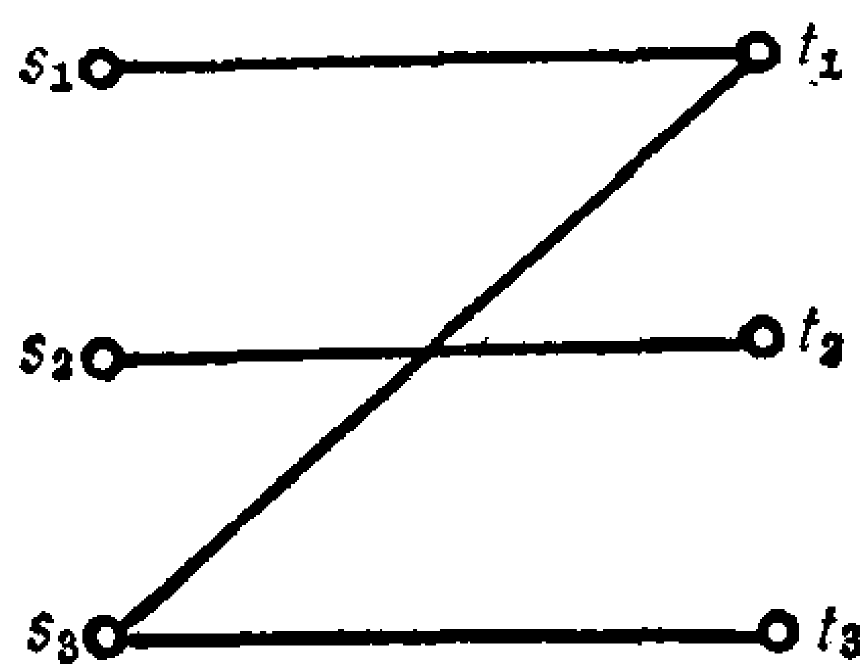


图 11.5　$BG(Y)$

$$Y=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

计算总耗费

$$C*X=2+3+0+3+4+4+2+1+9=28$$

$$C*Y=4+0+0+0+8+0+2+0+12=26$$

可见

$$C*Y\leqslant C*X$$

11.22　设供应量 a_1, a_2, $\cdots$, a_m, 需求量 b_1, b_2, $\cdots$, b_n, 单位运价矩阵 $C=(c_{ij})$, X 是一个运输计划, 其二部图 $BG(X)$ 是连通的, N 是 X 的非零运输数的个数。证明用题 11.21 的方法找出其二部图无回路的运输计划 Y, 使得 $C*Y\leqslant C*X$, 至多需 $N-m-n+1\leqslant mn-m-n+1$ 次迭代。

证　记 $t=N-m-n+1$。设第 i 次应用题 11.21 的方法消去回路时所删的边数为 $1+d_i$ 条, 则所得运输计划的二部图

至多可增加 d_i 个分图。这里 1 是指最小运输数 α 所对应的一条边，d_i 表示和此边同时被删去的其它边的数目，$d_i \geqslant 0$。

我们证明应用题 11.21 的方法不会多于 t 次。因为如果已应用了 t 次，则剩下的边数是

$$N-(t+d_1+d_2+\cdots+d_t)$$

不妨设所得运输计划 Y 其二部图 $BG(Y)$ 有 $k(k \geqslant 1)$ 个分图，因为

$$d_1+d_2+\cdots+d_t+1 \geqslant k$$

所以 $N-(t+d_1+d_2+\cdots+d_s) \leqslant N-t-k+1=m+n-k$

此时 $BG(Y)$ 肯定无回路，因为加回在 d_1, d_2, $\cdots$, d_t 中计数的那些边，而仅删去每次在 1 中计数的 t 条边，不破坏二部图的连通性。而 $m+n$ 个结点的最小连通图是树，应有 $m+n-1$ 条边。从 $BG(X)$ 中删去 t 条边后，只剩下 $m+n-1$ 条边。所以此时图中已无回路。再把加上的 $d_1+d_2+\cdots+d_t$ 条边删去，当然不会出现回路。

故应用题 11.21 的方法不会多于 $t=N-m-n+1$ 次迭代。又 $N \leqslant mn$，所以

$$N-m-n+1 \leqslant mn-m-n+1$$

即迭代次数不多于 $mn-m-n+1$ 次。

11.23 设 X 是一个运输计划，二部图 $BG(X)$ 中至少有一个回路。证明有无限多个运输计划，其二部图与 $BG(X)$ 相同。

证 设回路上对应的运输数为 $x_{i_1j_1}$, $x_{i_1j_2}, x_{i_2j_2}$, $x_{i_2j_3}$, $\cdots$, $x_{i_kj_k}$, $x_{i_kj_1}$。令 α 是这些运输数的最小值。那么在这些运输数上交替地加上、减去 ε，其中 $0<\varepsilon<\alpha$，得出一个运输计划 X'，X' 的二部

图 $BG(X')$ 与 $BG(X)$ 全同。(因为没有增加或删去任何边)而这样的的实数 ε 有无限多个。因而可以构造无限个 X'。

11.24 证明应用西北角规则得出的运输计划 $X=(x_{ij})$ 中,非零的 x_{ij} 都是

$$(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p})-(b_{j_1}+b_{j_2}+\cdots+b_{j_q}) \qquad (1)$$

或

$$(b_{j_1}+b_{j_2}+\cdots+b_{j_q})-(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p}) \qquad (2)$$

的形式。这里 $a_{i_k}\in\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, $b_{j_k}\in\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, 且 $0\leqslant p\leqslant m$, $0\leqslant q\leqslant n$

证 对供应站和需求站数之和 $m+n$ 作归纳。

$m+n=2$ 时, $x_{11}=a_1-b_1$, 显然真。

设小于 $m+n$ 时命题为真, 现证 $m+n$ 时也真。根据西北角规则, 有三种情况:

(i) $a_1<b_1$, 有 $x_{11}=a_1$, $x_{1k}=0$, $k=2, 3, \cdots, n$。余下要考虑的供应量为 $a_2, \cdots, a_m$, 需求量是 $b_1'=b_1-a_1, b_2, \cdots, b_n$ 的子运输问题。因为 $m-1+n<m+n$, 根据归纳假设, 其运输计划的各分量 x_{ij} 都有 (1) 或 (2) 形式(对子运输计划而言)。用 b_1-a_1 代替其中 b_1', 整理后, 原运输计划的各分量 x_{ij}, 包括 x_{11}, 都有(1)或(2)形式。可见这种情况命题成立。

同理可证 (ii) $a_1>b_1$ 和 (iii) $a_1=b_1$ 的情况。故本题得证。

11.25 对下述供应量和需求量的运输问题, 应用西北角规则去确定其运输计划。

(a) 3, 6, 7 和 4, 4, 8;

(b) 1, 1, 1, 1, 1, 5 和 2, 2, 2, 2, 2。

解 (a)

$$
\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}
\begin{matrix} 3,\ 0 \\ 6,\ 5,\ 1,\ 0 \\ 7,\ 0 \end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix} 4 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & & 0 \end{matrix}
$$

(b)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\begin{matrix} 1,\ 0 \\ 1,\ 0 \\ 1,\ 0 \\ 1,\ 0 \\ 1,\ 0 \\ 5,\ 4,\ 2,\ 0 \end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \end{matrix}
$$

11.26 对题 11.25，试用东北角规则求解。

解 (a)

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}
\begin{matrix} 3,\ 0 \\ 6,\ 1,\ 0 \\ 7,\ 4,\ 0 \end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix} 4 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 5 \\ & 0 & 0 \end{matrix}
$$

(b)

$$
\begin{array}{ccccccl}
\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} 1、0 \\ 1、0 \\ 1、0 \\ 1、0 \\ 1、0 \\ 5、4、2、0 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 2、 & 2、 & 2、 & 2、 & 2 \\ 0 & 0 & 1、 & 1、 & 1、 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{matrix} &
\end{array}
$$

11.27 证明用西北角规则所构造的运输计划，其二部图不会出现回路。

证 对供、求站个数之和 $m+n$ 作归纳证明。

$m+n=2$ 时，显然真。

假定小于 $m+n$ 时命题成立。用西北角规则构造 x_{11} 时，若 $a_1<b_1$，则令 $x_{11}=a_1$，并用 $b_1'=b_1-a_1$ 代替 b_1。这时供应站 s_1 形成一个孤悬点，而剩余的 $m-1$ 个供应量和 n 个需求量。由归纳假设，用西北角规则构造的运输计划 X' 其二部图是无回路的。而把孤悬点 s_1 和孤悬边 (s_1, t_1) 添加到 X' 的二部图中，就形成了运输计划 X 的二部图。因这条孤悬边不会使 X 的二部图形成回路，故命题成立。若 $a_1>b_1$，用类似的方法可证明。若 $a_1=b_1$，则可形成两个孤悬点 s_1、t_1 和一条孤悬边 (s_1, t_1)，而剩下 $m-1$ 个供应量和 $n-1$ 个需求量。由归纳假设，可构造其二部图无回路的运输计划 X'，在 X' 的二部图上添回 s_1 和 t_1 及其联结边，即得运输计划 X 的二部图，显然也无回路。

综上所述，就证明了命题。

11.28 求其二部图无回路的运输计划还可以用下述方法：在单位运费矩阵 $C=(c_{ij})$ 中选最小的 c_{ij} 所对应的 x_{ij} 来填入，只要该 x_{ij} 前边未曾处理过。填入的规则是：

(1) 若 $a_i<b_j$, 令 $x_{ij}=a_i$, 第 i 行其它未填元素全填 0, 并把 b_j 改为 b_j-a_i。

(2) 若 $a_i>b_j$, 令 $x_{ij}=b_j$, 第 j 列其它未填元素全填 0, 并把 a_i 改为 a_i-b_j。

(3) 若 $a_i=b_j$, 令 $x_{ij}=a_i$, 第 i 行和第 j 列其它未填元素全部填 0。

重复以上方法, 直至全部填好为止。

试用这一方法, 求供应量为 6, 7, 8, 9, 需求量为 5, 5, 5, 15, 运输耗费矩阵为

$$C=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

的其二部图无回路的运输计划 X。

解 处理次序及结果如以下矩阵所示。

$$\begin{bmatrix}* & ④ & ③ & *\\ * & * & * & ②\\ ① & * & * & ⑥\\ * & ⑤ & * & ⑦\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7\\ 5 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

评注 这一方法是西北角规则的推广。其优点是使算法 11.3 的迭代次数明显地减少。当然也可以不按 c_{ij} 的大小来填, 但效果不好——迭代次数不能减少且易错。

11.29 证明定理 11.4——当供、求量 $a_1, a_2, \cdots, a_m; b_1, b_2, \cdots, b_n$ 给定时, 若运输计划 X 的二部图 $BG(X)$ 中没有回路, 那末没有其它的运输计划能有和 $BG(X)$ 相同的二部图。

证 根据逆反律, 我们只须证明二部图不同, 则运输计划也不同。换言之, X 的运输数由 X 的二部图以及供、求量 $a_1, a_2,$

$\cdots, a_m; b_1, b_2, \cdots, b_n$ 唯一地确定。我们对 $m+n$ 作归纳证明。

$m+n=2$ 时，$x_{11}=a_1=b_1$，结论真。

现设 $m+n>2$。因为 $BG(X)$ 没有回路，根据图论知识，必有一个孤悬点和一条孤悬边。我们不妨设对应于第一个供应站的结点 s_1 是孤悬点，联结 s_1 到第一个需求站 t_1 的边是孤悬边。若不然，可通过重新编号得出。这样 $x_{12}=\cdots=x_{1n}=0$，而运输计划有

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

形式。这意味着 $x_{11}=a_1$，X 的第一行已确定，并且 $b_1 \geqslant a_1$。设

$$X'=\begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

那么 X' 是对应于供应量为 $a_2, \cdots, a_m$，需求量为 $b_1-a_1, b_2, \cdots, b_n$ 的一个 $(m-1)\times n$ 的运输计划。$BG(X')$ 是从 $BG(X)$ 中删去 s_1 及其联结边得出，$BG(X)$ 无回路，$BG(X')$ 当然也无回路。又 $(m-1)+n<m+n$，根据归纳假设，X' 的运输数是唯一确定的。所以 X 的运输数是唯一确定的。这就证明了定理。

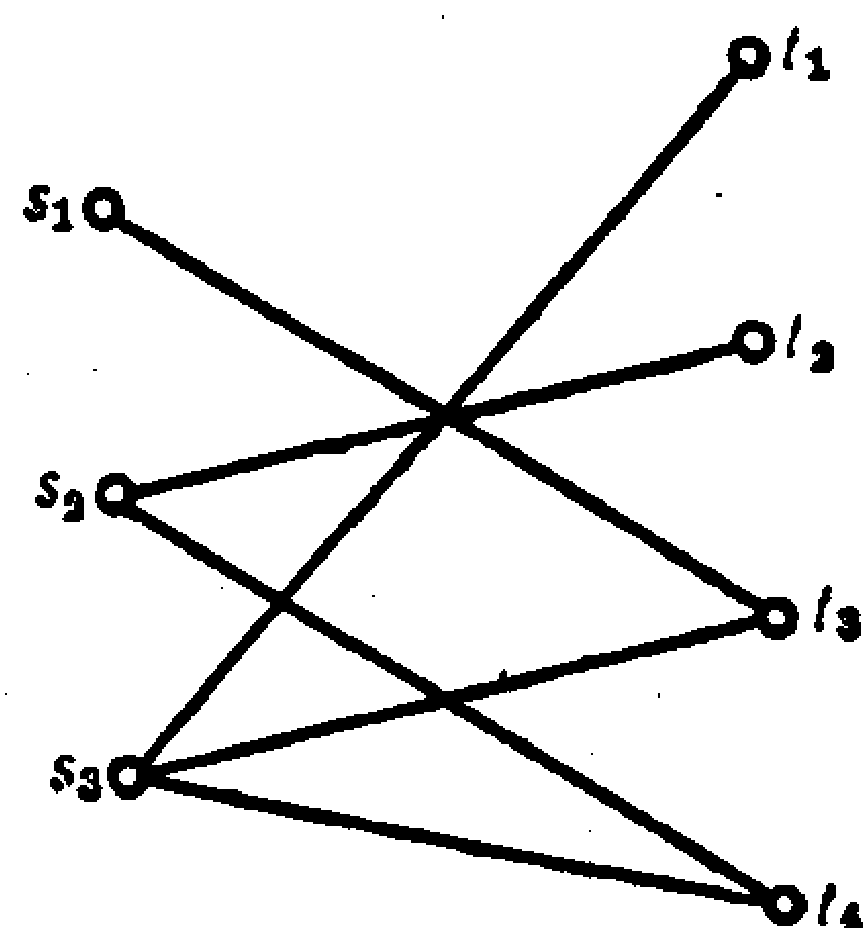


图 11.6

11.30 设运输问题的供应量为 3, 6, 8，需求量为 2, 4, 5, 6。试确定一个运输计划，或证明它不存在，其二部图如图 11.6 所示。

解 在 3×4 矩阵中，先填入相应于二部图中无边的运输数

0, 再填入任一孤悬边所对应的运输数然后去掉该孤悬边，并修改供、求量。重复这一步骤直至全部填好。结果如下：

$$
\begin{array}{cccccl}
 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\
 & 0 & 4 & 0 & 2 & \not{6}\ 2 \\
 & 2 & 0 & 2 & 4 & \not{8}\ \not{6}\ 4 \\
 & 2 & 4 & \not{5} & 6 & \\
 & & & 2 & &
\end{array}
$$

评注 填表法与西北角规则不同，它必须按二部图给定的形式来填写非零运输数。根据定理 11.4，若二部图无回路，则运输计划是唯一的或不存在(见题 11.31)。若有回路，可先填写那些非回路的边和不存在的边所对应的运输数。至于回路部分，只要使对应于剩余供求量符合条件即可。通常有多于一个运输计划可满足给定条件。若运输数限定为非负整数，则对应的运输计划只有有限个。而运输数可以是非负实数时，可以有无限个运输计划。

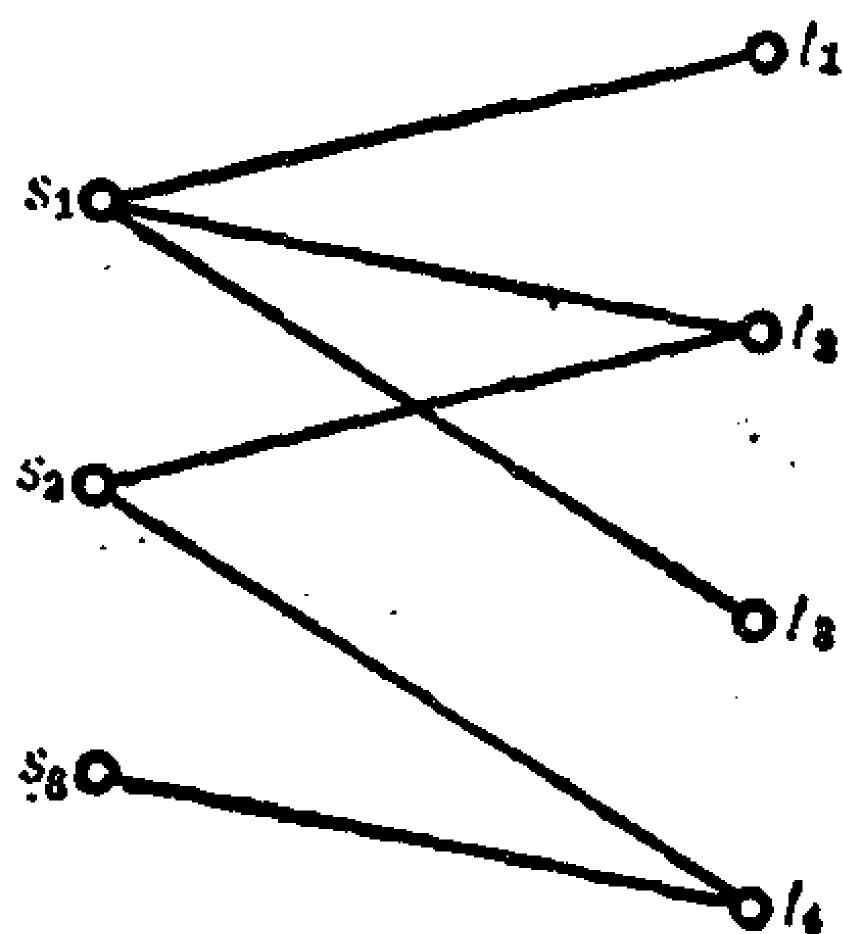


图 11.7

11.31 重解上题，但二部图改为图 11.7。

解 对应的运输计划是不存在的。因为 t_1 和 t_3 仅接受 s_1 的货物，其需求量为 $b_1+b_3=2+5=7$，而 s_1 的供应量为 $a_1=3$，小于 7。又运输数不可为负数。所以运输计划不存在。

11.32 证明定理 11.5——设 $X=(x_{ij})$ 是一个运输计划，$u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是分别对应于每个供应站和需求站的任意实数。如果对 $i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$ 满足

$$u_i+v_j\leqslant c_{ij} \tag{1}$$

那么 X 的耗费满足

$$C*X\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j \tag{2}$$

再者，如果每当 $x_{ij}>0$ 时，还满足

$$u_i+v_j=c_{ij} \tag{3}$$

则(2)式取等号。

证 因 u_i, v_j 满足(1)式，所以

$$\begin{aligned}C*X&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\geqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i+v_j)x_{ij}\\&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_ix_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}v_jx_{ij}\\&=\sum_{i=1}^{m}u_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+\sum_{j=1}^{n}v_j\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\\&=\sum_{i=1}^{m}u_ia_i+\sum_{j=1}^{n}v_jb_j\end{aligned}$$

即(2)式成立。

如果不仅(1)式成立，还有(3)式成立。那么每当 $c_{ij}>u_i+v_j$ 时有 $x_{ij}=0$，所以

$$C*X=\sum_{i=1}^{m}u_ia_i+\sum_{j=1}^{n}v_jb_j$$

成立。

11.33 证明算法 11.3 第 3)(iii) 步所得的新运输计划的耗费比原运输计划要小。

证 假设对应于 $x_{i_0j_0}$ 的 $c_{i_0j_0}-u_{i_0}-v_{j_0}<0$，我们加联结 s_{i_0} 到 t_{j_0} 的新边 e_0 到 $BG(X)$，恰得到一个含有边 e_0 的回路

$$\gamma_0=(t_{j_0},\ s_{i_0},\ t_{j_1},\ s_{i_1},\ \cdots,\ t_{j_k},\ s_{i_k},\ t_{j_0})$$

选
$$\delta=\min\{x_{i_0j_1},\ x_{i_1j_2},\ \cdots,\ x_{i_kj_0}\}$$

将 X 中的 $x_{i_0j_1}$, $x_{i_1j_2}$, $\cdots$, $x_{i_kj_0}$ 诸数减去 δ，$x_{i_0j_0}$, $x_{i_1j_1}$, $\cdots$, $x_{i_kj_k}$ 诸数加上 δ，得矩阵 X'，比如 $k=3$ 时，情况如下：

$$
X'=\begin{array}{c}
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{ccccccc}
 & j_0 & j_1 & j_2 & j_3 & & \\
\end{array}
$$

$$
X'=\left[\begin{array}{cccccc}
 & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \delta & x_{i_0j_1}-\delta & & & \cdots \\
 & & x_{i_1j_1}+\delta & x_{i_1j_2}-\delta & & \cdots \\
\cdots & & & x_{i_2j_2}+\delta & x_{i_2j_3}-\delta & \cdots \\
\cdots & x_{i_3j_0}-\delta & & & x_{i_3j_3}+\delta & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & & &
\end{array}\right]\begin{array}{c} \\ i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \\ \end{array}
$$

（列标：j_0，j_1，j_2，j_3）

X' 显然是一个运输计划且 $BG(X')$ 无回路，因减去 δ 的诸数中至少有一个为 0。现计算 $C*X'$。

$$C*X'=C*X+\delta d_{i_0j_0}$$

这里

$$
\begin{aligned}
d_{i_0j_0}&=(c_{i_0j_0}+c_{i_1j_1}+\cdots+c_{i_kj_k})-(c_{i_0j_1}+c_{i_1j_2}+\cdots+c_{i_kj_0})\\
&=(c_{i_0j_0}+u_{i_1}+v_{j_1}+\cdots+u_{i_k}+v_{j_k})\\
&\quad-(u_{i_0}+v_{j_1}+u_{i_1}+v_{j_2}+\cdots+u_{i_k}+v_{j_0})\\
&=c_{i_0j_0}-u_{i_0}-v_{j_0}<0
\end{aligned}
$$

所以 $C*X'<C*X$，证毕。

11.34 证明定理 11.5 的逆是真。即如果 X 是最优运输计划，那么存在数 $u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n$ 满足(11-3)和(11-5)式。

证 如果 X 是最优的运输计划(包括退化的)，则可用算法 11.3 中的方法找出诸 u_i 和 v_j。对应于 $x_{ij}\neq 0$ 的 c_{ij} 由算法中的解法保证

$$c_{ij}=u_i+v_j$$

对应于 $x_{ij}=0$ 的 c_{ij}，肯定有 $c_{ij}\geqslant u_i+v_j$，若不然，按算法 11.3 的 3)，可找出一个比 X 耗费更小的运输计划 X'，这与 X 是最优的矛盾。

11.35 已知供应量 6, 7, 8, 需求量 5, 5, 11, 单位运费矩阵

$$C=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

用算法 11.3，求其最优运输计划 X。

解 用西北角规则构造一个其二部图无回路的运输计划 X。

$$X=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}\begin{array}{lll}6 & 1 & 0\\ 7 & 3 & 0\\ 8 & 0 & \end{array}\\ \begin{array}{ccc}5 & 5 & 11\\ 0 & 4 & 8\\ & 0 & 0\end{array}\end{array}$$

对 $x_{ij}\neq 0$ 的运输数列方程组

$$u_1+v_1=c_{11}=4$$
$$u_1+v_2=c_{12}=3$$
$$u_2+v_2=c_{22}=2$$
$$u_2+v_3=c_{23}=3$$
$$u_3+v_3=c_{33}=1$$

令 $u_1=0$，逐步解出 $v_1=4$，$v_2=3$，$u_2=-1$，$v_3=4$，$u_3=-3$，为方便起见，把解出的各 u_i 列于 X 的左列，各 v_j 列于 X 的首行：

$$\begin{array}{r}\\ 0\\ -1\\ -3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}4 & 3 & 4\end{array}\\ \begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}\end{array}$$

对 $x_{ij}=0$ 的运输数作验证：

$$c_{13}-u_1-v_3=2-0-4=-2$$
$$c_{21}-u_2-v_1=1-(-1)-4=-2$$
$$c_{31}-u_3-v_1=8-(-3)-4=2$$
$$c_{32}-u_3-v_2=4-(-3)-3=4$$

该计划不最优(因为上述结果中有两个负值)，选出

$$c_{13}-u_1-v_3=-2$$

加一条边(s_1, t_3)到$BG(X)$中，形成回路，该回路对应于运输计划中带方框的运输数如下：

$$\begin{bmatrix} 5 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{4} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

选$\delta=1$，对运输计划作如下修改。(通过对回路上运输数作$+1$和-1。)

$$X=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

对修改后的运输计划，再如上述那样计算各u_i，v_j之值，并把结果列于矩阵的左列和首行。

$$\begin{matrix} & 4 & 1 & 2 \\ 0 & \\ 1 & \\ -1 & \end{matrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

作验证(对$x_{ij}=0$的各点)

$$c_{12}-u_1-v_2=3-0-1=2$$
$$c_{21}-u_2-v_1=1-1-4=-4$$
$$c_{31}-u_3-v_1=3-(-1)-4=0$$

$$c_{32}-u_3-v_2=4-(-1)-1=4$$

选唯一的负值 $c_{21}-u_2-v_1=-4$，在 $BG(X)$ 中加一条边 (s_2, t_1)，形成回路，回路对应如下所示的带框运输数

$$\begin{bmatrix} \boxed{5} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{0} & 5 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

选 $\delta=2$，修改后的运输计划和计算出的各 u_i，v_j 如下：

$$\begin{matrix} & 4 & 5 & 2 \\ 0 & \multicolumn{3}{c}{} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 5 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

作验证

$$c_{12}-u_1-v_2=3-0-5=-2$$

$$c_{23}-u_2-v_3=3-(-3)-2=4$$

$$c_{31}-u_3-v_1=3-(-1)-4=0$$

$$c_{32}-u_3-v_2=4-(-1)-5=0$$

选唯一的负值 $c_{12}-u_1-v_2=-2$，加边成回路并修改运输计划，计算出各 u_i，v_j 之值。

$$\begin{array}{r} \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & 3 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

作验证

$$c_{11}-u_1-v_1=4-0-2=2$$

$$c_{23}-u_2-v_3=3-(-1)-2=2$$

$$c_{31}-u_3-v_1=3-(-1)-2=2$$

$$c_{32}-u_3-v_2=4-(-1)-3=2$$

因为每个 $x_{ij}=0$ 对应的 $c_{ij}-u_i-v_j\geqslant 0$，所以最后得到一个最优运输计划。其耗费为

$$\sum_{i=1}^{3} u_i a_i+\sum_{j=1}^{3} v_j b_j=0-7-8+10+15+22=32$$

若用 $C*X$ 计算耗费也得 32。

11.36 求解下列运输问题。已知供应量 6, 7, 8, 9 和需求量 5, 5, 5, 15, 单位运费矩阵

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

解 应用题 11.28 的方法及结果得初始运输计划为

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

求得 $u_1=0$, $u_2=-2$, $u_3=0$, $u_4=1$, $v_1=1$, $v_2=2$, $v_3=1$, $v_4=3$。因为

$$c_{11}-u_1-v_1=3-0-1=2$$
$$c_{14}-u_1-v_4=4-0-3=1$$
$$c_{21}-u_2-v_1=2+2-1=3$$
$$c_{22}-u_2-v_2=3+2-2=3$$
$$c_{23}-u_2-v_3=5+2-1=6$$
$$c_{32}-u_3-v_2=5-0-2=3$$
$$c_{33}-u_3-v_3=2-0-1=1$$
$$c_{41}-u_4-v_1=4-1-1=2$$

$$c_{43}-u_4-v_3=2-1-1=0$$

所以 X 已是最优运输计划。

评注 本题如果用西北角规则做，要用5次迭代。可见题11.28方法之优越性。另外最优运输计划不唯一。如本题

$$X=\begin{bmatrix}0 & 5 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 7\\5 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

也是最优运输计划，读者可验证耗费都是60。

11.37 求解下列运输问题，其中供应量7，8，9，需求量4，7，13，单位运费矩阵

$$C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

解 用西北角规则求出初始运输计划 X。

$$X=\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\0 & 4 & 4\\0 & 0 & 9\end{bmatrix}\begin{matrix}7\\8\\9\end{matrix}$$
$$\begin{matrix}4 & 7 & 13\end{matrix}$$

求得 $u_1=0$, $u_2=2$, $u_3=1$, $v_1=4$, $v_2=1$, $v_3=2$。因为

$$c_{13}-u_1-v_3=2-0-2=0$$
$$c_{21}-u_2-v_1=2-2-4=-4$$
$$c_{31}-u_3-v_1=1-1-4=-4$$
$$c_{32}-u_3-v_2=2-1-1=0$$

有负值。选 x_{31} 点作调整，即加 (s_3, t_1) 边，使构成回路，回路对应于以下所示带框运输数。

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & \boxed{3} & 0 \\ 0 & \boxed{4} & \boxed{4} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{9} \end{bmatrix}$$

调整值为 4, 调整后得

$$X'=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

这是退化的运输计划，不能确定其最优性。因此改供应量为 $7+3\varepsilon$, 8, 9, 需求量为 $4+\varepsilon$, $7+\varepsilon$, $13+\varepsilon$, 使成为 ε–运输问题。用西北角规则求得初始运输计划为

$$X=\begin{bmatrix} 4+\varepsilon & 3+2\varepsilon & 0 \\ 0 & 4-\varepsilon & 4+\varepsilon \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{matrix} 7+3\varepsilon \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4+\varepsilon & 7+\varepsilon & 13+\varepsilon \end{matrix}$$

和上边的方法一样，求得 $u_1=0$, $u_2=2$, $u_3=1$, $v_1=4$, $v_2=1$, $v_3=2$, 经检查有负值, 选 x_{31} 作调整点, 调整后得运输计划

$$X'=\begin{bmatrix} 0 & 7+3\varepsilon & 0 \\ 0 & -2\varepsilon & 8+2\varepsilon \\ 4+\varepsilon & 0 & 5-\varepsilon \end{bmatrix}$$

求得 $u_1=0$, $u_2=2$, $u_3=1$, $v_1=0$, $v_2=1$, $v_3=2$, 经检查已无负值。令 $\varepsilon=0$ 得

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

是最优运输计划, 耗费为 58。

评注 ε–运输计划中，ε 的系数可以是负值，这一点与一般运输问题不同。

11.38 考虑一个具有 n 个供应量 1, 1, …, 1 和 n 个需求量 1, 1, …, 1 的退化的运输问题，试分别用西北角规则、东南角规则、东北角规则求出运输计划。

解 用西北角规则求得

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
1+\varepsilon & (n-1)\varepsilon & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1+n\varepsilon \\
0 & 1-(n-2)\varepsilon & (n-2)\varepsilon & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\varepsilon & \varepsilon & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1+\varepsilon & 1+\varepsilon & 1+\varepsilon & 1+\varepsilon & \cdots & 1+\varepsilon & 1+\varepsilon &
\end{array}
$$

用东南角规则求得的结果与上述全同。

用东北角规则求得

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n-1)\varepsilon & 1+\varepsilon & 1+n\varepsilon \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-2)\varepsilon & 1-(n-2)\varepsilon & 0 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 2\varepsilon & 1-2\varepsilon & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\varepsilon & 1-\varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1+\varepsilon & 1+\varepsilon & 1+\varepsilon & \cdots & \cdots & 1+\varepsilon & 1+\varepsilon & 1+\varepsilon &
\end{array}
$$

11.39 如果供求总量不相等，如何描述求最小耗费的运输计划问题。

解 若 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i < \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$，则增加一个虚拟的供应站 s_{m+1}，它具有供应量 $a_{m+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$，而该站到各需求站的单位运费都为0。反之，若 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$，则可设置一个虚拟的需求站，它的需求量

为 $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$，同时各供应站到该站的单位运费都为0。从而把它们看成等量运输问题，求出最优运输计划，它对应着原问题的最小耗费运输计划。只不过由虚拟站发出的数量或发到虚拟站的数量都不能计入实在供应站和需求站的实际数量中。

11.40 求解最优指派问题，其中速度矩阵

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

解 用西北角规则求得初始运输计划

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}1+\varepsilon & 2\varepsilon & 0\\ 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}1+3\varepsilon\\ 1\\ 1\end{matrix}$$
$$\begin{matrix}1+\varepsilon & 1+\varepsilon & 1+\varepsilon\end{matrix}$$

求得 $u_1=0,\ u_2=2,\ u_3=2,\ v_1=1,\ v_2=2,\ v_3=0$，因为

$$u_1+v_3-c_{13}=0+0-3=-3$$
$$u_2+v_1-c_{21}=2+1-2=1$$
$$u_3+v_1-c_{31}=2+1-3=0$$
$$u_3+v_2-c_{32}=2+2-1=3$$

选 x_{13} 作调整点，调整后得

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}1+\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

求得 $u_1=0,\ u_2=2,\ u_3=-1,\ v_1=1,\ v_2=2,\ v_3=3$，因为

$$u_2+v_1-c_{21}=2+1-2=1$$
$$u_2+v_3-c_{23}=2+3-2=3$$

$$u_3+v_1-c_{31}=-1+1-3=-3$$

$$u_3+v_2-c_{32}=-1+2-1=0$$

选 x_{31} 作调整点，调整后得

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon & \varepsilon & 1+\varepsilon\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求得 $u_1=0,\ u_2=2,\ u_3=2,\ v_1=1,\ v_2=2,\ v_3=3$。因为

$$u_2+v_1-c_{21}=2+1-2=1$$

$$u_2+v_3-c_{23}=2+3-2=3$$

$$u_3+v_2-c_{32}=2+2-1=3$$

$$u_3+v_3-c_{33}=2+3-2=3$$

已无负值，令 $\varepsilon=0$，得

$$X=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

故所求最优指派是(3, 2, 1)。

11.41 求解最优指派问题，其中速度矩阵

$$C=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

解 应用题 11.28 的方法求初始解，不过现在是对应于较大的 c_{ij} 值的 x_{ij} 先填，结果得

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\varepsilon & 1+\varepsilon\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon & 1-\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & 2\varepsilon & 1-2\varepsilon & 0\end{bmatrix}$$

求 得 $u_1=0$, $u_2=3$, $u_3=2$, $u_4=3$, $v_1=0$, $v_2=0$, $v_3=1$, $v_4=4$。因为 $u_1+v_2-c_{12}=0+0-3=-3$, 选 x_{12} 作调整点, 调整后得

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}0 & 3\varepsilon & 0 & 1+\varepsilon\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon & 1-\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & -\varepsilon & 1+\varepsilon & 0\end{bmatrix}$$

求 得 $u_1=0$, $u_2=2$, $u_3=-1$, $u_4=0$, $v_1=1$, $v_2=3$, $v_3=4$, $v_4=4$。因为 $u_4+v_1-c_{41}=0+1-4=-3$, 选 x_{41} 作调整点, 调整后得

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}0 & 3\varepsilon & 0 & 1+\varepsilon\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \varepsilon & -2\varepsilon & 1+\varepsilon & 0\end{bmatrix}$$

求得 $u_1=0$, $u_2=-1$, $u_3=-1$, $u_4=0$, $v_1=4$, $v_2=3$, $v_3=4$, $v_4=4$, 因为

$$\begin{aligned}
u_1+v_1-c_{11}&=0+4-0=4\\
u_1+v_3-c_{13}&=0+4-1=3\\
u_2+v_2-c_{22}&=-1+3-2=0\\
u_2+v_3-c_{23}&=-1+4-1=2\\
u_2+v_4-c_{24}&=-1+4-3=0\\
u_3+v_1-c_{31}&=-1+4-2=1\\
u_3+v_3-c_{33}&=-1+4-2=1\\
u_3+v_4-c_{34}&=-1+4-3=0\\
u_4+v_4-c_{44}&=0+4-2=2
\end{aligned}$$

全非负值, 令 $\varepsilon=0$, 得

$$X=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

故所求指派为(4, 1, 2, 3)。

11.42 有 $m=5$ 个人，$n=6$ 件工作，第1个人对工作2, 3, 4, 5是合格的。第2个人对工作1, 3, 5, 6是合格的。第3个人对工作5, 6是合格的。第4个人对工作6是合格的。第5个人对工作5, 6是合格的。试求出人对工作的最大指派。（一个工作只能由一个人完成，且一人只能做一件工作。）

解 这是第九章中研究过的最大匹配问题。它是最优指派问题的特殊情况，可以转化为最优指派问题来解。方法是：

1) $m<n$ 时可增设 $n-m$ 个虚拟人。反之，$m>n$ 时可增设 $m-n$ 件虚拟工作。总之，使 $m=n$，以符合最优指派问题的条件。

2) 定义速度矩阵 $C=(c_{ij})$ 如下：如果人 i 合适于工作 j，则 $c_{ij}=1$，否则 $c_{ij}=0$。增设的虚拟人（或工作）所对应的行（或列）的 c_{ij} 全为0。

这样，求得具有最大总速度 $c_{1i_1}+c_{2i_2}+\cdots+c_{ni_n}=p$ 的指派 $(i_1, , i_2, \cdots, i_n)$ 就是最大匹配。当然要除去其中虚设成分。

按上述方法，增设虚拟的第6个人，并得到速度矩阵

$$C=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&0\\1&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

用题11.28方法求得初始矩阵为

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon & 1+\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求得 $u_1=0$, $u_2=1$, $u_3=-1$, $u_4=1$, $u_5=0$, $u_6=-1$, $v_1=0$, $v_2=v_3=v_4=v_5=v_6=1$。因为 $u_6+v_1-c_{61}=-1+0-0=-1$，选 x_{61} 作调整得

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}0 & 1+\varepsilon & 2\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \varepsilon & 0 & 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求得 $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=-1$, $u_4=1$, $u_5=0$, $u_6=-1$, $v_1=v_2=v_3=v_4=v_5=1$, $v_6=0$。因 $u_2+v_6-c_{26}=0+0-1=-1$，选 x_{26} 作调整得

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}0 & 1+\varepsilon & 3\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0\\ 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2\varepsilon & 0 & 1-2\varepsilon & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求得 $u_1=u_2=u_4=u_5=0$, $u_3=u_6=-1$, $v_1=v_2=v_3=v_4=v_5=v_6=1$。因 $u_3+v_5-c_{35}=-1+1-1=-1$，选 x_{35} 作调整得

$$X_{\varepsilon}=\begin{bmatrix} 0 & 1+\varepsilon & 3\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\varepsilon & 0 & 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求得 $u_1=u_2=u_4=0$，$u_3=u_5=u_6=-1$，$v_1=v_2=v_3=v_4=v_6=1$，$v_5=2$。检查所有 $x_{ij}=0$ 处已无负值。令 $\varepsilon=0$ 得

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C*X=4$。故所求最大指派为：

第 1 人指派给工作 2；

第 2 人指派给工作 1；

第 3 人无工作（他对工作 4 的速度为 0）；

第 4 人指派给工作 6；

第 5 人指派给工作 5。

评注 此类问题手工计算很麻烦，不如用二部图求最大匹配方法简明。

11.43 证明定理 11.8——设 E 是有限集合，$\mathscr{P}$ 是 E 上的一个杂乱。设 $\mathscr{K}$ 是由 E 的所有具有下述性质的子集组成：

(1) 每个子集与 $\mathscr{P}$ 的每个元素的交不空。

(2) 每个子集是具有性质(1)的最小者。

那末，$\mathscr{K}$ 是 E 上唯一的杂乱，使得($\mathscr{P}$, $\mathscr{K}$)是 E 的一个区组化

系统。

证 由(2)知$\mathscr{K}$是E上一个杂乱。我们首先证明$(\mathscr{P}, \mathscr{K})$是$E$上的区组化系统。设$E$划分成两个集合$E_1$和$E_2$,假定没有$\mathscr{P}$的元素是$E_1$的子集,那末$\mathscr{P}$的每一元素和$E_2$的交不空,根据$\mathscr{K}$的定义,$E_2$含有$\mathscr{K}$的一个元素$K$。现在假设存在一个$\mathscr{P}$的元素$P\subseteq E_1$并且存在一个$\mathscr{K}$的元素$K\subseteq E_2$,因为$E_1$和$E_2$形成$E$的一个划分,$E_1\cap E_2=\varnothing$,因此$P\cap K=\varnothing$,但这和$\mathscr{K}$的定义矛盾。因此$(\mathscr{P}, \mathscr{K})$是$E$的区组化系统。

现在证明$\mathscr{K}$的唯一性。若不然,有$(\mathscr{P}, \mathscr{K}_1)$和$(\mathscr{P}, \mathscr{K}_2)$同为$E$上的区组化系统,而$\mathscr{K}_1$不同于$\mathscr{K}_2$,不妨设有$K_1\in\mathscr{K}_1$而$K_1\notin\mathscr{K}_2$(若不然,可交换$\mathscr{K}_1$和$\mathscr{K}_2$)。我们作$E$的划分$\{E-K_1, K_1\}$,根据区组化系统的定义,对$(\mathscr{P}, \mathscr{K}_1)$而言,设有$\mathscr{P}$的元素属于$E-K_1$,因而,对$(\mathscr{P}, \mathscr{K}_2)$而言,有$\mathscr{K}_2$的元素$K_2\subseteq K_1$,因$K_1$不是$\mathscr{K}_2$的元素,所以$K_2\neq K_1$。现在我们考虑$E$的划分$\{E-K_2, K_2\}$,假设有$\mathscr{K}_1$的一个元素$K_1'\subseteq K_2$,那末,$K_1'\subseteq K_1$且$K_1'\neq K_1$,这和$\mathscr{K}_1$是$E$上的一个杂乱矛盾。这样,对$(\mathscr{P}, \mathscr{K}_1)$而言,有$\mathscr{P}$的元素$P\subseteq E-K_2$,因而对$(\mathscr{P}, \mathscr{K}_2)$而言,既有$P\subseteq E-K_2$,又有$\mathscr{K}_2$的元素$K_2\subseteq K_2$,这又和$(\mathscr{P}, \mathscr{K}_2)$是区组化系统矛盾。这就完成了定理的证明。

11.44 证明定理 11.9——设$(\mathscr{P}, \mathscr{K})$是有限集$E$的一个区组化系统,$f$是$E$上的实值函数。那末

$$\max_{P\in\mathscr{P}}\min_{e\in P} f(e)=\min_{K\in\mathscr{K}}\max_{e\in K} f(e)$$

证 设P是$\mathscr{P}$的一个元素,K是$\mathscr{K}$的一个元素,根据定理 11.8,存在一个元素$e_0\in P\cap K$,因此

$$\min_{e\in P} f(e)\leqslant f(e_0)\leqslant\max_{e\in K} f(e)$$

或

$$\min_{e\in P} f(e)\leqslant\max_{e\in K} f(e)$$

因为对所有 $\mathscr{P}$ 中的 P 和 $\mathscr{K}$ 中的 K，上式都成立。我们得到

$$\max_{P\in\mathscr{P}}\min_{e\in P}f(e)\leqslant\min_{K\in\mathscr{K}}\max_{e\in K}f(e)$$

但根据算法 11.4 的(11.15)式，有

$$\max_{P\in\mathscr{P}}\min_{e\in P}f(e)\geqslant\min_{K\in\mathscr{K}}\max_{e\in K}f(e)$$

因而

$$\max_{P\in\mathscr{P}}\min_{e\in P}f(e)=\min_{K\in\mathscr{K}}\max_{e\in K}f(e)$$

11.45 图 11.8 的 G 中边上的数字表示边的容量。

(a) 若边容量表示最大交通流，试用算法 11.4 确定 u 到 v 的一条基本链，使得通过这条链，可以获得 u 到 v 的最大交通流。

(b) 若边容量表示高度，试用算法 11.4 确定 u 到 v 的又一条基本链，使得沿着这条链，从 u 到 v 所经过的边的最大高度达最小值。

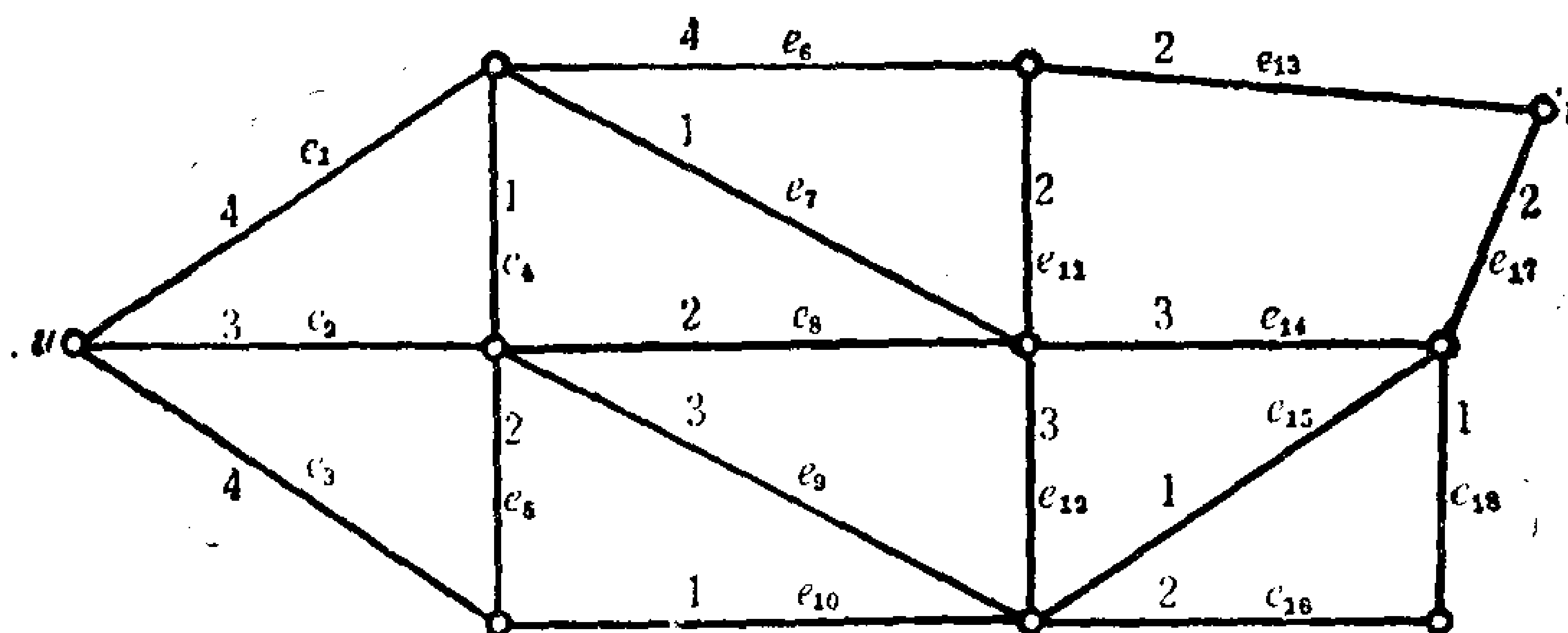


图 11.8

解 设 $\mathscr{P}$ 表示联结 u 和 v 的基本链的集合，$\mathscr{K}$ 表示分离 u 和 v 的基本割的集合。$(\mathscr{P}, \mathscr{K})$ 和 $(\mathscr{K}, \mathscr{P})$ 都是边集 E 上的区组化系统，符合定理 11.9 条件。再则边容量就是 E 上的一个实值函数。将图中的各边用 e_i 的形式标记在图上。

令 $a_1=4$, $a_2=3$, $a_3=2$, $a_4=1$, 那么

$F_0=\varnothing$

$F_1=\{e_1, e_3, e_6\}$

$F_2=\{e_2, e_9, e_{12}, e_{14}\}$

$F_3=\{e_5, e_8, e_{11}, e_{13}, e_{16}, e_{17}\}$

$F_4=\{e_4, e_7, e_{10}, e_{15}, e_{18}\}$

运用算法 11.4 的步骤 3)。

(a) 显然，F_0, $F_0 \cup F_1$, $F_0 \cup F_1 \cup F_2$ 都不含 $\mathscr{P}$ 中的任何元素(u 到 v 的一条基本链)，而 $F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3$ 含有 $\mathscr{P}$ 的元素，比如 $P=\{e_1, e_6, e_{13}\}$，所以 u 到 v 的最大交通流是

$$\min_{e \in P} f(e)=a_3=2$$

(b) 类似于(a)，显然 F_0, $F_0 \cup F_1$ 都不含 $\mathscr{K}$ 中任何元素(分离 u 和 v 的一个基本割)，而 $F_0 \cup F_1 \cup F_2$ 含有 $\mathscr{K}$ 的一个元素 $K=\{e_1, e_2, e_3\}$，所以 u 到 v 的最小最大高度是

$$\min_{e \in K} f(e)=a_2=3$$

而由 u 沿着链 $P=\{e_2, e_8, e_{11}, e_{13}\}$ 到 v 时经过的最大高度达到这个最小值 3。

评注 对于(a)，如何判断 $F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_{t-1}$ 是否含有 $\mathscr{P}$ 中的一个元素，似乎不那么容易。这里可以使用下述技巧，最初把 G 看成不具有任何边的图，逐步地添加 F_1, F_2, $\cdots$ 的边于 G 中，查看每次添加是否构成 u 到 v 的一条通路。

类似地，对于(b)，可逐步地从原图中删去 F_1, F_2, $\cdots$ 中的各边，并在每次删除时，查看 u 和 v 是否已处于不连通的成分中。如果同时还要求出达到最小最大高度的链，假如恰好在删去 F_t 中的边时 u 和 v 才不连通，那么把原图中删去 F_1, F_2, $\cdots$, F_{t-1} 中所有边之后残留的图记作 G'，G' 中任一条 u 到 v 的基本链就是所求。

11.46 设 $\mathscr{P}$ 是有限集合 E 上的一个杂乱。试证明

(a) 若空集 $\varnothing$ 是 $\mathscr{P}$ 的一个元素，那末它是 $\mathscr{P}$ 的唯一的元素。而且

(b) 若 $(\mathscr{P}, \mathscr{K})$ 是 E 的区组化系统，那末 $\mathscr{K}$ 是空集。

证 (a) 设任一 $P\in\mathscr{P}$，因为 $\varnothing\subseteq P$（空集是任何集合的子集），由杂乱的定义 $P=\varnothing$。

(b) 对 E 的任何划分 $E=\{E_1, E_2\}$，恒有 $\varnothing\subseteq E_1$，因而不存在 $\mathscr{K}$ 中任何元素 K 可使 $K\subseteq E_2$。又这样的划分是任意的，当 $E_1=\varnothing$ 时，$E_2=E_1$。由于任何 K，$K\nsubseteq E$，所以 $\mathscr{K}$ 为空集。

11.47 设 $\mathscr{P}$ 是有限集合 E 的子集族。证明如果 $\mathscr{P}$ 中的所有的成员含有相同个数的元素，那么 $\mathscr{P}$ 是 E 上的杂乱。

证 设 $P_1, P_2\in\mathscr{P}$，由于 $|P_1|=|P_2|$，所以它们之间不能有真包含关系。因而如果 $P_1\subseteq P_2$，那么 $P_1=P_2$。由定义 $\mathscr{P}$ 是 E 上的杂乱。

11.48 (a) 设 $E=\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$，$\mathscr{P}$ 是 E 的具有 n 个元素的子集族。试求 E 的区组化系统 $(\mathscr{P}, \mathscr{K})$。如果 $f(e)=e(e\in E)$，利用算法 11.4，求 $\max\limits_{P\in\mathscr{P}}\min\limits_{e\in P} f(e)$ 之值。

(b) 对 $E=\{1, 2, \cdots, 2n\}$ 重做(a)。

解 (a) 根据上题的结果，$\mathscr{P}$ 是 E 上的杂乱。又根据定理 11.8，$\mathscr{K}$ 的任一个元素 K 应是与 $\mathscr{P}$ 中任一元素交不空的最小集合。由于 E 只有 $2n-1$ 个元素，所以取 K 为 E 的任何 n 个元素即可。让 K 遍历所有选法即构成 $\mathscr{K}$，这样 $\mathscr{K}=\mathscr{P}$。因此 $(\mathscr{P}, \mathscr{P})$ 是 E 上的区组化系统。

应用算法 11.4 时，$F_0=\varnothing$，$F_i=\{i\}(i=1, 2, \cdots, 2n-1)$，显然，$F_0$, $F_0\cup F_1$, $\cdots$, $F_0\cup F_1\cup\cdots\cup F_{n-1}$ 中各集合最多含有 $n-1$ 个元素，因而它们不含 $\mathscr{P}$ 中任何元素。而 $F_0\cup F_1\cup\cdots$

$\cup F_{n-1}\cup F_n$ 含有 $\mathscr{P}$ 中的一个元素$\{1, 2, \cdots, n\}$。所以

$$\max_{P\in\mathscr{P}}\ \min_{e\in P} f(e)=n$$

(b) 类似(a)的分析，$\mathscr{K}$ 是 E 的所有 $n+1$ 个元素的子集族。而 $\max\limits_{P\in\mathscr{P}}\min\limits_{e\in P} f(e)=n$。

11.49 对下列速度矩阵，试求最优的瓶颈指派。

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

解 假定二部图中的边用 c_{ij} 表示。应用算法 11.4，令 $a_1=7$, $a_2=6$, $a_3=5$, $a_4=4$, $a_5=3$, $a_6=2$, $a_7=1$。那么

$$F_0=\varnothing$$
$$F_1=\{c_{15},\ c_{52}\}$$
$$F_2=\{c_{25},\ c_{53}\}$$
$$F_3=\{c_{24},\ c_{32},\ c_{45}\}$$
$$F_4=\{c_{13},\ c_{22},\ c_{34},\ c_{41},\ c_{55}\}$$
$$F_5=\{c_{12},\ c_{21},\ c_{33},\ c_{43},\ c_{51}\}$$
$$F_6=\{c_{11},\ c_{23},\ c_{31},\ c_{42},\ c_{44},\ c_{54}\}$$
$$F_7=\{c_{14},\ c_{35}\}$$

先作 5 个结点代表人，5 个结点代表工作的图，逐步地加 F_1, F_2, $\cdots$ 中的边到相应的结点上，而每次添加边之后，考察(或用求最大匹配算法)能否构造一个完全匹配。

显然，添加 $F_0\cup F_1\cup F_2\cup F_3$ 中所有边后，图中尚不能构成一个完全匹配。如图 11.9 所示。

再添加 F_4 中所有边之后，可得一个完全匹配；人 1—工作

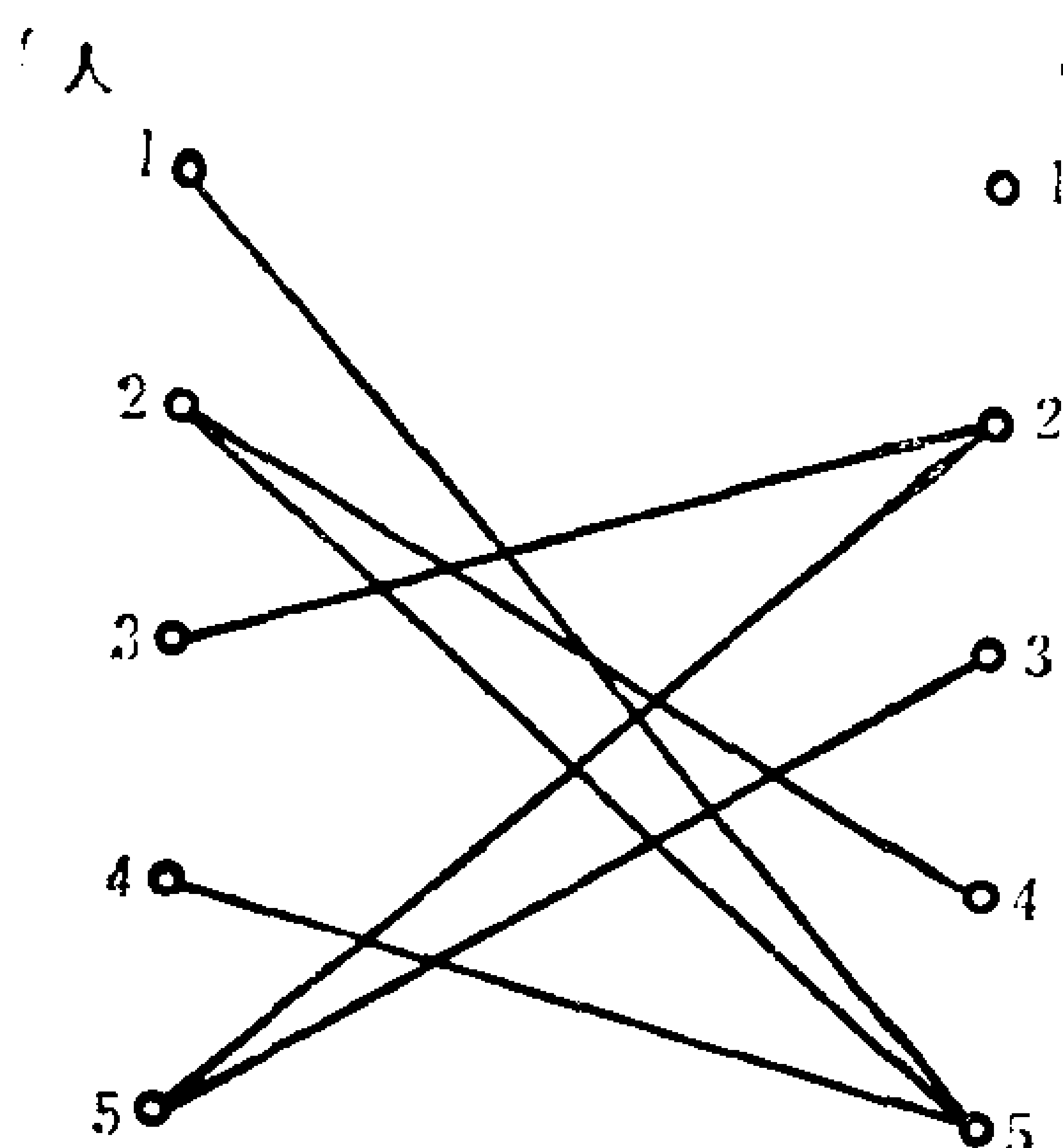


图 11.9

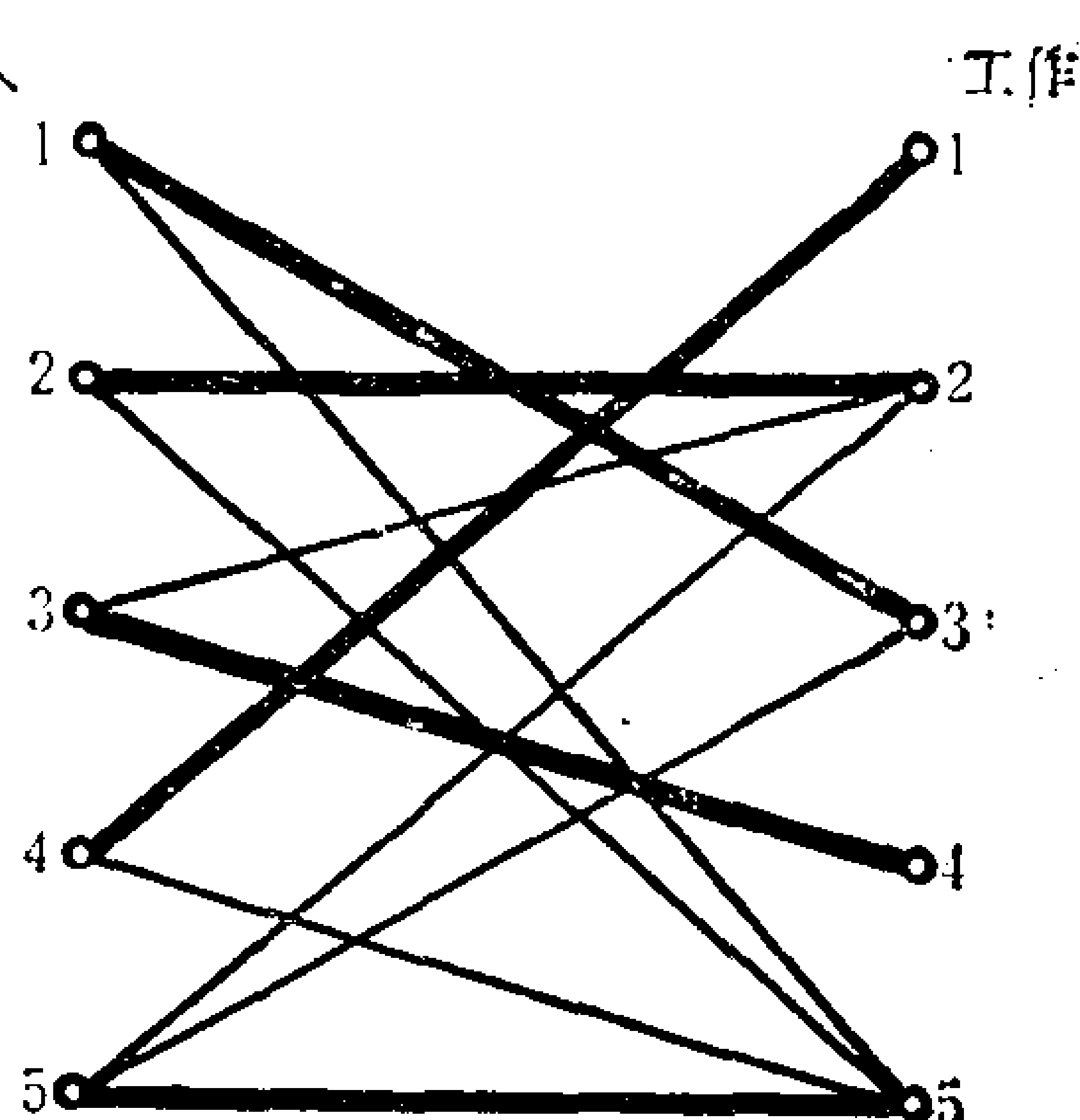


图 11.10

3, 人 2—工作 2, 人 3—工作 4, 人 4—工作 1, 人 5—工作 5。如图 11.10 中的粗线所示。即最优指派为(3, 2, 4, 1, 5), 最大瓶颈速度为 4。

11.50 设 $\mathscr{P}$, $\mathscr{K}$ 是 E 上的杂乱, 使得对所有 E 上的实值函数 f, 定理 11.9 中的等式都成立。证明($\mathscr{P}$, $\mathscr{K}$)是 E 的区组化系统。

证 用反证法。假定($\mathscr{P}$, $\mathscr{K}$)不是区组化系统, 那么至少有一个 $P_0\in\mathscr{P}$ 和 $K_0\in\mathscr{K}$, $P_0\cap K_0=\varnothing$。设 f 是这样的函数: 若 $e\in P_0$, 则 $f(e)=a$, 若 $e\notin P_0$, 则 $f(e)<a$, 那么显然有

$$\max_{P\in\mathscr{P}}\min_{e\in P} f(e)=\min_{e\in P_0} f(e)=a \tag{1}$$

又 K_0 不含 P_0 中的任何元素($P_0\cap K_0=\varnothing$), 所以

$$\max_{e\in K_0} f(e)<a$$

因而

$$\min_{K\in\mathscr{K}}\max_{e\in K} f(e)\leqslant\max_{e\in K_0} f(e)<a \tag{2}$$

由(1)式和(2)式, 得

$$\max_{P\in\mathscr{P}}\min_{e\in P} f(e) > \min_{K\in\mathscr{K}}\max_{e\in K} f(e)$$

这和题设矛盾。这就证明了命题。

参 考 文 献

[1] R. A. Brualdi, 组合学导引, 李盘林等译, 华中工学院出版社, 1982.

[2] D. A. Cohen, Basic Techniques of Combinatorial Theory, John Wiley & Sons, 1978.

[3] C. L.. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill Book Company, 1968.

[4] L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, North-Holland Publishing Company, 1979.

[5] H. J. Ryser, 组合数学(附组合矩阵论), 李乔译, 科学出版社, 1983.

[6] 卢开澄, 组合数学算法与分析, 清华大学出版社, 1983.

[ＧｅｎｅｒａｌＩｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ]
书名=组合数学理论与题解
作者=王元元　王庆瑞　黄纪麟　李振国　方世昌
页数=５２９
ＳＳ号=１０１００２８５
出版日期=１９８９年０７月第１版